兰州大学2009数分

献给江西兴国的两三万英烈们....没有他们, 也许就没有我

May 2nd, 2010

1 计算.

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}tdt}{\int_0^x t(t-\sin t)\,dt}$..

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin^{\frac{3}{2}}x^2}{x(x-\sin x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x\cdot\frac{x^3}{6}}\\ &= 12.\end{aligned}$$

1.2 $\int \arctan\sqrt{x}dx$..

解答.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx\\ &= x\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x}dx\\ &= x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{y}{1+y^2}\cdot ydy\ (y=\sqrt{x})\\ &= x\arctan\sqrt{x}-y+\arctan y+C\\ &= (x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

1.3 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x\frac{1}{y}e^{-x}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2\frac{1}{y}e^{-x}dy.$

解答.

$$\text{原式} = \int_1^2 dy\int_y^{y^2}\frac{1}{y}e^{-x}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 (y-1)\, e^{-y} dy \\
&= -ye^{-y}\Big|_1^2 \\
&= -2e^{-2} + e^{-1}.
\end{aligned}
$$

1.4 求抛物线$y^2 = 4x$与它在$(1,2)$处的法线所围成的有限区域的面积.

解答. 在$(1,2)$处,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

而法线方程为

$$y - 2 = -(x-1),\ x = 3 - y,$$

其与抛物线交于

$$(1,2),\ (9,-6).$$

于是所求面积

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx \\
&= \int_{-6}^{2} \left(3 - y - \frac{y^2}{4}\right) dy \\
&= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right)\Big|_{-6}^{2} \\
&= 3 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot (-32) - \frac{1}{12} \cdot 224 \\
&= 24 + 16 - \frac{56}{3} \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}
$$

1.5 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{n}$的收敛域与和函数.

解答. • 回忆对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

若

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

则(1)收敛.

实际上,

$$\begin{aligned}
& 1 > \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \inf_k \sup_{n\geq k}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
\Rightarrow\ & \text{对 } 1 > r > 0,\ \exists\ N_r > 0,\ s.t.\ k \geq N_r \rightsquigarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r \\
\Rightarrow\ & |a_n| \leq r\,|a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N_r}\,|a_{N_r}| \\
\Rightarrow\ & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 有优级数 } a_1 + \cdots + a_{N_r-1} + |a_{N_r}| \sum_{n=N_r}^{\infty} r^{n-N_r} \\
\Rightarrow\ & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}
\end{aligned}$$

• 现求收敛域.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{|x|^{2n-1}} = |x|^2,$$

而

▲ 当$|x| < 1$时, 原幂级数绝对收敛;

▲ 当$x = -1$时, 原幂级数$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 为条件收敛;

▲ 当$x = 1$时, 原幂级数$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 亦为条件收敛;

▲ 当$|x| > 1$时, 原幂级数发散.

- 再求和函数.

$$\begin{aligned}
\text{原幂级数} &= \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n} \\
&= \frac{-2}{x}\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{2n-1}\right]dt \\
&= \frac{-2}{x}\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-t^2\right)^n dt \\
&= \frac{-2}{x}s\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{1+t^2}dt \\
&= \frac{-1}{x}\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt \\
&= -\frac{1}{x}\ln\left(1+t^2\right)|_0^x \\
&= -\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}.
\end{aligned}$$

注记. 当$x=0$时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

1.6 计算曲面积分$\int_L\left(e^x\sin y-b\left(x-y\right)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$,其中$L$是从$(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$(0,0)$的一段.

解答. • 曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$, 即

$$x^2-2ax+y^2=0,\ \ y\geq 0,$$

$$(x-a)^2+y^2=a^2,\ \ y\geq 0.$$

- 记

$$P=e^x\sin y-b\left(x-y\right),\ \ Q=e^x\cos y-ax,$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-b,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-a,$$

而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=b-a.$$

- 由Green公式,

$$\begin{aligned}
\text{原曲线积分} &= \iint_{\substack{(x-a)^2+y^2\le a^2\\ y\ge 0}}(b-a)\,dxdy-\int_0^{2a}(-bx)\,dx\\
&= (b-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi a^2+b\cdot\frac{1}{2}\cdot(2a)^2\\
&= \frac{(\pi+4)\,a^2b-\pi a^3}{2}.
\end{aligned}$$

2 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证明. - 由于区间

$$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right],\ k=0,1,2,\cdots$$

长度为$\dfrac{\pi}{2}>1$, 而存在整数

$$n_k\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right];$$

- 同理, 存在整数

$$m_k\in\left[2k\pi+\frac{5\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right];$$

- 于是若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$ 存在, 则

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right]\ni\lim_{k\to\infty}\sin n_k=a=\lim_{k\to\infty}\sin m_k\in\left[-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

矛盾!

3 设函数$f:[a,b]\to[a,b]$满足$|f(x)-f(y)|\le L\,|x-y|^{\alpha}$, 其中$L$, α为正常数. 证明:

3.1 当$\alpha>1$时, $f(x)$恒为常数;

3.2 当$L<1$, $\alpha=1$时, 存在唯一的$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\xi$.

