兰州大学2005数分

To Professor Yao

May 3rd, 2010

1 判断.

1.1 设数列$\{x_n\}$满足对任意正整数 p, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

解答. 错. 比如对 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ 就有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)=0,\ \forall\ p\geq 1.$$

但$\{x_n\}$发散.

1.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有原函数.

解答. 错. 任一只具有有限多个跳跃间断点的函数 f 均是 *Riemann* 可积的, 但 f 没有原函数, 这是 *Darboux* 告诉我们的, 他说任一导函数最多只能有第二类间断点.

1.3 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上处处可导, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定 *Riemann* 可积.

解答. 错. 比如对于函数

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{\pi}{x^\beta}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $1<\alpha<\beta+1$, $\dfrac{\beta}{\alpha}\in\mathbb{N}$. 容易知道

- $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上处处可导, 且导函数为

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{\pi}{x^\alpha}-\beta\pi x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{\pi}{x^\beta}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

- $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 不 *Riemann* 可积. 事实上, $f'(x)$ 是无界的:

$$\left|f'\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right| = \left|\beta\pi n^{\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}}\right| \to \infty, (n\to\infty).$$

注记. 由 1.2 和 1.3, 我们知道一个函数具有原函数与它是否可积是没有必然联系的.

1.4 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的所有方向导数都存在.

解答. 对. 按定义即有. 特别的,

$$\nabla_v f = v\cdot\nabla f = df(v), \ \forall\ v\in\mathbb{R}^n.$$

1.5 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的单调有界函数, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

解答. 对. 这就是著名的 *Abel* 判别法, 可通过积分第二中值定理证明. 比如

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \\
= &\left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx\right| \\
\leq &M\left(\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx\right| + \left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx\right|\right) \ (M=\sup|g(x)|) \\
\to &0 \ (\infty\leftarrow A_1<A_2).
\end{aligned}$$

2 计算.

2.1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}$.

解答. 由

$$n\frac{1}{n^2+n+n} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+n+i} \le n\cdot\frac{1}{n^2+n},$$

及夹逼即知

$$\text{原极限} = 0.$$

2.2 $\int_0^1 \ln x dx.$

解答.

$$\text{原积分} \quad = \quad x\ln x - x|_0^1 = -1.$$

注记.

- 这里用到
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$
- 严格的解答需要取个极限么.

2.3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n}x^{2n}$ 收敛域与和函数.

解答. 记

$$u_n = (-1)^n\frac{2n+1}{n}x^{2n},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|^2,$$

而

- 当 $|x|<1$ 时, 原级数绝对收敛;
- 当 $x=\pm 1$ 时, 原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n}$ 发散. 因为通项不趋于 0.
- 当 $|x|>1$ 时, 原级数发散.

下面就 $|x|<1$ 求和函数. 实际上,

$$\begin{aligned}
\text{原级数} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n}\\
&= 2\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{-x^2}t^n dt\\
&= \frac{-2x^2}{1+x^2}+\int_0^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n dt\\
&= \frac{-2x^2}{1+x^2}-\ln\left(1+x^2\right).
\end{aligned}$$

2.4 计算线积分 $I=\oint_C\frac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}$, 其中 C 为椭圆 $2x^2+3y^2=1$, 沿逆时针方向.

解答. 用极坐标变换 $x=\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$, 知

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)d\theta}{3\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}+4\frac{\sin^2\theta}{2}}\\
&= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{9\cos^2\theta+8\sin^2\theta}\\
&= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2\theta d\theta}{9+8\tan^2\theta}\\
&= \sqrt{6}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right]\frac{d\tan\theta}{9+8\tan^2\theta}\\
&= \sqrt{6}\cdot\frac{1}{6\sqrt{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right]\frac{d\frac{2\sqrt{2}\tan\theta}{3}}{1+\left(\frac{2\sqrt{2}\tan\theta}{3}\right)^2}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

2.5 求 $\iint_\Sigma xdydz + ydzdz + zdxdy$, 其中 Σ 是 yoz 平面中的曲线 $y = z^2$ 绕 y 轴所生成的旋转曲面在 $0 \le y \le 1$ 的部分的外侧.

