兰州大学2010数学分析

To my parents

1. 计算下列各题:

(a) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}+1-2\sqrt{1-x^2}}{\sin x^4+3\tan^5 x}$.

解答.

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6)\right]+1-2\left[1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+O(x^6)\right]}{\left[x^4+O(x^{12})\right]+3\left[O(x)\right]^5}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

■

(b) 求定积分 $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln x)dx$.

解答.

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \int_0^1 e^y\sin y dy = e\sin 1-\int_0^1 e^y\cos y dy\\ &= e\sin 1-\left[e\cos 1-1+\int_0^1 e^y\sin y dy\right],\end{aligned}$$

$$\text{原积分}=\frac{1}{2}\left[e\sin 1-e\cos 1+1\right].$$

■

(c) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

解答. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=xy-\frac{2xy^3}{x^2+y^2},$$

$$f_x(x,y)=y-2y^3\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_y(x,y)=x-2xy^2\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

又

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

而

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-2y}{y}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1.$$

■

(d) 计算积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^4 \sin\frac{\pi x}{2y}dy.$

解答.

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}dy\\ &= -\frac{8}{\pi^3}\int_{\pi/2}^{\pi}s\cos s ds=\frac{4(2+\pi)}{\pi^3}.\end{aligned}$$

■

(e) 设 C 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 的交线 $(a,h>0)$, 且从 x-轴正向看为逆时针方向. 计算曲线积分 $I=\oint_C(z-x)\,dy+(x-y)dz.$

解答.

$$\begin{aligned}I &= \oint_C (z-x)\,dy+(x-y)dz\\ &= \iint_{x^2+y^2\le a^2,\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1} -2dydz+dzdx-dxdy\ \ (\textit{Stokes formula})\\ &= \iint_{u^2+v^2\le 1,u+w=1} -2ahdvdw+ahdwdu-a^2dudv\\ &\quad (x=au,y=av,z=hw)\\ &= \iint_{u^2+v^2\le 1}\left[-2ah-a^2\right]dudv=-2\pi a(2h+a).\end{aligned}$$

■

(f) 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\ge\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}$ Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma f(x,y,z)dS.$$

解答.

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{x^2+y^2\le 1/2} (x^2+y^2)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dxdy \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\cdot 2\pi r dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2}) \\ &\quad \left(\sin^3\vartheta = \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\right). \end{aligned}$$

■

2. 设实函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$. 讨论 $f(x)$ 的连续性并说明是否可在 $x=0$ 处定义 $f(0)$ 的值, 使得 $f(x)$ 在该点可导.

证明. 当 $x\neq k\pi(k\in \boldsymbol{Z})$ 时,

$$f(x)=\lim_{t\to x} Exp\left\{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}\right\} = Exp\left\{x\lim_{t\to x}\frac{\sin x}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos t}\right\} = e^{\frac{x}{\sin x}},$$

而 $\{k\pi\}_{k\neq 0, k\in\boldsymbol{Z}}$ 为 f 的第二类间断点, 而 0 为 f 的可去间断点, 可定义 $f(0)=e$ 使得 f 在该点连续, 且

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{\sin x}}-e}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{\sin x}}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = e\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin x\cos x} = 0, \end{aligned}$$

存在. ■

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数并且 $f(x)>0$, $f''(x)<0$. 记 $f(x)$ 的图像曲线为 C, 过 C 上点 $M(t,f(t))(t\in[a,b])$ 引切线. 证明当 t 变动时, 由该切线与曲线 C 以及直线 $x=a, x=b$ 围成的平面图形面积可取到最小值, 并求出此值.

证明. 易知题中所指面积

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_a^b \{[f'(t)(x-t)+f(t)]-f(x)\}\,dx \\ &= f'(t)\frac{b^2-a^2}{2} - tf'(t)(b-a)+f(t)(b-a)-\int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

而

$$S'(t) = f''(t)\frac{b^2-a^2}{2} - [f'(t)+tf''(t)](b-a)+f'(t)(b-a)$$

$$= f''(t)(b-a)\left[\frac{b+a}{2}-t\right]$$
$$\begin{cases} <0, & t<\frac{a+b}{2}, \\ =0, & t=\frac{a+b}{2}, \\ >0, & t>\frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

故而

$$\min_{t\in[a,b]} S(t) = S\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(x)dx.$$

■

4. 用一致连续的定义验证 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上不一致连续.

证明. 实际上,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\sqrt{2n\pi}-\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\pi/2}} \to 0,\ as\ n\to\infty,$$

但是

$$\left|f\left(\sqrt{2n\pi}\right)-f\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right| = 1,\ \forall\, n\in\boldsymbol{N}.$$

■

5. 在区间 $[0,1]$ 上, 函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\in(0,1], \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的 *Riemann* 可积性.

解答. f 于 $[0,1]$ 上是 *Riemann* 可积的. 证明如下:

(a) $0\le f(x)\le 1$;

(b) f 的间断点为 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{i}\right\}_{i\ge 2}$;

(c) 对于 $[0,1]$ 上的任意分割 $\{\Delta x_i\}$, 记对应的 f 的振幅为 $\{\omega_i\}$, 则

$$\sum \omega_i\Delta x_i = \left[\sum_{x_i<\varepsilon/2}+\sum_{x_i\ge\varepsilon/2}\right]\omega_i\Delta x_i$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{x_i>\varepsilon/2}\omega_i\Delta x_i \\ &\quad (0\leq f\leq 1 \textit{ and finite number of discontinuities of } f \textit{ in } [\varepsilon/2,1]) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

当 $\max\{\Delta x_i\}$ 充分小时.

■

6. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续可导函数. 记

$$f^{-1}(0)=\{x\in[a,b];\ f(x)=0\}.$$

假设 $f^{-1}(0)\neq\emptyset$ 且

$$x\in f^{-1}(0)\Rightarrow f'(0)\neq 0.$$

证明: $f^{-1}(0)$ 是有限集.

证明. 用反证法. 若 $f^{-1}(0)$ 无限, 则

$$\exists\, x_n\ni[a,b],\ s.t.\ x_n\neq x_m(n\neq m),\ x_n\to x\in[a,b],\ f(x_n)=f(x)=0.$$

但 $f'(x)\neq 0$, 而在某个 $U(x,\delta)$ 内亦有 $f'\neq 0$, 于是当 n 充分大时,

$$f(x_n)\neq f(x)+f'(y_n)(x_n-x),\ \forall\, y_n \textit{ between } x_n \textit{ and } x,$$

这与著名的 *Lagrange* 中值定理矛盾. ■

7. 设 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ 是有界闭集, $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数. 证明: $f(x,y)$ 在 D 上有界, 且一定取到最大值和最小值.

证明. *(a)* $f(x,y)$ 在 D 上有界.

反证法. 若 f 无界, 则

$$\exists\, D\ni x_n\to x\in D,\ s.t.\ f(x_n)\to\infty,$$

而由连续性, $f(x)=\infty$, 矛盾.

(b) $f(x,y)$ 在 D 上一定取到最大值和最小值.

由确界原理, $\sup\limits_D f$ 存在, 而

$$\exists\, D\ni x_n\to x\in D,\ s.t.\ f(x_n)\to\sup_D f,$$

再由连续性, $f(x)=\sup\limits_D f$.

■