

# 复杂动态网络的一种和谐统一的 混合择优模型及其普适特性

方锦清<sup>①\*</sup> 毕 桥<sup>①</sup> 李 永<sup>①</sup> 卢新彪<sup>①②</sup> 刘 强<sup>①</sup>

(<sup>①</sup> 中国原子能科学研究院, 北京 102413; <sup>②</sup> 上海交通大学自动控制系, 上海 200030)

**摘要** 为了描述真实世界是确定性与随机性的和谐统一的世界, 提出了复杂动态网络的一种和谐统一的混合择优模型, 该模型引进一个关键的总混合比作为调控参数, 实现所需的混合生长的演化复杂网络, 并把该思想方法应用于无权的和含权的 3 个典型模型. 数值模拟和理论分析揭示了混合复杂动态网络随混合比变化的若干普适特性, 兼备小世界效应和无标度性质, 具有应用潜力.

**关键词** 和谐统一的混合择优模型 总混合比 无权和含权网络 三种幂律分布 小世界特性 无标度特性

国际上网络科学的两项重要发现: 小世界(SW, small world)效应<sup>[1]</sup>和无标度(SF, scale-free)特性<sup>[2]</sup>, 标志着复杂网络研究冲破了从 20 世纪 60 年代开始占据了 40 年之久的随机网络理论的禁锢, 取得了突破性进展, 激起了国内外网络科学研究的热潮<sup>[3~15]</sup>. 国内与国际研究基本上同步进展. 然而, 当前如何真实地刻画实际网络特性, 以完善和发展复杂网络模型, 一直是极富挑战性的课题之一. 迄今大多数研究集中在无权网络上, Barabaci和Albert (BA)<sup>[2]</sup>提出的无标度网络及其各种变种是最具代表性的无权网络, 虽可反映网络结点之间简单连接方式和主要相互作用的特性等信息, 但还不能反映实际网络结点之间相互作用的强度和连边的多样性和差异性, 而含权网络不仅能够反映实际网络的拓扑结构, 而且可反映真实网络上的动力学特征. Barrat, Barthelemy和Vespignani (BBV)<sup>[13]</sup>提出的含权演化网络模型具有代表性, 该模型兼有点权、点度和边权的三种幂律分布, 即 $P(k) \approx K^{-\gamma}$ , 其中指数值在 2~3 之间, 与大部分真实网络相符合. 然而, BBV模型无法揭示真实网络具有大的群聚系数C和度-度相关性等问题. 为此, Wang等人<sup>[14]</sup>提出了含权的交通流驱动演化(TDE)模型, 引进了相互影响的拓扑生长和强度耦合同步两种机制, 使模型的结果与实际数据比较符合交通负荷增长速率的技术网络. 这两个模型和当前大多数模型的共同不足是, 只考虑随机性而没有考虑确定性连接, 不太符合实际网络. 因此, 无论无权网络还是含权网络模型都有待进一步改进和完善.

收稿日期: 2005-12-13; 接受日期: 2006-12-15

国家自然科学基金重点项目(批准号: 70431002)和国家自然科学基金面上项目(批准号: 70371068)资助

\* E-mail: [fjq96@126.com](mailto:fjq96@126.com)

迄今,大多数模型属于两种极端情形,广义随机模型和确定性网络模型<sup>[16]</sup>。但是,大家日常观察到自然界和人类社会的一个最基本事实是,真实世界是确定性与随机性和谐统一的,不能偏一概全。混沌理论早已为确定性与随机性以及有序与无序的和谐统一提供了强有力的证明,既打破了拉普拉斯完全确定论,又冲破了完全随机理论的禁锢。正如普利高津所指出<sup>[17]</sup>:“在我们的世界里,我们在所有层次上发现里涨落、分岔和不稳定性……。今天,我们不怕‘非确定性假设’,它是不稳定性和混沌的现代理论的自然结果,一旦我们有了时间之矢,就会立刻明白自然的两个主要属性:自然的统一性和自然的多样性。”人类生活在一个既可确定又有概率的世界,这就是随机性与确定性的统一世界。所谓“时间之矢”,就是指时间发展方向,实际上就是任何事物随时间行进发生不可逆的演化过程,而复杂动态网络的演化存在不可逆过程,例如WWW网和Internet网的发展就是不可逆过程。随机性与确定性的共存现象普遍存在于社会网络,例如,每年全国高考招生网、公务员考试网和社会就业(人才招聘)网等等,都包含随机性和确定性的两种混合择优过程及多种连接方式。由混沌方程为结点组成的复杂动态网络,随着网络演化,网络的分岔与混沌特性就是确定性和随机性的一种统一形式。不论是物理网络、还是生物网络和技术网络,概不例外,只是确定性和随机性混合程度依具体对象不同而已,必然是自然和谐地共存于复杂系统自组织之中。因此,混合择优生长模型在自然界和人类社会具有广泛的实际基础,符合自然的、社会的、物理的、技术的以及生命的大多数实际网络情况。

已经发现,许多实际网络兼有小世界特性和无标度性质<sup>[3,11,14]</sup>,它们的拓扑特性不仅具有小的最短平均路径长度(APL),而且具有大的平均群聚系数(ACC)。那么,为什么现存的许多广义随机网络模型并不能同时揭示或完全具备这些特性?这是本文研究的推动力之一。WS小世界模型描述了网络大小固定的规则圆周上,只要有少数结点进行随机的远程连接,就可导致从规则到随机之间的转变特性,于是我们又要问:如果网络是生长演化情形,那么生长网络的连接方式从随机到规则,或从规则到随机相互转变时,将使拓扑特性和动力学行为发生什么转变?如果在随机性择优与确定性择优连接混合生长,又会出现什么新的特点和规律?寻求这个问题的答案和相应的解决方法与途径,正是本文研究的主要推动力之二。就是基于上述问题和推动力,我们提出了复杂网络的一种和谐统一的混合择优模型(简称HUHPM),把我们的思想和方法应用于现有主要的无权网络和含权网络模型中,并可推广应用于许多其他模型。

