南开大学2006数分

To my parents

1. 求极限 $\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \sin(tx^2)dx}{t^4}$.

解答.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \sin(tx^2)dx}{t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \left[tx^2-\frac{1}{3!}\left(tx^2\right)^3+O\left(\left(tx^2\right)^5\right)\right]dx}{t^4}=\frac{1}{3}.$$

■

2. 设 $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. 试证: $(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\,u=\frac{n(n-1)}{2}u$.

证明. 记 $A=[a_{ij}]=\left(x_j^{i-1}\right)$, 其代数余子式矩阵为 $[A_{ij}]$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\,u &= \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=2}^n (j-1)a_{ij}A_{ij}\right]\\ &= \sum_{j=2}^n (j-1)\left[\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}\right]=\frac{n(n-1)}{2}det\ A=\frac{n(n-1)}{2}u.\end{aligned}$$

■

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有界可积, $\int_0^2 f(x)dx=0$. 求证存在 $a\in[0,1]$ 使得 $\int_a^{a+1} f(x)dx=0$.

证明. 记 $F(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx$, 则 $F(0)+F(1)=\int_0^2 f(x)dx=0$, 而

(a) 若 $F(0)=0$, 则 $a=0$ 满足所证.

(b) 若 $F(0)\neq 0$, 则 $F(0)\cdot F(1)<0$, 而由连续函数的介值定理有

$$\exists\, a\in(0,1),\ s.t.\ F(a)=\int_a^{a+1} f(x)dx=0.$$

■

4. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 内收敛到 $f(x)$, 设 $0\neq x_n\in(-1,1)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 和 $f(x_n)=0, n=1,2,\cdots$, 则 $f(x)=0$ 对所有 $x\in(-1,1)$.

证明. 由题意, 幂级数在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛, $f(0)=0$, 且

$$\exists\, y_n>0\,\big(<0\text{ 类似}\big)\,, y_n\neq y_m, n\neq m;\ s.t.\ \lim_{n\to\infty} y_n=0,\ f(y_n)=0.$$

于 $\{(y_n,y_{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ 上应用 *Rolle* 定理, 而有一串 $z_n\to 0$, $f'(z_n)=0$, 所以 $f'(0)=0$; 再于 $\{(z_n,z_{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ 上应用 *Rolle* 定理, 而又一串 $w_n\to 0$, $f''(w_n)=0$, 所以 $f''(0)=0$; 如此一直做下去, 我们得到

$$f^{(n)}(0)=0,\ \forall\, n=0,1,2,\cdots.$$

故而

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0,\ \forall\, x\in(-1,1).$$

■

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 有任意阶导数, 且导数函数列 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 一致收敛于 $\varphi(x)$, $\varphi(0)=1$. 求证: $\varphi(x)=e^x$.

证明.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f^{(n-1)}\right]'(x)\\ &= \left[\lim_{n\to\infty} f^{(n-1)}\right]'(x)=\varphi'(x)\\ \Rightarrow\quad & \varphi(x)=\varphi(0)e^x=e^x.\end{aligned}$$

■

6. 设 $f(x,y)$ 在球 $\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上连续. 对 $r>0$, 令

$$B(r)=\left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le r^2\right\},$$

$$S(r)=\left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2=r^2\right\}.$$

求证:

$$\frac{d}{dr}\iiint_{B(r)} f(x,y,z)dxdydz=\iint_{S(r)} f(x,y,z)dS,\ r\in(0,1).$$

证明.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\iiint_{B(r)} f(x,y,z)dxdydz &= \frac{d}{dr}\int_0^r\left[\int_{S(s)} f(x,y,z)dS\right]ds\\ &= \int_{S(r)} f(x,y,z)dS.\end{aligned}$$

■

7. 设 $f(x,y,z)$ 在全空间上具有连续的偏导数, 且关于 x,y,z 都是 1 周期的, 即对任意点 (x,y,z) 成立

$$f(x+1,y,z)=f(x,y+1,z)=f(x,y,z+1)=f(x,y,z),$$

则对任意实数 α,β,γ, 有

$$\iint_\Omega\left[\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right]dxdydz=0.$$

这里, $\Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ 是单位方体.

证明.

