南开大学2004数学分析

To my parents

1. 设 $f(x)$ 在点 a 的一个领域内有定义, $f(a) \neq 0$, $f'(a) = 0$. 求 $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解答.

$$\text{原极限} = \lim_{x\to a} Exp\left\{\frac{\ln\frac{f(x)}{f(a)}}{x-a}\right\} = Exp\left\{\lim_{x\to a}\frac{f(a)}{f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f(a)}\right\} = 1.$$

■

2. 设 $f(u,v)$ 的所有二阶偏导数都连续, $z = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解答.

$$z_y = f_v\cdot x + f_q\cdot\frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \left(f_{uu}\cdot y + f_{uv}\cdot\frac{-y}{x^2}\right)\cdot x + f_u \\ &\quad + \left(f_{vu}\cdot y + f_{vv}\cdot\frac{-y}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x} + f_v\cdot\frac{-1}{x^2} \\ &= f_u - \frac{1}{x^2}f_v + xyf_{uu} - \frac{y}{x^3}f_{vv}. \end{aligned}$$

■

3. 证明不等式 $2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 + \frac{1}{1+x}$, $x > 0$.

证明.

$$\begin{aligned} & \ln(1+s) < s,\ s>0 \\ \Rightarrow\ & (1+t)\ln(1+t) - t < \frac{t^2}{2},\ t>0\ (\textit{Integrating over } [0,t]) \\ \Rightarrow\ & \frac{2\ln(1+t)}{t} < 1 + \frac{1}{1+t},\ t>0 \\ \Rightarrow\ & 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 + \frac{x}{1+x},\ x>0\ \left(x = \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

■

4. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)$.

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原积分} &= \int_0^1 r^5\ln r^2 dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta\\
&= \left[-\frac{1}{3}\int_0^1 r^5 dr\right]\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot 2\pi\right]\\
&\quad \left(\textit{Integrating by parts and } \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\vartheta}{2}\right)\\
&= -\frac{\pi}{72}.
\end{aligned}
$$

■

5. 计算第二型线积分 $\displaystyle\int_L (x^2-y^2)dx-2xydy$, 其中 L 是从 $A(0,1)$ 沿 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 到 $B(\pi,0)$ 的一段曲线.

解答.

$$
\begin{aligned}
\text{原积分} &= \left[\int_{(0,1)\to(\pi,1)}+\int_{(\pi,1)\to(\pi,0)}\right](x^2-y^2)dx-2xydy\\
&= \int_0^\pi (x^2-1)dx+\left[-\int_0^1 -2\pi y dy\right]\\
&= \left[\frac{\pi^3}{3}-\pi\right]+\pi=\frac{\pi^3}{3}.
\end{aligned}
$$

■

6. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha}$ 在 $\alpha>0$ 时收敛; 在 $\alpha\le 0$ 时发散.

证明. 由

$$
\frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha}=\frac{e^{\ln n/n}-1}{n^\alpha}\sim\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}},\ n\to\infty
$$

即有结论. 因为

$$
\alpha>0\Rightarrow\frac{\ln n/n^{1+\alpha}}{1/n^{1+\beta}}=\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}}\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\, 0<\beta<\alpha;
$$

$$
\alpha\le 0\Rightarrow\frac{\ln n/n^{1+\alpha}}{1/n^{1-\alpha}}=\ln n\to\infty,\ n\to\infty.
$$

■

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上可微且有界. 证明存在一个数列 $\{x_n\}\subset[0,\infty)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=0$.

证明. 由 Lagrange 中值定理, $\exists\, x_n\in(2^n,2^{n+1})$, s.t.s

$$|f(x_n)|=\left|\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{2^n}\right|\leq\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sup_{[0,\infty)}|f|\to 0,\ n\to\infty.$$

■

8. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数序列, 且存在常数 $M>0$ 使得对任何 $n\in\boldsymbol{N}$ 和 $x\in[a,b]$, 有 $|f_n(x)|\leq M$.

(a) 证明对任何 $n\in\boldsymbol{N}$, $F_n(x)=\min\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(b) 举一个例子使 $F(x)=\inf\limits_{n\in\boldsymbol{N}}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续.

(c) 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明 $F_n\rightrightarrows F$ 于 $[a,b]$.

证明. (a) 由数学归纳法, 只需证对连续的 f,g, 有 $\min\{f,g\}$ 连续, 而这是明显的:

$$\min\{f,g\}=\frac{-|f-g|+(f+g)}{2}.$$

(b) 不妨取 $[a,b]=[-1,1]$,

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,-1/n],\\ nx, & x\in(-1/n,1/n),\\ 1, & x\in[1/n,1].\end{cases}$$

则

$$F(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ x, & x\geq 0.\end{cases}$$

此 F 在 0 处跳跃间断.

(c) 对任意固定的 $\varepsilon>0$, 记

$$E_n(\varepsilon)=\{x\in[a,b];\ |F_n(x)-F(x)|<\varepsilon\},$$

则

i. 由 F 连续知 $E_n(\varepsilon)$ 是相对于 $[a,b]$ 的开集;

ii. 由 F_n 递减知 $E_n(\varepsilon)$ 关于 n 单增;

iii. 由 $F_n \to F$ 知 $[a,b] \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

于是有限覆盖定理蕴含 $[a,b] \subset E_n$, 对某个 n. 证毕.

■

注记. *(a)* (8b) 其实可以举个更简单的例子: $f_n(x) = x^n$ 与 $[0,1]$ 上.

(b) (8c)可参考 *Dini* 定理.

■

9. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义且对任何 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 和任何 $\lambda \in [0,1]$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

(a) 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内出处有右导数 $f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 且 $f'_+(x)$ 是 (a,b) 上的单增函数.

(b) $f'_+(x)$ 在 (a,b) 内之多只有可数个间断点.

证明. *(a)* 由题意, f 是凸函数, 而对 $x < x + \Delta x < x + \Delta x' < y < y + \Delta y$, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &\leq \frac{f(x+\Delta x') - f(x)}{\Delta x'} \\ &\leq \frac{f(y) - f(x+\Delta x')}{y - (x+\Delta x')} \leq \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}, \end{aligned}$$

于是 $f'_+(x)$ 存在且单增.

(b) 由

$$\begin{array}{ll} & x_0 \text{ 是 } f'_+ \text{ 的间断点} \\ \Rightarrow & x_0 \text{ 对应于一有限开区间 } (f'_+(x_0 - 0), f'_+(x_0 + 0)), \\ & \text{且这些开区间互不相交, 可一一对应与有理数集 } \boldsymbol{Q} \text{ 的一子集,} \end{array}$$

即有结论.

■