## 1 和谐统一的混合模型(HUHPM)的基本思想和方法

根据上述事实观察和分析,在我们前面工作的基础上<sup>[18,19]</sup>,进一步提出了HUHPM,其基本思想和方法的理论框架表达为

$$\boxed{\text{和谐统一的混合模型}} = \boxed{\text{任一类型网络各自的生长方式与随机择优模式}} + \boxed{\text{确定性择优连接方式}},$$

即HUHPM可依据任一类型网络各自的生长方式与随机择优模式,如BA网络、BBV网络和TDE网络各自生长规则,然后进一步加进确定性择优连接方式,按照度分布从大到小排序择优,还可以拓广采用其他确定连接方式,实施把随机性连接与确定性连接相结合形式,按照所需的总混合比要求交替生长所需的网络规模大小。为此,首先定义一个统一的总混合比:

$$\frac{d}{r} = \frac{\text{确定性择优连接(DPA)的时间步数 } d}{\text{随机性择优连接(RPA)的时间步数 } r},$$

这里  $d$  为确定性择优连接的时间段次数,  $r$  为随机性择优连接的时间段次数. 在网络生长演化的过程中确保所要求的混合比大小, 实施随机性择优与确定性连接相结合, 究竟哪种连接优先进行, 完全可以灵活采用不同次序, 使两者混合交替生长达到所需的网络大小规模. HUHPM 实行混合生长网络的主要机制和原则如下:

(i) 增长方式: 对现有的无权和有权网络模型, 先依它们原模型的各自生长规则进行生长. 例如, 对于 BA 模型(属于无权模型)<sup>[11]</sup>, 开始于较少的孤立结点, 数量为  $m_0$  个, 在每个时间间隔增添一个具有  $m(\leq m_0)$  条边的新结点, 连接这个新结点到  $m$  个不同的已经存在于系统中的结点上. 对于 BBV 模型(属于含权模型)<sup>[13]</sup>, 允许在老结点之间产生新的连边. 对于 TDE 模型<sup>[14]</sup>, 保持拓扑生长规则是, 每一时步网络生长出一个新结点, 与已有网络中的老结点连  $m$  条新边. 如此按照原来模型增长方式进行下去.

(ii) 生长连接方式: 对于演化的每一时步采取哪种连接机制, 要根据随机性和确定性连接之间规定的混合比  $d/r$ , 在保证最终混合比  $d/r$  不变条件下, 可以有 3 种混合连接次序:

HPAS-1: 先按随机性择优连接(RPA), 然后按照结点度从大到小排序, 取  $m$  个度最大的结点进行确定性择优连接(DPA);

HPAS-2: 先按 DPA 方式进行, 取  $m$  个度最大的结点进行连接, 然后 RPA 方式进行;

HPAS-3: 可以随机确定 RPA 和 DPA 的优先连接顺序.

由于网络规模大, 从统计意义上说, 3 种混合连接次序先后并不影响最终统计结果.

(iii) 确定性择优方式: 在每次连接后, 整个网络按照结点度从大到小进行排序:  $k_1 > k_2 > \dots > k_m > \dots > k_n$ , 然后对  $m$  个度最大的结点进行优先连接. 这是一种最通常的确定性择优方式, 符合当今社会人们最一般观念和基本原则, 比如对选择人才、产品或商品时, 人们总是在容许的条件下选择最优秀的人才和最好的产品, 对技术网络也不例外, 希望达到最佳技术性能. 由于社会领域、物理世界和工程技术领域的实际情况错综复杂, 选择方式可能存在多样性和灵活性.

(iv) 把 HUHPM 的思想与方法应用于最具代表性的已有的无权的 BA 模型、含权的 BBV 模型和 TDE 模型, 分别称为它们为 HUHPM-BA 网络, HUHPM-BBV 网络和 HUHPM-TDE 网络, 保持它们各自的增长方式和随机性择优特点; 关键不同点是: 这里不仅仅有随机方式, 而且有确定性方式, 即必须是实行混合连接方式. 这样才符合随机性与确定性和谐统一的世界. 按照整个网络生长过程一个具体的要求, 由和谐统一的混合比来控制网络生长过程, 随机性择优和确定性选择交替进行, 直到生成所需要的网络规模为至.

(v) 随机性择优方式: 把上述思想应用于现有的网络模型中依不同模型而定. 本文列举 3 个典型无权网络和含权网络.

i) 对于 HUHPM-BA 网络, 新结点  $n$  与老结点  $i$  的随机优先连接概率正比于结点度  $k$  大小:

$$P_{n \rightarrow i}^{\text{BA}} = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (1)$$

ii) 对于 HUHPM-BBV 网络, 新结点  $n$  与老结点  $i$  的优先连接按照强度耦合概率:

$$\Pi_{n \rightarrow i}^{BBV} = \frac{s_i}{\sum_j s_j} = \frac{s_n s_i}{\sum_j s_n s_j}, \quad (2)$$

这里  $s_i$  和  $s_j$  表示相应结点  $(i, j)$  的强度. 该模型考虑了边权, 即在老结点之间也允许产生新的连边, 同时考虑已经存在的沿着连边的交通流也将随着网络的生长而不断更新.

