兰州大学2006数分

To my parents

1 1.1 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2004^n+2005^n}$

解答. 由

$$2005\leq\sqrt[n]{2004^n+2005^n}\leq 2005\sqrt[n]{2}$$

知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2004^n+2005^n}=2005.$

1.2 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

解答.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=Exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\right]=Exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x\cos^2 x}\right]=e^{-1/2}.$$

1.3 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

解答.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}.$$

1.4 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$的和函数和收敛区域.

解答. 设

$$a_n=\begin{cases}(-1)^k\frac{1}{2k+1}, n=2k+1\\ 0, n=2k\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$$

从而收敛半径为1,又级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

由*Leibniz*判别法知收敛,于是收敛域为$[-1,1]$.

再者,设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,其在$[-1,1]$上一致收敛,而有

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\zeta^{2n}d\zeta\\ &= \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^{2n}d\zeta\\ &= \int_0^x\frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\\ &= \arctan x.\end{aligned}$$

2 设$f(x)$在(a,b)上连续,并且$\lim_{x\to a}f(x),\lim_{x\to b}f(x)$存在.证明:$f(x)$在$(a,b)$上一致连续.

证明. 作

$$F(x)=\begin{cases}\lim_{x\to a}f(x),x=a\\ f(x),x\in(a,b)\\ \lim_{x\to b}f(x),x=b\end{cases}$$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续,而一致连续,更有在(a,b)上一致连续,即$f(x)$在(a,b)上一致连续.

3 若$f(x)$在x_0的领域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上有定义,并且在x_0处的左导数和右导数存在.证明:$f(x)$在x_0处连续.

证明. 由

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0^+}[f(x)-f(0)]=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\
=&\ 0\\
=&\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0^-}[f(x)-f(0)].
\end{aligned}$$

知

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$$

即$f(x)$在x_0处连续.

4 计算曲线积分

$$I=\oint_L\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

其中L为沿椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的逆时针方向.

解答. 取$\varepsilon>0$充分小,使得$x^2+y^2\le\varepsilon^2$包含于$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 由Green公式,知

$$I=\oint_L\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=2\pi.$$

5 设$f(x)$在$(0,1]$上连续,并且

$$\underline{\lim}_{x\to0^+}f(x)=A,\ \overline{\lim}_{x\to0^+}f(x)=B$$

证明:$\forall\xi\in[A,B],\exists x_n\in(0,1),\ s.t.\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=\xi.$

证明. 由题意,

$$\sup_{\delta>0}\inf_{0<x<\delta} f(x) = A \leq \xi \leq B = \inf_{\delta>0}\sup_{0<x<\delta} f(x)$$

即

$$\delta > 0 \Rightarrow \inf_{0<x<\delta} f(x) \leq \xi \leq \sup_{0<x<\delta} f(x)$$

特别取$\delta = 1/n(n = 1, 2, \cdots)$,有

$$0 < y_n, z_n < \frac{1}{n}\ s.t.\ f(y_n) < \xi + \frac{1}{n}, f(z_n) > \xi - \frac{1}{n}$$

我们构造数列$\{x_n\}$如下:

1) $f(y_n) > \xi - \frac{1}{n}$或者$f(z_n) < \xi + \frac{1}{n}$
   取$x_n = y_n$或z_n;
2) $f(y_n) \leq \xi - \frac{1}{n}$且$f(z_n) \geq \xi + \frac{1}{n}$
   此时,
   $$f(y_n) \leq \xi - \frac{1}{n} < \xi + \frac{1}{n} \leq f(z_n)$$
   由连续函数的介值性,
   $$\exists x_n \in (y_n, z_n)\text{或者}(z_n, y_n),\ s.t.\ f(x_n) = \xi$$

于是$\{x_n\}$有性质:

1) $x_n \in (0, 1)$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \xi$.

6 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的函数,满足$\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$,其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $|x| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$. 证明:存在$x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得$f(x_0) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

证明. 由题意,

$$\exists A_1 > 0, |x| > A_1 \Rightarrow |f(x)| > 1$$

而f在有界闭集$\{x||x| \leq |A_1|\}$上连续,有最小值m_1.

1) $m_1 \leq 1$

   m_1就是f之最小值

2) $m_1 > 1$

   存在$n > m_1$,对该n,又由题意,

$$\exists A_n > A_1 > 0 \ s.t. \ |x| > A_n \Rightarrow f(x) > n$$

   同样,f在$\{x||x| \leq |A_n|\}$上有最小值$m_n(\leq m_1)$.我们有m_n是f的最小值.

综上,$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n, \ s.t. \ f(x_0) = m = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

7 设$f_1(x) \in \mathcal{R}[a,b]$,令

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt, n = 1, 2, \cdots$$

证明:$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于零.

证明. 由$f_1(x) \in \mathcal{R}[a,b]$知$f_1$有界,

$$\exists M > 0, \ s.t. \ x \in [a,b] \Rightarrow |f_1(x)| \leq M$$

由

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)|dt \leq \int_a^x \frac{M(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{M(x-a)^n}{n!}$$

及数学归纳法知

$$|f_{n+1}(x)| \leq \frac{M(x-a)^n}{n!} \leq \frac{M(b-a)^n}{n!} \to 0(n \to \infty)$$

从而$f_n \rightrightarrows 0$于$[a,b]$.

8 设$f(x,t)$是带型区域

$$\{(x,t) \mid -\infty < x < \infty, |t-t_0| < \delta\}$$

上的二元连续函数,并且关于x满足$Lipschitz$条件,即存在常数L使得对任意的$t \in (t_0-\delta, t_0+\delta), x, y \in (-\infty, \infty)$有

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x-y|$$

证明:初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

在区间$[t_0-\beta, t_0+\beta]$上有唯一连续的解, 其中$0 < \beta < min\left\{\delta, \dfrac{1}{L}\right\}$

证明. 作$[t_0-\beta, t_0+\beta]$上的函数列

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_{n-1}(\zeta), \zeta) d\zeta (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

则 $f(x_0, t)$作为t的函数在$[t_0-\beta, t_0+\beta]$上连续,有最大值M.

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0, \zeta)| d\zeta \\ &\leq Mt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(x_1, \zeta) - f(x_0, \zeta)| d\zeta \leq L\int_{t_0}^{t} |x_1 - x_0| d\zeta \\ &\leq \frac{ML(t-t_0)^2}{2!}, \end{aligned}$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_2, \zeta) - f(x_1, \zeta)| d\zeta \leq L\int_{t_0}^{t} |x_2 - x_1| d\zeta$$

$$\leq \frac{ML^2(t-t_0)^3}{3!},$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}|f(x_n,\zeta)-f(x_{n-1},\zeta)|d\zeta \leq L\int_{t_0}^{t}|x_n-x_{n-1}|d\zeta \\ &\leq \frac{ML^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n(t)| &\leq \frac{ML^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{ML^n\beta^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq M\beta\frac{(\beta L)^n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n(t))\text{绝对且一致收敛}$$

即有函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛,设$x_n(t)\rightrightarrows x(t)$于$[t_0-\beta,t_0+\beta]$, 则有$x(t)$连续且由$Lipschitz$条件,$f(x_n(t),t)\rightrightarrows f(x(t),t)$ 在

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x_{n-1}(\zeta),\zeta)d\zeta$$

中令$n\to\infty$,有$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\zeta),\zeta)d\zeta$.于是$x(t)$是初值问题的解.