兰州大学2008数分

献给我的爷爷,今天是他八十四岁大寿,祝他老人家一直健康活下去.

May 1st, 2010

1 计算.

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]+\frac{\ln 2}{n}\right\}\\
&= \int_0^1 \ln(1+x)\,dx\\
&= \int_1^2 \ln x dx\\
&= x\ln x - x|_1^2\\
&= 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

解答. 由

$$2k = \frac{(2k-1)+(2k+1)}{2} > \sqrt{(2k-1)(2k+1)},\ \ k=1,2,\cdots,n,$$

知

$$0 < \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

而

$$\text{原式} = 0.$$

1.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left(x^3+3x\right)^{\frac{1}{3}}-\left(x^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{t\to0_+}\frac{(1+3t^2)^{\frac{1}{3}}-(1-2t)^{\frac{1}{2}}}{t}\\
&= \lim_{t\to0_+}\left[\frac{1}{3}\left(1+3t^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6t-\frac{1}{2}\left(1-2t\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)\right]\\
&= 1.
\end{aligned}$$

1.4 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

解答. 由变量替换$x \leftrightsquigarrow \pi-x$知

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx,$$

而

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{1+t^2}dt\\
&= \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

1.5 $\displaystyle\lim_{x\to\infty,y\to a}\left(\cos\frac{y}{x}\right)^{\frac{x^3}{x+y^3}}.$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= Exp\left[\lim_{x\to\infty,y\to a}\frac{x^3}{x+y^3}\ln\cos\frac{y}{x}\right]\\
&= Exp\left[\lim_{x\to\infty,y\to a}\frac{x^3}{x+y^3}\cdot(-2)\cdot\frac{y^2}{x^2}\right]\\
&\quad\left(\ln\cos\frac{y}{x}\sim\cos\frac{y}{x}-1=-2\sin^2\frac{y}{x}\sim-2\frac{y^2}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Exp\left[-2\lim_{x\to\infty,y\to a}\frac{y^2}{1+\frac{y^3}{x}}\right] \\ &= e^{-2a^2} \end{aligned}$$

1.6 $\displaystyle\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中$L$是不过原点的简单闭曲线.

解答. 记

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\ Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0,$$

而由$Green$公式,

- 若0在L的内部,则原式$=0$;
- 若0在L的外部,则取$\varepsilon>0$充分小,使得$B(0,\varepsilon)$也包含在L的内部,而

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{B(0,\varepsilon)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon\cos\theta\cdot(\varepsilon\cos\theta)-\varepsilon\sin\theta\cdot(-\varepsilon\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

2 设$f(0)=0,f'(0)>1$.证明$\exists\ \delta>0,\ s.t.\ x\in(0,\delta)\Rightarrow f(x)\geq x$.

证明. 我们假设f在0的一个左领域$[0,\delta_1]$上二次连续可微,而

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_x)}{2}x^2 \\ &\geq x+[f'(0)-1]\,x+Ax^2 \\ &\quad \left(A=\inf_{x\in[0,\delta_1]}f''(x)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x + [f'(0) - 1 + Ax]\, x \\
&> x,
\end{aligned}
$$

当

$$x < \frac{f'(0)-1}{A} = \delta,$$

时.

注记. 当然,如果只假设f在0的一个左领域$[0,\delta_1]$上连续可微也是可以的.比如

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(\xi_x)x\,\left(\xi_x \in (0,x),\ \text{中值定理}\right) \\
&> x\,(\text{保号性})\,.
\end{aligned}
$$

3 试证明$f(x)=x^{-2}$在$(0,1)$上不一致连续,但对任何$\delta>0$,在 $[\delta,1)$上一致连续.

证明.

- $f(x)=x^{-2}$在$(0,1)$上不一致连续. 因为

$$\left|\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0\,(n\to\infty)\,,$$

但

$$\left|f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{3}{4}n^2 \to \infty\,(n\to\infty)\,.$$

- $f(x)=x^{-2}$在$[\delta,1)$上一致连续,其中$\delta\in(0,1)$任意. 因为

$$|f'(x)| = \left|-2x^{-3}\right| \le 2\delta^{-3} < \infty,$$

而

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x')| &\le 2\delta^{-3}\,|x-x'|\,\left(\text{中值定理}\right) \\
&\to 0\,(|x-x'|\to 0)\,.
\end{aligned}
$$

4 设$0 < \alpha < \beta$,λ为实参数.记

$$f_\lambda(x) = x^\alpha - x^\beta - \lambda.$$

证明存在$\Lambda > 0$,使得对任何$\lambda \in [0, \Lambda)$,都存在$\delta > 0, a > 0$,满足$f_\lambda(a) \geq \delta$.

证明. 其实真是没搞懂这个题目要做什么...

$\exists\ \Lambda = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^\alpha} - \dfrac{1}{2^\beta}\right) > 0,\ \forall\ \lambda \in [0, \Lambda),\ \exists\ a = \dfrac{1}{2},\ \delta = \Lambda,$

$$\begin{aligned} f_\lambda(a) &= 2\Lambda - \lambda \\ &> \Lambda \\ &= \delta. \end{aligned}$$

5 设$p > 0$.讨论级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$的敛散性.

