浙大2007数分

To my parents

1 证明:

1.1 $e^x\sin x - x(1+x) = O(x^3),\ x\to 0.$

证明.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2/2+o(x^2))\,(x-x^3/6+o(x^4))-x-x^2}{3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3+o(x^3)}{x^3}\\
=&\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

1.2 $\cos x+\sin x > 1+x-x^2, x\in(0,+\infty).$

证明. 设

$$f(x)=\cos x+\sin x-1-x+x^2,$$

则

$$f'(x)=-\sin x+\cos x-1+2x,\quad f''(x)=-\cos x-\sin x+2>0.$$

从而

$$x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)=-0+1-1+0=0,$$

$$x>0\Rightarrow f(x)>f(0)=1+0-1-0+0=0.$$

1.3 设f是$[-1,1]$上的可积函数,则有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(z)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}f(u)(1-u^2)du.$$

证明.

$$\begin{aligned}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(z)dxdydz &= \int_{-1}^{1}\left(\iint_{x^2+y^2\leq 1-z^2} f(z)dxdy\right)dz\\ &= \int_{-1}^{1} f(z)\left(\iint_{x^2+y^2\leq 1-z^2} dxdy\right)dz\\ &= \pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)dz\\ &= \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du.\end{aligned}$$

2 2.1 叙述数集的上确界及下确界的定义.

解答. 设S是一非空数集,数ξ称为S的上(下)确界,如果

- $s\in S\Rightarrow s\leq(\geq)\xi$,
- $\forall\varepsilon>0,\exists s_\varepsilon\in S,\ \ s.t.\ s_ve>(<)\xi-\varepsilon.$

2.2 设S是一个有上界的数集, 用S_a表示S的一个平移,即 $S_a=\{s+a\mid s\in S\}$, 其中a是一个实数.试证明:

$$supS_a=supS+a.$$

证明. 由于S有上界,由确界原理,$supS$是有定义的. 往证$supS+a$是S_a的上确界:

- $s'=s+a\in S_a\Rightarrow s'\leq supS+a,$
- $\forall\varepsilon>0,\exists s_\varepsilon\in S,\ \ s.t.\ s_\varepsilon>supS-\varepsilon,$从而对 $s'=s+a\in S_a,$有

$$s'>(supS+a)-\varepsilon.$$

2.3 确定数集

$$S=\left\{(-1)^n\frac{3n^2-1}{2n^2}\mid n=1,2,3,\cdots\right\}$$

的上确界和下确界.

解答. 数集S的上确界是$\frac{3}{2}$,这是因为

- $$(-1)^n\frac{3n^2-1}{2n^2}\leq\frac{3n^2-1}{2n^2}\leq\frac{3}{2},$$
- 对$\forall\varepsilon>0$,由于
$$\lim_{k\to\infty}(-1)^{2k}\frac{3(2k)^2-1}{2(2k)^2}=\frac{3}{2},$$
从而
$$\exists N>0,\ s.t.\ n\geq N\Rightarrow(-1)^{2k}\frac{3(2k)^2-1}{2(2k)^2}>\frac{3}{2}-\varepsilon.$$

对于下确界是$-\frac{3}{2}$的证明类似.

3 *Dirichlet*函数
$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$
试分别用

3.1 极限定义,

3.2 *Cauchy*收敛准则,

证明当$x\to1$时,$D(x)$的极限不存在.

证明.

- 用极限定义证:
$$\begin{aligned}&\exists\ \varepsilon_0>0,\forall\ \delta>0,\exists\ u\in\mathbb{Q}^c\cap U(1,\delta),\\ &s.t.\ |D(u)-D(1)|=|0-1|=1\geq\varepsilon_0.\end{aligned}$$
- *Cauchy*收敛准则证:
$$\begin{aligned}&\exists\ \varepsilon_0>0,\forall\ \delta>0,\exists\ r\in\mathbb{Q}\cap U(1,\delta),u\in\mathbb{Q}^c\cap U(1,\delta),\\ &s.t.\ |D(r)-D(u)|=|1-0|=1\geq\varepsilon_0.\end{aligned}$$

注记. 当然你也可以利用*Heine*归结原理证明.

4 4.1 设函数列$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$在区间I上分别一致收敛于$f(x)$与$g(x)$,且假定$f(x),g(x)$都在I上有界.试证明:

$$f_n(x)\cdot g_n(x)\rightrightarrows f(x)\cdot g(x)(\text{在}I\text{上})$$

证明. 由题意,

- $\exists M>0,\ s.t.\ x\in M\Rightarrow |f(x)|\leq M,|g(x)|\leq M$
- $\forall\varepsilon>0,$

$$\exists\delta_1>0,\ s.t.\ x',x''\in I,|x'-x''|<\delta_1\Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\tfrac{\varepsilon}{2M},$$
$$\exists\delta_2>0,\ s.t.\ x',x''\in I,|x'-x''|<\delta_2\Rightarrow |g(x')-g(x'')|<\tfrac{\varepsilon}{2M}.$$

取$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}>0$,则当$x',x''\in I,|x'-x''|<\delta$时,

$$\begin{aligned}
&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\
=\ &|f(x')g(x')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')|\\
\leq\ &|f(x')|\cdot|g(x')-g(x'')|+|g(x'')|\cdot|f(x')-f(x'')|\\
<\ &M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}\\
=\ &\varepsilon.
\end{aligned}$$

4.2 如果只给出条件$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$分别一致收敛于$f(x)$与$g(x)$,能否保证有$\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$一致收敛于$f(x)\cdot g(x)$?请说明理由.