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega\left[\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right]dxdydz\\ =\ &\alpha\iint_{\partial\Omega} fdydz+\beta\iint_{\partial\Omega} fdzdx+\gamma\iint_{\partial\Omega} fdxdy\ \ (\textit{Stolz formula})\\ =\ &0\ \ (\textit{periodicity of } f \textit{ and the orientation of } \partial\Omega).\end{aligned}$$

■

8. 设 A 是三阶实对称方阵, 定义函数

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3.$$

求证: $h(\boldsymbol{x})$ 在条件 $|\boldsymbol{x}| = 1$ 下的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证明. 由于 A 是三阶实对称方阵,

$$\exists \text{ 正交阵 } P,\ s.t.\ A = P^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} P,$$

其中 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ 为 A 的三个实特征值.

而对 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^3$, 有

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{w}^T A\boldsymbol{w} = (P\boldsymbol{w})^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} (P\boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{v}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{w},\ |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i^3 \\ &\le \lambda_3, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{w} = P^{-1}\boldsymbol{e}_3.$$

■

9. (a) 设数列 $a_n \ne 0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 定义集合

$$P = \{ka_i;\ k \in \boldsymbol{Z},\ i \in \boldsymbol{N}\},$$

其中 $\boldsymbol{Z}$ 是整数集, $\boldsymbol{N}$ 是自然数集. 求证对任何实数 b, 存在数列 $b_k \in P$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_k = b$.

证明. 我们先取 a_n 的一子列, 仍记作 a_n, 其满足

i. $a_n > 0$ ($a_n < 0$ 可类似讨论);

ii. $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n,\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}$;

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

于是对 $\forall\, b \in \boldsymbol{R}$,

i. $\exists\, k_1,\ s.t.\ b \in [k_1a_1, (k_1+1)a_1]$;

ii. $\exists\, k_2,\ s.t.\ b \in [k_2a_2, (k_2+1)a_2] \subset [k_1a_1, (k_1+1)a_1]$;

iii. 如此一直下去, 有

$$b \in [k_{n+1}a_{n+1}, (k_{n+1}+1)a_{n+1}] \subset [k_na_n, (k_n+1)a_n]\,,\ \forall\, n.$$

于是由闭区间套定理,

$$\lim_{n\to\infty} k_na_n = b = \lim_{n\to\infty}(k_n+1)a_n.$$

■

(b) 试证一个非常数的周期连续函数必有最小正周期.

证明. 设 f 是非常数的周期连续函数. 记 $\mathcal{T} = \left\{f \text{ 的所有正周期}\right\}$, 则由确界原理, $T = \inf\mathcal{T}$ 存在. 而明显的, 存在 f 的一列正周期 T_n, 使得 $T_n \to T$.

断言: $T > 0$, 而 f 有最小正周期 $T > 0$:

$$f(x+T) = f\left(x + \lim_{n\to\infty} T_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x+T_n) = f(x).$$

实际上, 若 $T = 0$, 则

$$f(x) = f\left(\lim_{j\to\infty} k_jT_{n_j}\right) = \lim_{j\to\infty} f\left(k_jT_{n_j}\right) = f(0),$$

这与 f 不为常数矛盾. ■

10. 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 定义的周期连续函数, 周期为 1, 且 $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$. 令 $a_n = \int_0^1 e^x \varphi(nx)dx$, 对任意自然数 n. 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

证明. 由

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \left[\int_0^1 e^x\varphi(nx)dx\right]^2 = \left[\frac{1}{n}\int_0^n e^{\frac{y}{n}}\varphi(y)dy\right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left(e^{\frac{y}{n}} - e^{\frac{i}{n}}\right)\varphi(y)dy\right]^2, \end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{1/n^2} &\leq \left[\sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left|e^{\frac{y}{n}} - e^{\frac{i}{n}}\right| |\varphi(y)|\, dy\right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\int_0^1 |\varphi(y)|\, dy\right]^2 \\ &\quad \left(\left|e^{\frac{y}{n}} - e^{\frac{i}{n}}\right| = \left|\frac{1}{n}e^{\frac{\xi}{n}}\right| \leq \frac{1}{n},\ \forall\, 0\leq i-1\leq y\leq i\leq n\right) \\ &= \left[\int_0^1 |\varphi(y)|\, dy\right]^2, \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. ■

注记. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 是很明显的, 由泛函分析. ■