iii) 对于 HUHPM-TDE 网络, 保持拓扑生长规则: 每一时步网络生长出一个新结点, 与已有网络中的老结点连  $m$  条新边, 连边的优先(偏好)概率与(2)式相同, 即按照结点强度优先连接. 每一条新边的权重亦设定为  $w_0 = 1$ . 老结点之间的连边含权择优服从强度耦合动力学规则, 在每一时步, 所有可能的连边均按照强度耦合更新机制:

$$w_{ij} \rightarrow \begin{cases} w_{ij} + 1, & \text{以概率 } Wp_{ij}, \\ w_{ij}, & \text{以概率 } 1 - Wp_{ij}, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$p_{ij} = \frac{s_i s_j}{\sum_{a < b} s_a s_b} \quad (4)$$

是结点  $i$  与结点  $j$  之间连边按照强度耦合排序的择优概率, 由它确定权重  $w_{ij}$  的增量. 如果结点  $i$  与结点  $j$  不相连, 则  $w_{ij} = 0$ . 边权的总增量受以下控制:

$$\left\langle \sum_{i < j} \Delta w_{ij} \right\rangle = w. \quad (5)$$

该模型简单设定  $w$  为常数, 用来大致反映整个网络的总交通负荷的增长速率. 该模型取  $w > 1$  的值不尽合理, 也不符合实际. 我们将考虑  $w < 1$  的情形.

图 1 示出 3 种网络类型在不同混合比  $d/r = 1/6, 1/1$  和  $6/1$  下, 结点混合择优连接生长演化的一种示意图.

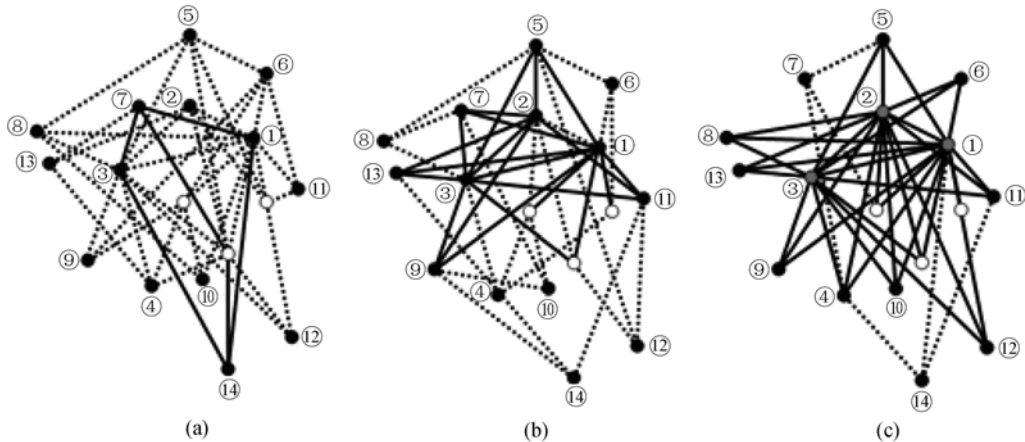


图 1 在不同混合比  $d/r$  下, HUHPM 3 种混合择优连接演化示意图

(a)  $d/r = 1/6$ ; (b)  $d/r = 1/1$ ; (c)  $d/r = 6/1$ . 结点数目  $N = 14, m = m_0 = 3$ . 用实线示确定性连接, 虚线示随机性连接, 白点示起始点, 黑点示新加入的结点, 灰点示在一定择优连接后确定的优先点, 带圆圈的数字示新加入的结点以数字排列的顺序

由于图 1(a)属于 RPA 占优势,网络拓扑结构类似于随机网络,而且  $d/r$  越小,即  $r$  越大,应该越来越类似于完全随机网络;图 1(b)中  $d/r = 1/1$  两者混合势均力敌,已经能初步看出 DPA 所带来的群聚效果;图 1(c)属于 DPA 占优势,出现了高群聚的结点,而且以后随着  $d/r$  增加,凝聚的程度越高.数值模拟表明,在同一混合比下三种先后不同混合连接次序的网络连接图并不影响最终拓扑性质.

需要强调指出:任何其他不同领域的网络模型都可以在整个和谐统一的混合模型框架下同法进行重新研究,既能够保持原来模型的特点和规律,而且还赋以模型新的特性,使得原有的模型更加符合真实世界的网络情形.

## 2 无标度特性及其指数对混合比 $d/r$ 的依赖性

BA 模型及其变种的广义随机网络的最重要的拓扑特性是度分布具有负指数的幂律分布,一些实际网络也有类似的负指数幂律分布,但是有些幂律曲线往往在顶部出现弯头和尾部出现随机重尾巴,只有中间部分是对数线性得比较好.这种现象有多方面原因,对于一类广义随机网络负指数的幂律分布则是随机择优机制的结果,重尾巴也是随机连接造成的,另一原因是理论模型不太符合实际或统计量不够充分造成.那么,能不能既保持负指数的幂律分布又能消除随机重尾巴?本文研究表明, HUHPM 方法能够同时达到这个目的.图 2 给出了 HUHPM-BA 网络度幂律分布的负指数  $\gamma$  随对数混合比  $\log(d/r)$  变化的关系图,图 2 内嵌套 3 种不同连接次序(HPAS)下度幂律分布  $P(k)$  与  $k$  对数关系图,不同混合比  $d/r$  分别为 0, 1/199, 1/19, 1/1, 19/1, 199/1 情况,文中所有的图都是采用网络尺寸  $N = 6000$  和  $m = m_0 = 3$ . 图 2 不仅显示了很好的结点度幂律分布特性,而且只要确定性占有一定的比例,所有幂律分布的随机重尾巴就被抑制了.随着确定性比例增加到占主导,度分布出现高群聚结点.从负指数  $\gamma$  随混合比  $d/r$