解答. • 关于 Σ 的描述很难读吧.

• 回忆 *Gauss* 公式, 对于 光滑区域 Ω,

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

• 于是

$$\begin{aligned}
\text{原曲面积分} &= 3\iint_{x^2+z^2\le y\le 1} dxdydz - \iint_{x^2+z^2=1} dzdx \\
&= 3\int_0^1 \pi ydy + \pi \\
&= \frac{5\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3 叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛到 $f(x)$ 的分析定义, 并用定义证明 $f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

证明. • 函数列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛到 $f(x)$ 的分析定义.

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall\ N > 0,\ \exists\ n > N, \&\ x_n, s.t.\ |f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon_0.$$

• $f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

实际上,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

而

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} > 0.$$

4 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $\phi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$. 证明: $\phi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明. • 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$ 知

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ X>0,\ s.t.\ x\geq X\Rightarrow|f(x)-\phi(x)|<\varepsilon/6;$$

- 而 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,

$$\exists\ \delta_1>0,\ s.t.\ |x-x'|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon/6;$$

- 故有当 $x,x'\geq X,\ |x-x'|<\delta_1$ 时,

$$\begin{aligned}&|\phi(x)-\phi(x')|\\ \leq\ &|\phi(x)-f(x)|+|f(x)-f(x')|+|f(x')-\phi(x')|\\ <\ &\varepsilon/2;\end{aligned}\tag{1}$$

- 现又 ϕ 在 $[a,X]$ 上连续, 而一致连续,

$$\exists\ \delta_2>0,\ s.t.\ \left.\begin{array}{l}a\leq x,x'\leq X\\ |x-x'|<\delta_2\end{array}\right\}\Rightarrow|\phi(x)-\phi(x')|<\varepsilon/2;\tag{2}$$

- 从而我们有结论. 事实上, 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则对 $x,x'\in[a,+\infty),\ x_1<x_2$,

  ▲ 若 $a\leq x<x'\leq X$,

$$(2)\Rightarrow|\phi(x)-\phi(x')|<\varepsilon/2<\varepsilon;$$

  ▲ 若 $a\leq x\leq X<x'$,

$$\begin{aligned}&(1)\ \&\ (2)\\ \Rightarrow\ &|\phi(x)-\phi(x')|\leq|\phi(x)-\phi(X)|+|\phi(X)-\phi(x')|<\varepsilon;\end{aligned}$$

▲ 若 $X < x < x' < \infty$,

$$(1) \Rightarrow |\phi(x) - \phi(x')| < \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

5 设平面 $x+y+z=3$ 截三轴于 A, B, C 三点, O 为坐标原点, $P(x,y,z)$ 是三角形 ABC 上一点, 以 OP 为对角线, 三坐标平面为三面作一长方体, 试求其最大体积.

解答. 以 OP 为对角线, 三坐标平面为三面的长方体体积

$$\begin{aligned} V &= xyz \\ &= xy(3-x-y) \\ &\leq \left[\frac{x+y+(3-x-y)}{3}\right]^3 \\ &= 1, \end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当

$$x = y = z = 1.$$

6 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续可导函数, 记 $f^{-1}(0) = \{x \in [a,b];\ f(x) = 0\}$. 假设 $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, 且对 $x \in f^{-1}(0)$, 成立 $f'(x) \neq 0$. 证明:

6.1 $f^{-1}(0)$ 是有限集;

6.2 $f^{-1}(0)$ 中使 $f'(x) > 0$ 的点的个数与使 $f'(x) < 0$ 的点的个数最多相差 1, 即成立

$$\left|\sum_{x \in f^{-1}(0)} sgn f'(x)\right| \leq 1.$$

证明. 6.1 • **断言** 对 $x \in f^{-1}(0)$, $\exists\ \delta_x > 0$, $s.t.$

$$y \in \{(x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b] \equiv U(x,\delta)\} - \{x\} \Rightarrow f(y) \neq 0. \quad (3)$$

