(一) 绝热定理与 Berry phase

含时系统 $i\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = h(R)|\psi(t)\rangle$ ① R是t的函数.

$h(R)|n;R\rangle = E_n(R)|n;R\rangle$ ②

$\langle m;R|n;R\rangle = \delta_{mn}$ ③

绝热定理 $\psi(t) \overset{\text{绝热}}{=} C_n(t)|n;R\rangle$ ④

绝热定理的含义：①系统开始处于某一本征态，那么系统将一直处于这个本征态，不会发生能级之间的跃迁. $\psi(t)$ 与 $|n;R\rangle$ 之间的差别为一模为一的复数.

② 定态概念在含时系统的一种推广.

将④代入① 如何确定 $C_n(t)$

$$i\left[\left(\frac{d}{dt}C_n(t)\right)|n;R\rangle + C_n(t)\frac{d|n;R\rangle}{dt}\right]$$

$$= h(R)C_n(t)|n;R\rangle \quad ⑤$$

利用②③得

$$i\frac{dC_n(t)}{dt} + iC_n(t)\langle n;R|\frac{d}{dt}|n;R\rangle = C_n(t)E_n(R)$$

$$\frac{dC_n(t)}{dt} = -C_n(t)\langle n;R|\frac{d}{dt}|n;R\rangle - iC_n(t)E_n(R)$$

找到 $C_n(t)$ 的微分方程

$$\frac{dC_n(t)}{C_n(t)} = -\langle n;R|\frac{d}{dt}|n;R\rangle dt - iE_n(R)dt \quad ⑥$$

$$\psi_n(t) = \exp(i\gamma_n(t))\exp(i\delta_n(t))\,|n;R\rangle$$

$$\gamma_n(t) = \int_0^t i\langle n;R|\frac{d}{dt'}|n;R\rangle\, dt'$$

$$\delta_n(t) = -\int_0^t E_n(R)\, dt'$$

$R(t) = R(t+T)$ R为t的周期函数

$$\gamma_n(T) = \int_0^T i\langle n;R|\frac{d}{dt'}|n;R\rangle\, dt'$$ Berry 相

$$\gamma_n(T) = \int_0^T i\langle n;R|\,d\,|n;R\rangle = \cancel{\oint_C}$$

令 $A^n = i\langle n;R|\,d\,|n;R\rangle$

$$\gamma_n(T) = \int_0^T A^n = \oint_C A^n$$

$\gamma_n(T)$ 叫 Berry phase

~~A^n 叫 联络~~

(二) connection

$$\psi(t) = e^{i\delta_n(t)}\tilde{\psi}(t)$$

其中 $\delta_n(t) = -\int_0^t E_n(t')dt'$

将上式代入 schrödinger eq.

$$i\frac{d\psi(t)}{dt} = h(R)\psi(t)$$

$$i\left[e^{i\delta_n(t)}(-i)E_n(t)\tilde{\psi}(t) + e^{i\delta_n(t)}\frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt}\right] = h(R)e^{i\delta_n(t)}\tilde{\psi}(t)$$

扔掉指数

$$E_n(t)\tilde{\psi}(t) + i\frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} = h(R)\tilde{\psi}(t)$$

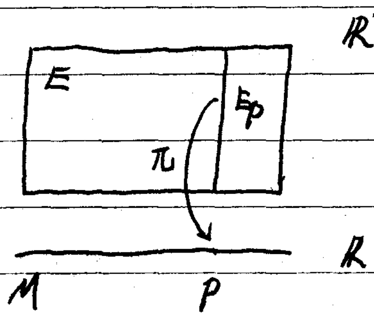
$$i\frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} = (h(R) - E_n(t))\tilde{\psi}(t)$$

$$i\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = (h(R) - E_n(t))|\tilde{\psi}(t)\rangle$$
$$= (h(R) - E_n(t))\,e^{i\gamma_n(t)}|n(R)\rangle = 0$$

$$i\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = \langle\tilde{\psi}(t)|\,h(R) - E_n(t)\,|\tilde{\psi}(t)\rangle$$
$$= 0$$

数学当中联络的概念

纤维丛



~~$\pi: E \to M$~~

三部分构成：①丛流形E ②底流形M

③投影映射 $\pi: E \to M$ $E_p = \{q \in E \mid \pi(q) = p\}$ 纤维

纤维丛应用到本问题中 $E = \bigcup_{p \in M} E_p$

$\mathcal{L}_R^n = \{\psi \in \mathcal{H} \mid |\psi\rangle = c|n;R\rangle,\ c \in \mathbb{C}\}$ $R \in M$