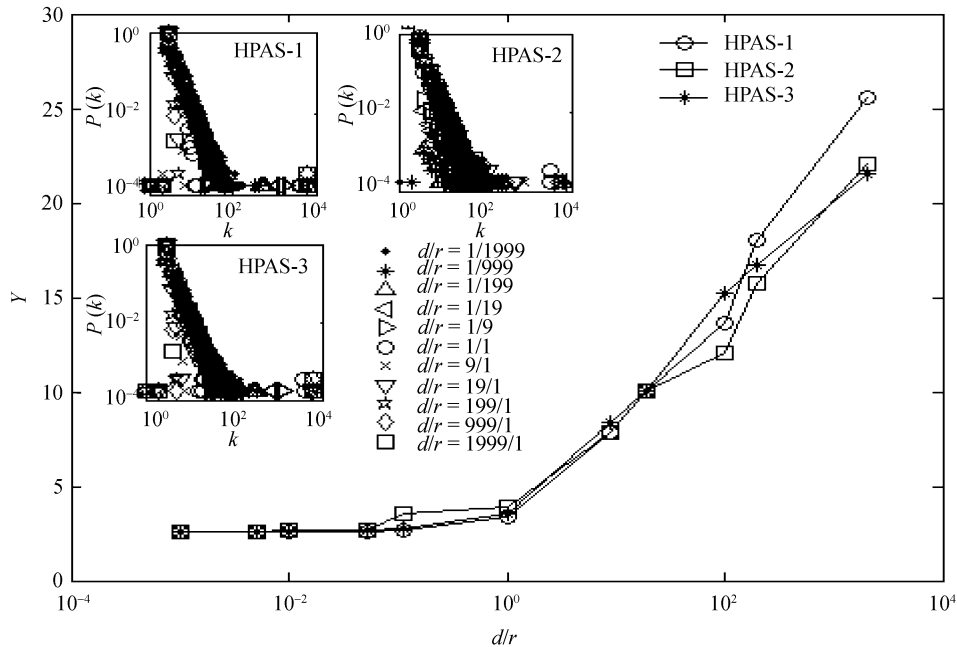


图 2 HUHPM-BA 网络度幂律分布的负指数  $\gamma$  随混合比对数  $\log(d/r)$  变化图  
图内嵌套 3 种不同连接次序(HPAS-1, HPAS-2, HPAS-3)下度幂律分布  $P(k)$  与  $k$  对数关系图

的变化进一步发现:  $\gamma$  对混合比  $d/r$  有强烈的依赖性(或称高敏感性, 这是一个重要的共同拓扑新特性, 同时存在一个阈值在  $d/r = 1/1$ , 它是拓扑特性的一个转变点(相变点). 在  $d/r \leq 1$  时,  $\gamma \leq 3$ , 这符合随机择优主导的所有广义随机模型情形; 对于  $d/r > 1$  情形, 在 BA 模型和 BBV 模型中, 尽管  $\delta$  不同,  $\gamma$  按照  $\log(d/r)$  迅速上升; 对于 HUHPM-TDE 模型, 考虑  $w < 1$  情形是比较符合实际情形, 因为实际相对干扰一般不会大于 1,  $\gamma$  是随  $\log(d/r)$  迅速增加, 可达到非常大; 即使对于原来 TDE 模型  $w > 1$  情形,  $\gamma$  对  $d/r$  也具有明显的依赖性; 一旦随机择优为 0 ( $r = 0, d/r \rightarrow \infty$ ), 则  $\gamma \rightarrow \infty$ , 在这种极端情形下度分布的幂律就消失了, 即不存在幂律分布. 这时度分布往往只集中在几个高群聚节点上.

从图 3 和 4 可见, 三种 HUHPM 网络的点度, 点强和边权的幂律指数  $\gamma$  都对总混合比  $d/r$  的变化具有高敏感性或强烈的依赖性, 该特性是共同的, 且当随机占主导时在 HUHPM-BBV

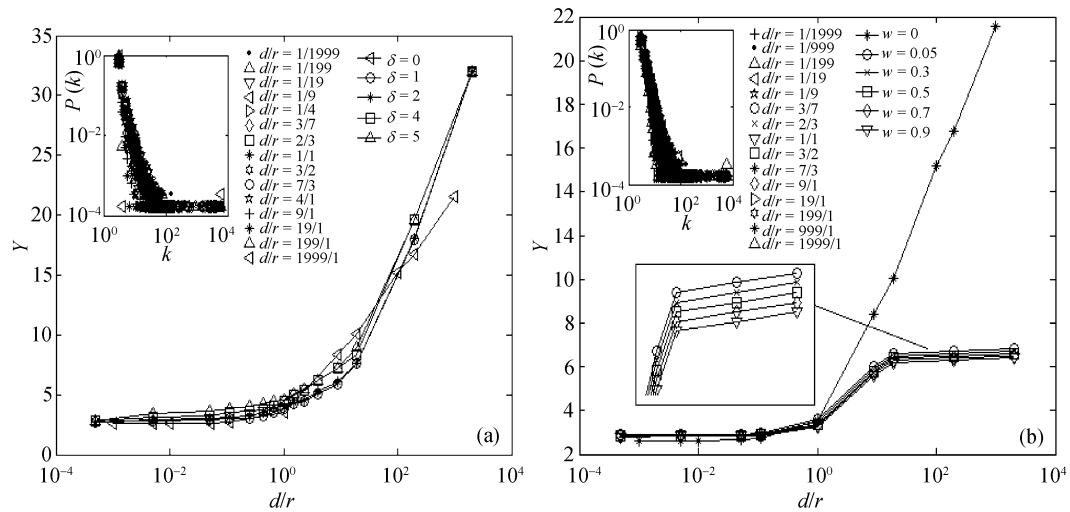


图 3 在含权模型中点度幂律分布的负指数  $\gamma$  与混合比  $d/r$  的关系  
(a) HUHPM-BBV 模型(在不同  $\delta$  下); (b) HUHPM-TDE 模型(在不同  $w < 1$  下)