证明. 不能保证.例子如下: 设$f_n(x)=g_n(x)=x+\frac{1}{n},f(x)=g(x)=x,x\in\mathbb{R}$, 则有

- $\{f_n(x)\},sedg_n(x)$一致收敛.

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1>0,\ s.t.\ |f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

- $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$不一致收敛.

  $$\exists\varepsilon_0=\tfrac{1}{2},\forall N>0,\exists n_0=N^2>N,x_0=N^2,$$
  $$s.t.\ |f_{n_0}(x_0)g_{n_0}(x_0)-f(x)g(x)|>\tfrac{N}{2}\geq\tfrac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

5 $f(x)$在$[a,b]$上可积,并且在$x=b$处连续.证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^nf(x)dx=f(b).$$

证明. 由于f可积,从而有界,

$$\exists M>0,\ s.t.\ x\in[a,b]\Rightarrow|f(x)|\leq M.$$

又f在$x=b$处连续,

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,b-a),\ s.t.\ x\in[b-\delta,b]\Rightarrow|f(x)-f(b)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到

$$\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^ndx=1,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^nf(x)dx-f(b)\right|\\
=&\left|\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n[f(x)-f(b)]dx\right|\\
\leq&\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^{b-\delta}(x-a)^n|f(x)-f(b)|dx\\
&+\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_{b-\delta}^b(x-a)^n|f(x)-f(b)|dx\\
\leq&2M\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^{b-\delta}(x-a)^ndx\\
&+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{(b-a-\delta)^{n+1}}{(b-a)^n}\right)\\
\leq&2M\left(1-\frac{\delta}{b-a}\right)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

由于对该固定的δ,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\delta}{b-a}\right)^{n+1}=0,$$

从而

$$\exists N>0,\ s.t.\ n\geq N\Rightarrow\left(1-\frac{\delta}{b-a}\right)^{n+1}<\frac{\varepsilon}{4M}$$

即有

$$\left|\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^nf(x)dx-f(b)\right|<2M\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

6 设

$$a_1>0,a_{n+1}=1+\frac{3a_n}{4+a_n},n=1,2,3,\cdots$$

证明:数列$\{a_n\}$有极限,并求其值.

证明. 作函数

$$f(x)=1+\frac{3x}{4+x}=4-\frac{12}{x+4},$$

则

$$f'(x)=\frac{12}{(x+4)^2}\in\left(0,\frac{3}{4}\right)\quad(\forall x\in(0,+\infty))$$

于是

$$|a_{n+1}-a_n|=|f(a_n)-f(a_{n-1})|<\frac{3}{4}|a_n-a_{n-1}|<\cdots<\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|a_2-a_1|$$

从而

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_{n+1}| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|\\ &< |a_2-a_1|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\\ &< |a_2-a_1|4\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

便有$\{a_n\}$是$Cauchy$列, 设收敛于a.在迭代表达式中令$n\to\infty$,有$a=2$.

7 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(1+n)}x^n,$$

证明:

7.1 $f(x)$在$[-1,1]$上连续,

7.2 $f(x)$在$x=-1$处可导,

7.3 $\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=+\infty$,

7.4 $f(x)$在$x=1$处不可导.

证明. • 设

$$a_n=\frac{1}{n^2\ln(1+n)}$$

则收敛半径

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|/|a_n|}=1.$$

而对

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(1+n)}$$

有

$$\frac{1}{n^2\ln(1+n)}\leq\frac{1}{n^2}\ (n\geq 2)$$

从而收敛; 对

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln(1+n)}$$

由*Leibniz*判别法知收敛. 于是有$f(x)$在$[-1,1]$上连续.

• 若$x\in(-1,1)$,有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(1+n)}$$

收敛,从而

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(1+n)}$$

- 先证明一个引理:

引理. 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为R,且$a_n\geq 0$,则有

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n.$$

对于$R=0$,不用证明. 对于$R>0$,由于数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}a_kR^k\right\}$ 是递增的.若

★ 其有上界,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n$ 收敛,从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$x=R$处左连续,有之.

★ 其无上界,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n=+\infty$, 于是

$$\forall\ M>0,\exists\ N>0,\ s.t.\ \sum_{n=1}^{N}a_nR^n>M+1$$

且由

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^{N}a_n(R^n-x^n)=0$$

知

$$\exists\delta>0,\ s.t.\ x\in[R-\delta,R)\Rightarrow\sum_{n=1}^{N}a_n(R^n-x^n)<1$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &\geq \sum_{n=1}^{N} a_n x^n \\ &= -\sum_{n=1}^{N} a_n (R^n - x^n) + \sum_{n=1}^{N} a_n R^n \\ &> M + 1 - \sum_{n=1}^{N} a_n (R^n - x^n) \\ &> M\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$$

现回过头来证明题目.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+n)}$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散(用比较和积分判别法), 且其部分和递增,有其等于$+\infty$.

- 由

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} f'(\xi_x) = +\infty \ (x \leq \xi_x \leq 1)$$

从而得证.