南开大学2005数学分析

To my parents

1. 计算二重积分 $I = \iint_D x^2 y dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\}$.

解答.

$$I = 0.$$

■

2. 设 $u = u(x)$ 为由方程组 $\begin{cases} u = f(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数, 求 $\frac{du}{dx}$.

解答. 由 $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 知

$$\begin{cases} g_x + g_y y_x + g_z z_x = 0 \\ h_x + h_y y_x + h_z z_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_x = \dfrac{-g_x h_z + g_z h_x}{g_y h_z - g_z h_y} \\ z_x = \dfrac{-g_y h_x + g_x h_y}{g_y h_z - g_z h_y} \end{cases}.$$

于是再由 $u = f(x, y, z)$ 知

$$\begin{aligned} u_x &= f_x + f_y y_x + f_z z_x \\ &= f_x + f_y \frac{-g_x h_z + g_z h_x}{g_y h_z - g_z h_y} + f_z \frac{-g_y h_x + g_x h_y}{g_y h_z - g_z h_y}. \end{aligned}$$

■

3. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right)$.

解答.

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - (i/n)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos\vartheta} \cdot (2\cos\vartheta d\vartheta) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

■

4. 求证 $f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}dt$ 在 $(0,\infty)$ 上连续.

证明. 对任何 $X>0$, 由积分第二中值定理推导的广义积分一致收敛判别法蕴含 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}dt$ 在 $[X,\infty)$ 上一致收敛, 而 f 在 $[X,\infty)$ 上连续. 由 X 的任意性, 而有结论. ∎

5. 判断级数 $\sum_{n=1}^\infty e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ 的敛散性.

解答. 由

$$\begin{aligned}\left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right| &= \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\right| \ (0<\xi<1)\\ &\leq \frac{e}{(n+1)!}\end{aligned}$$

知原级数绝对收敛. ∎

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=0$.

(a) 求证 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

(b) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)$. 求证 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续可导.

证明. (a) 由

$$\left|\frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)\right|=\left|\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right]\right|=\left|\frac{x}{n^2}f'\left(\frac{\xi_x}{n}\right)\right|\leq \frac{1}{n!}\cdot\max_{[-1,1]}|f'|$$

即有结论.

(b) 由

$$\left|\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)\right]\right|=\left|\frac{1}{n^2}f'\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{n^2}\cdot\max_{[-1,1]}|f'|$$

即有结论.

∎

7. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上有连续的偏导数, 并且对任何一个圆周 C, 有

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

求证 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

证明. 用反证法. 若 $\exists\,(x_0,y_0)\in \boldsymbol{R}^2$, $s.t.\ [Q_x-P_y]_{(x_0,y_0)}>0(<0$类似), 则由连续函数保号性知

$$\exists\, r_0>0,\ s.t.\,\forall\, 0<r<r_0,\ 0\le\vartheta\le 2\pi \Rightarrow [Q_x-P_y]_{(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)}>0.$$

而

$$\int_{x^2+y^2=r_0^2} Pdx+Qdy=\iint_{x^2+y^2<r_0^2}[Q_x-P_y]\,dxdy>0,$$

这与条件矛盾. 故有结论. ∎

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上两次可导, $f(0)=f'(0)=f'(a)=0$, $f(a)=1$, 并且对任何 $x\in[0,a]$, 有 $|f''(x)|\le 1$. 设

$$g(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le a/2,\\ a-x, & a/2-x<x\le a.\end{cases}$$

(a) 求证 $f'(x)\le g(x)$.

(b) 求证存在 $x_0\in(0,a)$, 使得 $f'(x_0)<g(x_0)$.

(c) 求证 $a>2$.

证明. *(a)* 当 $0\le x\le a/2$ 时, $f'(x)=f'(0)+f''(\xi_x)x\le x=g(x)$; 当 $a/2<x\le a$ 时, $f'(x)=f'(a)+f''(\eta_x)(x-a)\le a-x$.

(b) 用反证法. 若不然, 则 $f'(x)\equiv g(x),\ x\in(0,a)$, 而 g 在 $x=a/2$ 处不可导, 矛盾. 故有结论.

(c) 由

$$1=\int_0^a f'(x)dx<\int_0^a g(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\frac{a^2}{4}$$

知 $a>2$.

∎

9. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 且对任何 $x,x_0\in(a,b)$, 有

$$f(x)-f(x_0)\ge g(x_0)(x-x_0).$$

(a) 求证 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(b) 求证对任何 $x \in (a,b)$, $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 均存在, 且 $f'_-(x_0) \le g(x_0) \le f'_+(x_0)$.

证明. 固定 $x_0 \in (a,b)$, 对 $x_0 < x_1 < x_2$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ge g(x_1) \ge \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \ge g(x_0),$$

而

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \ge \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \ge g(x_0),$$

于是 $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 且 $f'_+(x_0) \ge g(x_0)$. 同理, $f'_-(x_0)$ 存在, 且 $f'_-(x_0) \le g(x_0)$.

因为 f 在 x_0 处左右导数均存在, 而连续. ■