解答. 考察级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^p}$,由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p |x| = |x|.$$

而

- 当$|x| < 1$时,原级数绝对收敛;
- 当$|x| = 1$时,由$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$收敛,及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 发散, & 当 p \leq 1, \\ 收敛, & 当 p > 1, \end{cases}$$

知

▲ 当$x = -1$,$p \leq 1$时,原级数条件收敛;

- ▲ 当$p>1$时,原级数绝对收敛;
- ▲ 当$x=1$,$p\le 1$时,原级数发散;

- 当$|x|>1$时,原级数发散.

6 设$f(x)$在$[a,b]$上有界,记

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\ f^-(x)=\max\{-f(x),0\}.$$

证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是$f^+(x)$,$f^-(x)$在$[a,b]$上均可积,并且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f^+(x)dx+\int_a^b f^-(x)dx.$$

证明. 注意到

$$f(x)=f^+(x)+f^-(x),$$

我们仅须证明等价性. 注意到

- f连续$\Rightarrow f^+=\dfrac{|f|+f}{2},\ f^-=\dfrac{|f|-f}{2}$连续;
- $f^+,\ f^-$连续$\Rightarrow f=f^++f^-$连续;

而

$$f\text{ 的不连续点集是零测集}\Leftrightarrow f^+,f^-\text{ 的不连续点集是零测集},$$

于是 (实变理论)

$$f\text{可积}\Leftrightarrow f^+,\ f^-\text{可积}.$$

注记. 设f是$[a,b]$上有界函数,则f是$Riemann$可积的充分必要条件是:f的不连续点集是零测集.

7 $f(x,y)$对两个变元均连续,且关于其中一个变元单调,则它就是两个变元混合连续的.

证明. 不妨设f关于y单增.对任意固定的(x_0,y_0),

- 由f关于y连续, $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta_1>0,\ s.t.$

$$|y-y_0|\leq\delta_1\Rightarrow|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2; \tag{1}$$

- 由f关于x连续, $\exists\ 0<\delta<\delta_1,\ s.t.$

$$|x-x_0|\leq\delta\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|f(x,y_0+\delta)-f(x_0,y_0+\delta)|<\varepsilon/2,\\|f(x,y_0-\delta)-f(x_0,y_0-\delta)|<\varepsilon/2,\end{array}\right. \tag{2}$$

现对任意的(x,y)满足$|x-x_0|\leq\delta,\ |y-y_0|\leq\delta$, 有

- $$\begin{aligned}f(x,y)&\leq f(x,y_0+\delta)\left(\text{由 } f \text{ 关于 } y\text{单增}\right)\\&\leq f(x_0,y_0+\delta)+\varepsilon/2\left(\text{由 } (2)_1\right)\\&\leq f(x_0,y_0)+\varepsilon\left(\text{由 } (1)\right),\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}f(x,y)&\geq f(x,y_0-\delta)\left(\text{由 } f \text{ 关于 } y\text{单增}\right)\\&\geq f(x_0,y_0-\delta)+\varepsilon/2\left(\text{由 } (2)_2\right)\\&\geq f(x_0,y_0)-\varepsilon\left(\text{由 } (1)\right).\end{aligned}$$

这就证到了结论.

8 设连续函数$f(x)$满足$f(1)=1$,记

$$F(t)=\int_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz.$$

证明:$F'(1)=4\pi$.

证明. • 先化简F,

$$F(t) = 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr,$$

• 再计算,

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2),$$

$$F'(1) = 4\pi f(1) = 4\pi.$$

9 称$f(x)$是凸函数,如果对任意的$\lambda \in (0,1)$,均有

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

9.1 试给出凸函数的几何解释;

9.2 若$f(x)$是区间I上的凸函数,试讨论$f(x)$在I上的连续性;

9.3 若$f(x)$下有界,即存在常数M,使得对任何x,都有$f(x) \geq M$, 问$f(x)$是否有最小值?证明你的结论.

证明. 9.1 联结f图像上两点的直线段总在f图像的上方.

9.2 对$\forall$ $x_1, x_2, x_3 \in I$ 满足 $x_1 < x_2 < x_3$, 记

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1},$$

而$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_3$,

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_3) \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3) \\ &= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3), \end{aligned}$$

即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

于是对任意固定的$x\in I^o$(I的内部),

$$h>k\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}>\frac{f(x+k)-f(x)}{k}>\frac{f(x)-f(x-\delta}{\delta},$$

其中$\delta>0$充分小. 而对$\forall\ h_l\to 0_+$,

$$\left\{\frac{f(x+h_l)-f(x)}{h_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$$

单减有下界,而极限存在.简单的论述可以说明极限与所选取之特殊子列无关, 而$f'_+(x)$存在. 类似的,$f'_-(x)$也存在. 于是f左右连续,而连续.

当I有左或右端点时, f在左端点左连续,或在右端点右连续.

9.3 若I是闭的,则f一定存在最小值. 实际上, 令$m=\inf f(x)$, 则

$$\exists\ x_n\in I,\ s.t.\ m\leq f(x_n)<m+1/n.$$

由$Weierstrass$聚点定理,

$$\exists\ \{n_k\}\subset\{n\},\ s.t.\ x_{n_k}\to x\in I,$$

而

$$m\leq f(x)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\leq\lim_{k\to\infty}(m+1/n_k)=m,$$

即

$$f(x)=m.$$

但是若I不是闭的, 那就未必了. 最简单的例子是$f(x)=x,\ x\in(0,1)$.