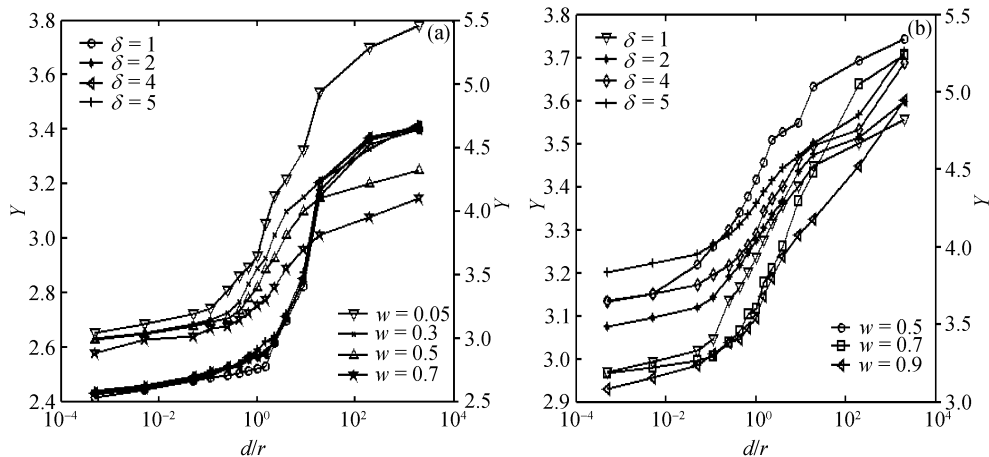


图 4 HUHPM 模型中点强和边权的幂函数指数  $\gamma$  与混合比  $d/r$  的关系  
(a) 对于 HUHPM-BBV 和 HUHPM-TDE 的点强幂律指数; (b) 对于 HUHPM-BBV 和 HUHPM-TDE 的边权指数

与 HUHPM-TDE 网络中与原来 BBV 和 TDE 模型所具有的幂函数分布相一致. 这些结果说明 HUHPM 网络模型能够把 BA 模型、BBV 模型与 TDE 统一在一个 HUHPM 理论框架里.

### 3 幂指数 $\gamma$ 与混合比 $d/r$ 关系的理论分析

首先, 分别对 HUHPM-BA, HUHPM-BBV 和 HUHPM-TDE 网络情形进行一定的理论分析. 这时, 结点度  $k(t)$  随时间  $t$  变化满足基本方程 [3]:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j} = \frac{\beta k_i}{t}, \quad (6)$$

这里

$$\sum_{j=1}^{N-1} k_j = \frac{m}{\beta} t. \quad (7)$$

可以肯定, 在 HUHPM 下  $\beta$  本身必是  $d/r$  的某种函数关系, 只不过对不同模型具有不同的参数值, 即 HUHPM 应用于不同模型时需要调整参数以适合不同情形. 通过仔细观察和分析, 我们得到  $\beta$  是一种指数函数的组合形式:

$$\beta = \frac{\exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]}{A_1 + A_4 \exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]}, \quad (8)$$

这里参数  $A_1 \sim A_4$  是可确定常数; 如果保持  $k_i$  随时间  $t$  的变化同  $\beta$  成正比, 并考虑初值条件后, 我们可得

$$k_i = m \left(\frac{t}{t_i}\right)^\beta, \quad (9)$$

于是, 网络的结点度分布  $P(k)$  为

$$P(k) \propto 2m^\beta k^{-\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}, \quad (10)$$

我们可得幂律分布的负指数  $\gamma$  与混合比  $d/r$  的函数关系为

$$\gamma = \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{A_1}{\exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]} + A_4. \quad (11)$$

另外, 如果调整有关参数, 可使  $\beta$  是混合比  $d/r$  的另一关系, 从而得到度幂律分布的负指数  $\gamma$  与混合比  $d/r$  的另一个函数关系:

$$\gamma = \gamma_0 + A_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{d/r}{A_2}\right)\right) + A_3 \left(1 - \exp\left(-\frac{d/r}{A_4}\right)\right). \quad (12)$$

其中  $\gamma_0 = 3$ . 如图 5(a), 对于 3 种不同的混合次序, 在 3 种网络参数及  $N = 6000$  和  $m = m_0 = 3$  下, 上述两个理论结果与数值模拟曲线吻合得很好.