参数R构成底流形 绝热定理

主丛 我们仅举例说明

$\lambda_R^n = \{\psi \in \mathcal{H} \mid |\psi\rangle = e^{i\alpha}|n;R\rangle,\ \alpha \in [0, 2\pi)\} \simeq U(1)$

参数R构成底流形

△ 主丛中的联络

数学中重要的思想就是分类

联络的一个重要意义就是把丛空间的切空间进行分类.

$$T_pE \simeq V_pE \oplus H_pE \quad \text{for all } p \in E$$

~~我们刚才得出~~给定一个联络,就有唯一的分类方式.

例如α_1 我们把R^3看成一个丛流形,可以任意选择一点的垂直空间和水平空间.但给定一个联络之后,

垂直空间和水平空间就唯一确定了. ex2 ~~$\langle n|h\rangle = 0$~~ $e^{i\alpha}|n\rangle$ 垂直空间 $\langle n|h\rangle=0$ $|h\rangle$ 构成水平空间

△ 曲线的水平提升

$\pi(\alpha^{\uparrow}(t)) = \alpha(t)$,其中$\alpha(t)$为底流形中的曲线,

则$\alpha^{\uparrow}(t)$为$\alpha(t)$的水平提升曲线

或者 $\mathrm{ver}[\alpha^{\uparrow}]=0$, 水平提升的切矢都在水平空间里

△ 定理: ~~$p\in E$~~, 对于任意给定的联络,有且只有一条过$p\in E$的水平提升曲线使得$\pi(\alpha^{\uparrow}(t)) = \alpha(t)$

$$\langle \tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = 0$$

我们知道此式即为联络,把$\mathcal{H}_R$分成垂直空间$e^{i\alpha}|n\rangle$和水平空间$\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle$

由于$|\tilde{\psi}(t)\rangle$的切矢$\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle$在垂直空间分量为0,

故$|\tilde{\psi}(t)\rangle$即为水平提升曲线. $\langle\tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle=0$ 用一个量来表达联络

$$\langle n(R)|e^{-i\int_0^t A(t')}\frac{d}{dt}|e^{i\int_0^t A(t')}|n(R)\rangle = 0$$

略. $\langle n(R)| e^{-i\int_0^t A(t')} \frac{d}{dt}\left(e^{i\int_0^t A(t')} |n(R)\rangle \right)$

$= \langle n(R)| e^{-i\int_0^t A(t')} e^{i\int_0^t A(t')} i\frac{A(t)}{dt} |n(R)\rangle$

$+ \langle n(R)| \frac{d}{dt} |n(R)\rangle$

$= 0$

$iA(t) = - \langle n(R)| \frac{d}{dt} |n(R)\rangle$

$A(t) = i \langle n(R)| d |n(R)\rangle$

我们这里从纤维丛中的联络中得到了
Berry 从量子力学中得到的量

(三) 平行移动

在底流形上有一个曲线 $\alpha: [a,b] \to M$。
沿着曲线 α 的平行移动就是一个映射
$\tau: \pi^{-1}(\{\alpha(a)\}) \to \pi^{-1}(\{\alpha(b)\})$，这个映射
~~要对~~ 的激则就是 α 对应的水平提升曲线

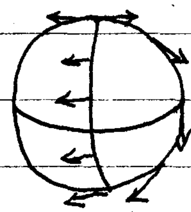
ex

$$\alpha: [0,t] \to R$$

$$\alpha^{\uparrow} \quad e^{i\gamma_n(t)} \cancel{|n(R)\rangle} \, |\tilde{\psi}\rangle$$

使得 Hilbert 空间的矢量 $|n(R)\rangle$ 变为 $e^{i\gamma_n(t)}|n(R)\rangle$

(四) holonomy



Hilbert 空间矢量沿着闭曲线一周
$|n(R)\rangle$ 变为 $e^{i\gamma_n(T)}|n(R)\rangle$
~~$\gamma_n(T)$~~ 这两个矢量的差别就叫 holonomy
即 $e^{i\gamma_n(T)}$

$$\gamma_n(T) = \int_0^T i\langle n(R)|\frac{d}{dt}|n(R)\rangle dt$$

$$= \oint i\langle n(R)|\, d\,|n(R)\rangle$$

可以看到 Berry phase 就对应微分几何中的 holonomy.