事实上, 由 $f'(x)\neq 0$ 知

$$\exists\ \delta_x>0,\ s.t.\ \xi\in U(x,\delta)\Rightarrow f'(\xi)\neq 0,$$

而

$$f(y)=f(y)-f(x)=f'(\xi_{yx})(y-x)\neq 0.$$

- $f^{-1}(0)$ 是有界闭集.
  有界是显然的, 因为 $f^{-1}(0)\subset[a,b]$.
  闭性亦显然, 因为

$$f^{-1}(0)\ni x\to x\Rightarrow f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

- 这就有结论. 实际上, 由 $Heine-Borel$ 有限覆盖定理,

$$\exists\ \{U(x_i,\delta_i)\}_{i=1}^m,\ s.t.\ f^{-1}(0)\subset\cup_{i=1}^m U(x_i,\delta_i),$$

而

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \cup_{i=1}^m\left[f^{-1}(0)\cap U(x_i,\delta_i)\right] \\ &= \cup_{i=1}^m\{x_i\}\ \ (\text{由 } (3)). \end{aligned}$$

6.2 不妨设 6.1 中构造的 $\{x_i\}$ 单增, 即

$$x_1<x_2<\cdots<x_n.$$

- 断言 $f'(x_i)\cdot f'(x_{i+1})<0,\ i=1,2,\cdots,m-1$.
  事实上, 不妨设 $f'(x_i)<0$, 则因 (x_i,x_{i+1}) 无零点, 而

$$f(x)<0,\ \forall\ x\in(x_i,x_{i+1})$$

(否则由连续函数介值定理立导矛盾). 明显的,

$$0\neq f'(x_{i+1})=f'_-(x_{i+1})=\lim_{x\to x_{i+1}-}\frac{f(x)-f(x_{i+1})}{x-x_{i+1}}\geq 0,$$

而 $f'(x_{i+1})>0$.

- 这样, 我们从第一个零点开始讨论, 知道 $sgnf'(x_i)$ 是交替等于 1 或 -1 的, 而

$$\left|\sum_{x\in f^{-1}(0)} sgnf'(x)\right| \leq 1.$$

7 7.1 解常微分方程 $ydx+(x^2y-x)\,dy=0$.

7.2 已知函数 $y(x)$ 二次可导且满足

$$y(x)=e^{2x}+\int_0^x (x-t)\,y(t)dt,$$

求 $y(x)$.

证明. 7.1

$$\begin{aligned}
& ydx+\left(x^2y-x\right)dy=0\\
\Rightarrow\ & xdy-ydx=x^2ydy\\
\Rightarrow\ & d\frac{y}{x}=d\frac{y^2}{2}\ \ (x\neq 0)\\
\Rightarrow\ & \frac{y}{x}=\frac{y^2}{2}+C\\
\Rightarrow\ & y=x\left(\frac{y^2}{2}+C\right)\ \left(\text{转过头来, } x \text{ 可以为 0 了}\right).
\end{aligned}$$

7.2 • 化 IDE 为 ODE.

$$\begin{aligned}
& y(x)=e^{2x}+\int_0^x (x-t)\,y(t)dt,\ y(0)=1\\
\Rightarrow\ & y'(x)=2e^{2x}+\int_0^x y(t)dt,\ y'(0)=2\\
\Rightarrow\ & y''(x)=4e^{2x}=y(x).
\end{aligned}\tag{4}$$

- 求齐次 ODE 的通解.

$$\begin{aligned}
& y''(x)-y(x)=0\\
\Rightarrow\ & y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}.
\end{aligned}$$

- 求 (4) 一特解.

  容易验证 $\frac{4}{3}e^{2x}$ 是 (4) 之一特解.
- 求原 IDE 的解.

  由上述两步及叠加原理知 (4) 的通解为

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x},$$

其满足初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

于是

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + \frac{4}{3} = 1 \\ c_1 - c_2 + \frac{8}{3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

而原 IDE 的解为

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}.$$