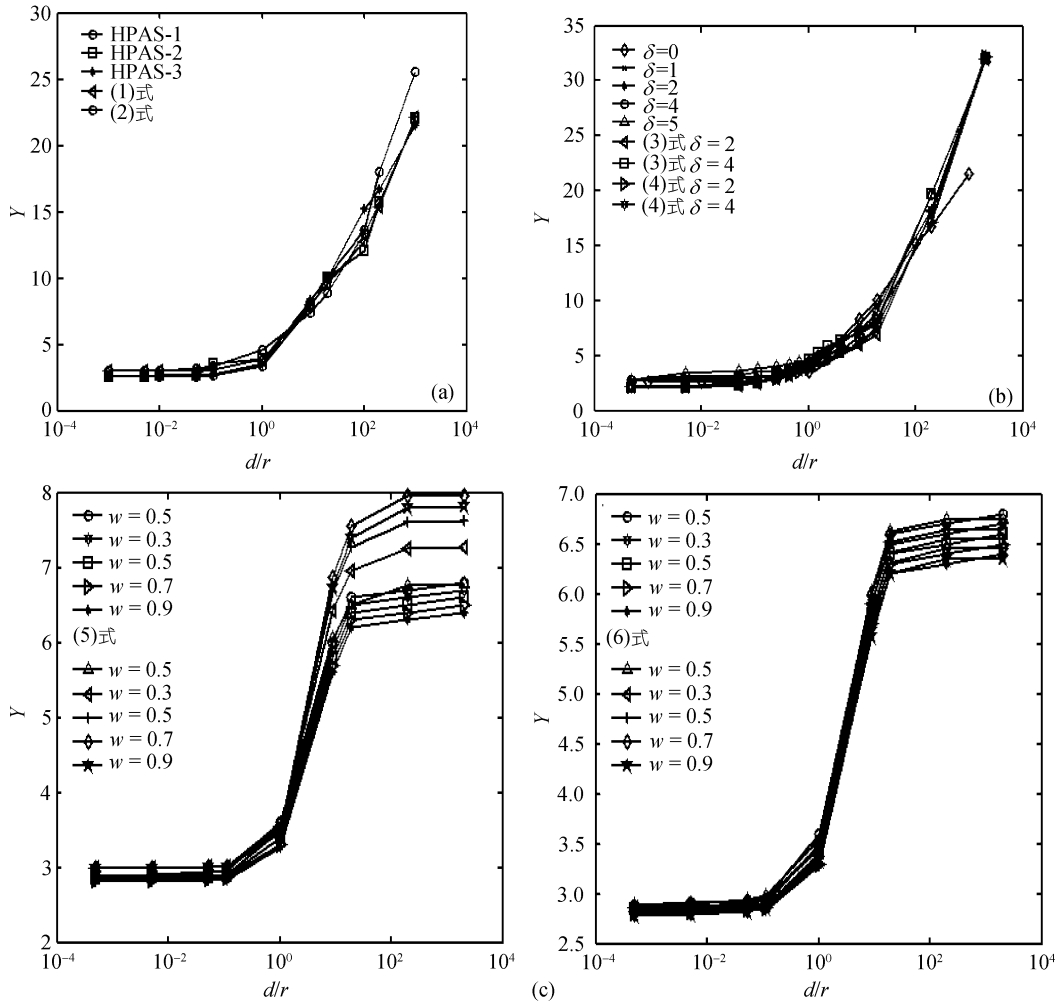


图 5 幂律分布的负指数  $\gamma$  与混合比  $d/r$  关系的数值模拟结果与理论结果比较

(a) UHPM-BA 网络; (b) HUHPM-BBV 网络; (c) HUHPM-TDE 网络

对于 HUHPM-BA 网络, (11)和(12)式中参数列在表 1 中.

对于 HUHPM-BBV 网络,  $\gamma$  不仅与混合比  $d/r$  有关, 而且与权参数  $\delta$  有关, 可导出  $\beta(\delta, d/r)$  是原来(8)或(12)式中  $\beta$  的变体, 即

$$\beta(\delta, d/r) = \frac{2\delta + 1}{2\delta + \frac{A_1}{\exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]} + (A_4 - 1)}, \quad (13)$$

或

$$\beta(\delta, d/r) = \frac{2\delta + 1}{2\delta + A_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_1}\right)\right) + A_2 \left(1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_2}\right)\right) + \gamma_0}. \quad (14)$$



表 1 HUHPM 应用于 BA, BBV 和 TDE 模型时幂指数的计算公式和有关参数

模型	计算方程	控制变量/参量				参数			
		$d/r$	$\chi$	$\delta$	$W$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
HUHPM-BA	(11), 公式(1)	是				107.62317	74594.7464	-0.12849	$A_4 = \gamma_0 = 3$
	(12), 公式(2)	是				6.13617	6.26677	13.60908	323.67565
HUHPM-BBV	(17), 公式(3)	是		2		3972.21249	2813168942.9169	-0.08381	
				4		5551.413	1540244321.0424	-0.08145	
	(18), 公式(4)	是		2		134.04128	302.69868	15.14441	1.02978
				4		35.96354	1.06106	233.1824	267.94085
HUHPM-TDE	(21), 公式(5)	是	2		0.05	0.07738	0.3114	-1.39247	1.03961
					0.3	0.07548	0.33715	-1.45829	1.03419
					0.5	0.06249	0.34483	-1.53529	1.0262
					0.7	0.06277	0.34907	-1.53086	1.02447
					0.9	0.06115	0.35477	-1.52504	1.02457
	(22), 公式(6)	是	0.5		0.05	7.92309	5.39626	0.89938	0.00014
					0.3	9.07618	5.53752	1.26503	0.0001
					0.5	9.8145	5.81671	1.65413	0.0001
					0.7	10.70325	5.88584	1.83152	0.0001
					0.9	11.40359	5.93872	2.12625	0.0001

这时, 其网络的结点度分布  $P(k)$  为

$$P(k) = \frac{1}{m^{1-\frac{1}{\beta}} (-\beta) k^{1+\frac{1}{\beta}}}, \quad (15)$$

所以, 对于 HUHPM-BBV 模型得到幂率的指数  $\gamma$  为

$$\gamma = \frac{4\delta + \frac{A_1}{\exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]} + A_4}{2\delta + 1}, \quad (16)$$

另外, 我们同样得到 HUHPM-BBV 模型得到幂率的指数  $\gamma$  与混合比的另一种关系:

$$\gamma = \frac{4\delta + \gamma_0 + A_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_1}\right)\right) + A_2 \left(1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_2}\right)\right)}{2\delta + 1}, \quad (17)$$

(12)和(16)式的参数值也列在表 1 中, 理论结果与数值模拟结果如图 5(b), 两者曲线十分一致.

