非对易几何相 abelian adiabatic phase

1、Berry phase（非简并态）

△ ~~量子绝热定理~~ △引入 $\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$ ①

对于含时 Hamiltonian 来说，系统的能量不守恒，一般来说就会有能级的跃迁。为了简化问题，我们考虑这样一个系统 $|\psi(t)\rangle = c_n(t)|n; R(t)\rangle$ ②

它的意思是说 $|\psi(0)\rangle = |n; R(0)\rangle$，那么以后还会处于同一量子数标记的本征态。注意不是同一本征态，时间变了，态矢 $|n; R(t)\rangle$ 也会变。这就是量子绝热定理，它的适用条件是

$$\left|\frac{\langle m; R(t)|\dot{H}(t)|n; R(t)\rangle}{E_n(R(t)) - E_m(R(t))}\right| \ll 1 \quad ③$$

直观来说就是环境变化的频率相对于系统一定要慢

将②代入 schrödinger Eq.

傅科摆 $\frac{几秒}{24小时}$

△ Berry phase 的表达

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\delta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |n; R(t)\rangle$$

其中 $\delta_n = -\int_0^t E_n(t')\,dt'$ 动力学相

$$\gamma_n = \int_c A^n$$

$A^n = i\langle n; R(t)|d|n; R(t)\rangle$

△ Berry 相的几何解释

引入 $\rightarrow$ 纤维丛 $e^{i\alpha}|n,R(t)\rangle$ 底流形

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-i\int_n(t)}|\psi(t)\rangle$$ 可以得到 horizontal lift

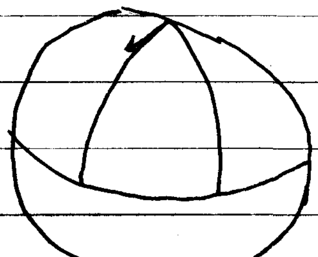
$$\langle\tilde{\psi}(t)|d|\tilde{\psi}(t)\rangle = 0 \Rightarrow \langle n;R(t)|d|\psi(t)\rangle = 0$$

这就是平行移动条件

反之，如果给出平行移动条件，我们可以得到联络

$$A^n = i\langle n;R(t)|d|n;R(t)\rangle$$

和 Berry 相因子。Berry 相因子即 $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 平行移动一周后，末矢量与切矢量的差别。数学中称为 homology.



二维球面的平行移动 ① 不能绕自转时轴转动.
② 矢量长度不变、
③ 始终在切平面内.

可以给出 $\mathrm{Im}\langle\phi|\frac{d}{dt}|\phi\rangle = 0$

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\Omega}\times\vec{e}$$

其中 $|\phi\rangle = \frac{|e_1\rangle + i|e_2\rangle}{\sqrt{2}}$ 其中 $\vec{\Omega} = \vec{r}\times\dot{\vec{r}}$

$\langle\tilde{\psi}(t)|d|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 就是纯虚的.

$\langle\tilde{\psi}(t)|i\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 实的

乘以 $(-i)$ $\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle$ 当然是纯虚的.

2、non-abelian Berry phase （~~简~~简并态）
（Wilczek - Zee phase）量子态

~~简~~ 绝热近似：只允许在简并子空间内跃迁，
不允许跃迁出简并子空间。
因波函数的演化可写成

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{a=1}^{N} C_a^n(t) |n, a; R(t)\rangle \qquad ④$$

只是简并子空间内基矢的线性组合。
代入到 schrödinger Eq. 并且左乘 $\langle n, b; R(t)|$，可得

$$\frac{d C_b^n(t)}{dt} + \sum_{a=1}^{N} \left[i E_n(R) \delta_{ab} + \langle n, b; R(t) | \frac{d}{dt} | n, a; R(t)\rangle \right] C_a^n(t) = 0$$

类比

$$\frac{df(x)}{dx} + h(x) f(x) = 0 \qquad f(0) = 1$$

$$f(x) = e^{-\int_0^x h(x') dx'}$$

schrödinger 方程
变形为
$$\frac{d U^\dagger(t)}{dt} + i H(t) U^\dagger(t) = 0 \qquad U^\dagger(0) = 1$$

$$U^\dagger(t) = \mathcal{T} \exp\left[-i \int_0^t dt' H(t') \right]$$

$$C_b^n(t) = \sum_{a=1}^{N} \left[\mathcal{T} \exp \int_0^t dt' \, - i E_n(R) \delta_{ab} - \langle n, b; R | \frac{d}{dt'} | n, a; R \rangle \right]_{ba} C_a^n$$

定义 联络矩阵

$$A_{ba}^{ba} = i\langle n, b; R | d | n, a; R\rangle$$

$$C_b^n(t) = e^{-\frac{1}{i}\int_0^t E_n(\tau)d\tau} \sum_a \left[\mathcal{T}\exp\left(i\int_0^t A\right)\right]_{ba}^{ba} C_a^n(0) \quad ⑤$$

将⑤代入④得

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{a,b=1}^{N} |n, b; R(t)\rangle e^{-i\int_0^t E_n(R(\tau))d\tau}$$

$$\times \left[\mathcal{T}\exp\left(i\int_0^t A\right)\right]^{ba} C_a^n(0)$$

设初始条件为 $|\psi(0)\rangle = |n, a; R(0)\rangle =: |\psi_a(0)\rangle$

$$|\psi_a(t)\rangle = \sum_{b=1}^{N} |n, b; R(t)\rangle e^{-i\int_0^t E_n(\tau)d\tau} \left[\mathcal{T}\exp\left(i\int_0^t A\right)\right]^{ba} \quad ⑥$$

写成矩阵形式

$$(|\psi_1(t)\rangle, \cdots, |\psi_N(t)\rangle) = (|n, 1; R(t)\rangle, \cdots, |n, N; R(t)\rangle) \cdot e^{-i\int_0^t E_n(\tau)d\tau} \left[\mathcal{T}\exp\left(i\int_0^t A\right)\right] \quad ⑦$$

△ Wilczek-Zee phase 的几何解释

引入 $|\tilde{\psi}_a(t)\rangle = e^{i\int_0^t E_n(\tau)d\tau}|\psi_a(t)\rangle$

horizontal lift

$\langle n,b;R|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_a(t)\rangle = 0$

平行移动条件

给出联络

$A^{ba} = \langle n,b;R|d|n,a;R\rangle$

和 Wilczek-Zee phase factor

$U^{geometric} = \mathcal{T}\exp(i\int_0^T A)$ ⑧

故 Wilczek-Zee phase 的本质是几何的.

3. 例子

$$H = \frac{1}{2}\mu \vec{B}\cdot \gamma$$

其中 $\gamma_k := \sigma_1 \otimes \sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$

~~由来~~

二重简并 $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2}\mu B$

$$\psi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad \psi_{+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\psi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ -\cos\theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ba} = i\langle \psi_{+b} | d | \psi_{+a} \rangle$$

$$A^{+}_{ba} = i\left(\langle \psi_{+b} | \frac{\partial}{\partial\theta} | \psi_{+a} \rangle d\theta + \langle \psi_{+b} | \frac{\partial}{\partial\varphi} | \psi_{+a} \rangle d\varphi \right)$$

$$A_{\theta}^{(+)} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\varphi}^{(+)} = \frac{\sin\theta}{2}\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\varphi} \\ \cos\theta\, e^{i\varphi} & \sin\theta \end{pmatrix}$$