证明. 3.1 当$\alpha>1$时, 由

$$0\le\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\le L\,|y-x|^{\alpha-1}\to 0,\ (y\to x),$$

知

$$f'(x)=0,\ \forall\ x\in[a,b]$$

(这里左端点左导数, 右端点右导数), 于是f 恒为常数.

3.2 当$L<1$, $\alpha=1$时, 任取$\xi_0\in[a,b]$, 做数列

$$\xi_n=f(\xi_{n-1}),\ n\ge 1. \tag{2}$$

由

$$|\xi_n-\xi_{n-1}|\le L\,|\xi_{n-1}-\xi_{n-2}|,$$

知$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$是压缩数列, 而极限存在, 设为ξ. 于(2)中令$n\to\infty$, 利用f之连续性, 有

$$\xi=f(()\,\xi).$$

下证唯一性. 设η也满足$\eta=f(\eta)$, 则

$$|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|<L\,|\xi-\eta|,$$

而$\xi=\eta$.

4 证明: 有界函数$f(x)$在区间I上一致连续的充分必要条件是对任给的$\varepsilon>0$和 $x,y\in I$, 总存在正数M, 使得当$\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>M$时就有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

证明. • 这一题目大概是说f一致连续等价于f在大范围内不能抖动得太厉害 (否则太伤身体了).

• 原题目没有对f加**有界**条件. 一个简单的例子$f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$说明有界是必须的.

• 必要性.
用反证法. 若结论不成立, 则$\exists\ \varepsilon_0>0,\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \exists\ \{x_n\},\ \{y_n\},\ s.t.$

$$\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|>n,\ |f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon_0.$$

即有

$$|x_n-y_n|<\frac{2K}{n},\ \left(K=\sup_{x\in I}|f(x)|\right),$$

这与f一致连续矛盾.

• 充分性.
同样是用反证法. 若结论不成立, 则$\exists\ \varepsilon_0>0,\ \{x_n\},\ \{y_n\},\ s.t.$

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n},\ |f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon_0,$$

即有

$$\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|>n\varepsilon_0.$$

由假设, 对$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$, 只需$n$充分大, 就有

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

矛盾!

5 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是连续映射, 若对$\mathbb{R}^2$中任何有界闭集$K$, $f^{-1}(K)$均是有界的, 证明$f(\mathbb{R}^2)$是闭集.

证明. • 古怪得很.

- 用反证法. 若 $f(\mathbb{R}^2)$ 不是闭集, 则

$$\exists\ \{x_n\}\subset\mathbb{R}^2,\ s.t.\ f(x_n)\to y\notin f\left(\mathbb{R}^2\right).$$

而集合

$$A=\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\cup\{y\}$$

作为$\mathbb{R}^2$中的有界闭集 (有界是因为极限存在, 而闭性是由于极限唯一), 其原像 $f^{-1}(A)$ 是有界的. 现因

$$x_n\in f^{-1}(A),$$

及 $Weierstrass$ 聚点定理,

$$\exists\ \{n_k\}\subset\{n\},\ s.t.\ x_{n_k}\to x.$$

由 f 之连续性,

$$\lim_{k\to\infty}f\left(x_{n_k}\right)=f(x)=y\in f\left(\mathbb{R}^2\right),$$

矛盾!

6 证明二元函数 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 在点 $(0,0)$ 处连续, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在, 但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

证明.

- $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

事实上, $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta=\varepsilon>0,\ s.t.$

$$\left.\begin{array}{l}0<x<\delta\\0<y<\delta\end{array}\right\}\Rightarrow|f(x,y)-f(0,0)|=\sqrt{xy}<\varepsilon.$$

- $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在.

由

$$x>0\Rightarrow\left|\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\right|=0=\left|\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\right|,$$

知

$$f_x(0,0)=0=f_y(0,0).$$

- $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

  这是因为

$$\frac{1}{n}\to 0$$
$$\Rightarrow \left|\frac{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)-f(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2}\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \nrightarrow 0.$$

7 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$, 证明:

7.1 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可导, 且一致连续;

7.2 反常积分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ 发散.

证明.

- $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可导, 且一致连续.

  记
$$u_n=\frac{1}{2^n+x},$$
  则
$$u_n'=-\frac{1}{(2^n+x)^2},$$
  而(表递进)

  - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,
  - u_n' 连续,
  - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 一致收敛,

  由逐项求导,
$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^n+x)^2},\ \forall\ x\ge 0.$$

又

$$|f'(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

知 f 一致连续.

- 反常积分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ 发散.

  事实上, 由

$$\begin{aligned}
\left|\int_{2^{k-1}}^{2^k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+x} dx\right| &\geq \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{2^k+x} dx \\
&\geq \frac{2 \cdot 2^{k-1}}{2 \cdot 2^k} \\
&= \frac{1}{2} > 0, \ \forall\ k \geq 1,
\end{aligned}$$

  及 $Cauchy$ 收敛准则, 知所讨论之反常积分确实反常, 的确发散.