对于 HUHPM-TDE 网络模型, 除了  $\gamma$  与混合比  $d/r$  有关, 还与  $w$  有关, 这时所取  $\beta(\delta, d/r)$  可以是原来(8)和(12)式中的  $\beta$  的另一种变体 [14], 即

$$\beta(w, d/r) = \frac{2w + m}{2w + \left\{ \frac{A_1}{\exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]} + (A_4 - 1) \right\} m}, \quad (18)$$

或

$$\beta(w, d/r) = \frac{2w + m}{2w + \left[ A_1 \left( 1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_1}\right) \right) + A_2 \left( 1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_2}\right) \right) + \gamma_0 \right] m}, \quad (19)$$

所以对于 HUHPM-TDE 模型的幂律指数  $\gamma$  为

$$\gamma = \chi \left[ \frac{\left\{ \frac{A_1}{\exp\left[\left(\frac{d/r}{A_2}\right)^{A_3}\right]} + (A_4 - 2) \right\} m}{2W + m} \right] + 1, \quad (20)$$

或

$$\gamma = \chi \left[ 1 + \frac{\left\{ A_1 \left( 1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_1}\right) \right) + A_2 \left( 1 - \exp\left(-\frac{d/r}{t_2}\right) \right) + (\gamma_0 - 1) \right\} m}{2W + m} \right] + 1, \quad (21)$$

这里结点强度  $s \propto k^\chi$  引入  $\chi$ , 在 HUHPM-BBV 中  $\chi$  是 1, 在 HUHPM-TDE 中  $\chi$  还与  $w$  有关 [14]. 对 (20) 和 (21) 式的参数取值同样示于表 1 中, 理论结果与数值模拟结果示于图 5(c) 中, 两者曲线也达到了一致.

从上述理论(11), (12), (16), (17), (20) 和 (21) 式和图 5 可见, 不论是 HUHPM-BA 网络, 还是 HUHPM-BBV 网络及 HUHPM-TDE 网络, 它们的幂率指数  $\gamma$  与混合比  $d/r$  以及 与权重有关的参数  $(\delta, w, m)$  之间都存在相当复杂的指数及参数反比的复合关系, 并非原来模型中简单的指数关系, 所有公式都与混合比和原来模型的权重参数  $(d/r, \delta, w, \chi)$  之间存在复杂的函数关系, 说明这种错综复杂的拓扑关系与产生的网络混合方式、结构、模型类型(参数)等紧密相关, 揭示了两种混合择优方式既保持了和谐混合共存, 又体现它们之间的相互作用与竞争的状况. 上述 3 种典型网络的理论结果与模拟结果达到了一致的程度. 当然, 进一步探讨更精确的理论极具挑战性.

### 4 HUHPM 网络的小世界特性之一

HUHPM 网络的突出的优点在于, 它不仅具有上述 3 种幂律分布特性和指数  $\gamma$  对混合比的敏感性, 而且同时具有更加接近实际网络的小世界网络的两大特性: 很小的最短平均距离  $L$  和较大的集群系数  $C$ . 我们分别来讨论这两个特性, 并与其他模型的结果相比较.

#### 4.1 最短平均路径距离 $L$ 与混合比 $d/r$ 的关系

作为典型例子, 图 6 给出 HUHPM-BA 在 3 种不同择优连接次序下, 最短平均路径距离  $L$  与混合比  $d/r$  的变化关系, 可见最短平均路径距离  $L$  不受不同择优连接次序的影响. 对于 HUHPM-BA 模型, 最短平均距离  $L$  与混合比

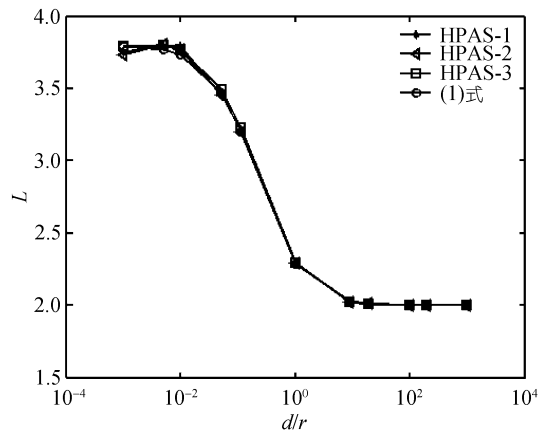


图 6 对于 HUHPM-BA 网络在三种不同择优连接次序下, 最短平均路径距离  $L$  与混合比  $d/r$  的关系

$d/r$  之间存在 3 个阶段: (i) 在  $d/r \leq 1/100$ , 属于随机性占主导情形, 这时  $L$  慢慢下降, 在  $L = 3.7$  附近基本不变; (ii) 在  $1/100 < d/r < 1/1$ ,  $L$  值开始迅速下降, 从 3.7 下降到 2.3, 因为这个阶段随机性占主导, 逐渐向确定性与随机性同等比例的过渡,  $d/r$  接近阈值  $d/r = 1/1$ , 所以最短平均距离变化比较剧烈, 这是很自然的趋势; (iii) 在  $1/1 \leq d/r < \infty$ , 确定性开始占主导, 以后就占绝对优势时期,  $L$  值下降非常慢, 大约从 2.3 下降到 2 附近就基本不变了, 真正达到最短平均距离  $L$ , 即两个结点之间最邻近距离, 这种小世界效应表现得特别突出.

对于 HUHPM-BA 模型, 通过对数值模拟曲线进行理论拟合, 我们得到最短平均距离  $L$  与混合比  $d/r$  的关系:

$$L = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{\left[1 + \frac{d/r}{a}\right]^\alpha}, \quad (22)$$

这里  $l_1 = 3.79754$ ,  $l_2 = 1.99859$ ,  $a = 0.21263$ ,  $\alpha = 1.07902$ . 从(22)式可见, 最短平均路径距离  $L$  基本上随混合比( $d/r$ )的幂函数增加成反比减小, 在  $d/r \geq 10/1$  之后,  $L$  趋于不变, 并且  $L = 2$ , 这表示在完全确定性连接下, 最短平均距离就是两个结点的相邻距离. 图 6 还比较了最短平均路径距离  $L$  与混合比  $d/r$  的模拟曲线和理论算曲线, 表明在 3 种不同连接顺序下不影响数值模拟的结果, 并与理论结果相一致.

进一步, 图 7 分别示出 HUHPM-BBV 模型(在  $\delta < 1$  不同值下)和 HUHPM-TDE 模型(在  $w < 1$  不同值下)最短平均路径距离  $L$  与混合比  $d/r$  的关系图, 每个网络尺寸  $N = 6000$  和  $m = m_0 = 3$ . 从图 7 可见, HUHPM-BBV 网络、HUHPM-TDE 网络与 HUHPM-BA 网络, 既存在相似的  $L$  与  $d/r$  之间的关系, 在  $\delta = 0$ ,  $w = 0$  时与 HUHPM-BA 网络完全一样, 又出现新的特点. 对于 HUHPM-BBV 模型, 在  $\delta$  大于 1 的不同值下曲线形状出现小 V 字形, 即有一个极小的  $L$ , 对应  $d/r = 1/1$  附近;  $\delta$  越大,  $L$  最短值越小. 对于 HUHPM-TDE 模型(图 7(b)),  $L$  值随着  $w$  增加而增加, 存在与 HUHPM-BA 类似的 3 个阶段.

这里提一下: 对于 HUHPM-TDE 模型在  $w \geq 1$  情形, 同样得到随着  $d/r$  增加,  $w$  越大,  $L$  就越小, 再次说明混合择优可使小世界效应比较原来 TDE 模型更接近实际网络.

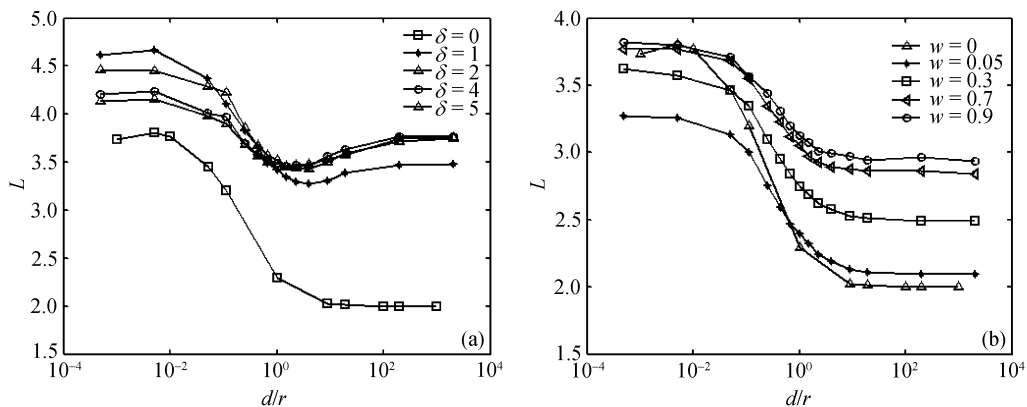


图 7 HUHPM 网络最短平均路径距离  $L$  与混合比  $d/r$  的关系

(a) HUHPM-BBV 模型(在  $\delta > 1$  不同值下); (b) HUHPM-TDE 模型( $w < 1$  情形)

### 4.2 不同模型的最短平均距离 $L$ 比较

进一步, 把UHPM-BA网络与 3 种其他模型下最短平均距离 $L$ 进行具体比较, 这 3 种模型分别是原来的BA模型、随机图模型和文献[3]中 $L$ 的理论计算方程(60), 图 8 示出 3 种结果比较. 从图 8 可见, 确实HUHPM-BA所得到的平均路径距离 $L$ 最短, 其次是方程(60)的理论计算结果 [3], 然后才是原来的BA模型结果, 平均路径距离最大是随机图模型结果. 这些结果证明了采用和谐统一混合择优应用于BA模型后, 从原来次最大平均路径距离 $L$ 一下变成最短的平均路径距离了. 这正是和谐统一混合择优方法的突出优点之一, 说明该模型正好抓住了实际网络的主要本质. 因此, 它更能反映实际网络的拓扑的重要特性之一: 小世界效应的平均路径距离最短, 更接近实际网络情形.

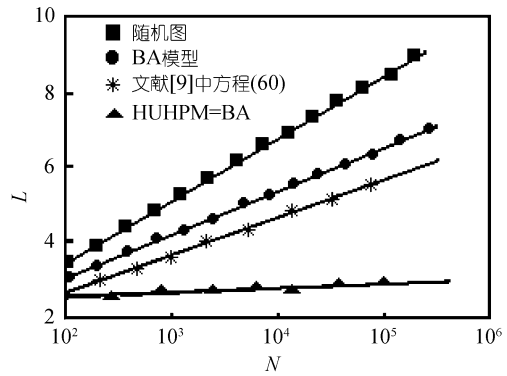


图 8 在  $d/r = 1$  和  $\langle k \rangle = 4$  时 HUHPM-BA 方法与 3 种模型下最小平均路径距离  $L$  比较

▲示 HUHPM-BA 结果; \*示文献[3]中方程(60)理论计算结果; ●示原来的 BA 模型的结果; ■示随机图(ER)模型结果

### 4.3 最短平均路径距离 $L$ 与网络尺寸 $N$ 的关系

为了揭示最短平均路径距离  $L$  与网络规模大小(尺寸) $N$ 之间的关系, 图 9 给出把 HUHPM 在不同  $d/r$  下应用于 3 种类型网络情形, 在半对数横坐标下各条曲线从上到下分别取  $d/r = 1/199, 1/19, 1/9, 1/4, 1/2, 1/1, 2/1, 4/1, 9/1, 19/1, 199/1$ . 从图 9 看到: 对于图 9(a)HUHPM-BA 模型, 以  $L = 2.5$  附近  $d/r = 1/1$  的三角形曲线为分水岭, 上面凡是  $d/r < 1/1$  的曲线  $L$  都是随着  $N$

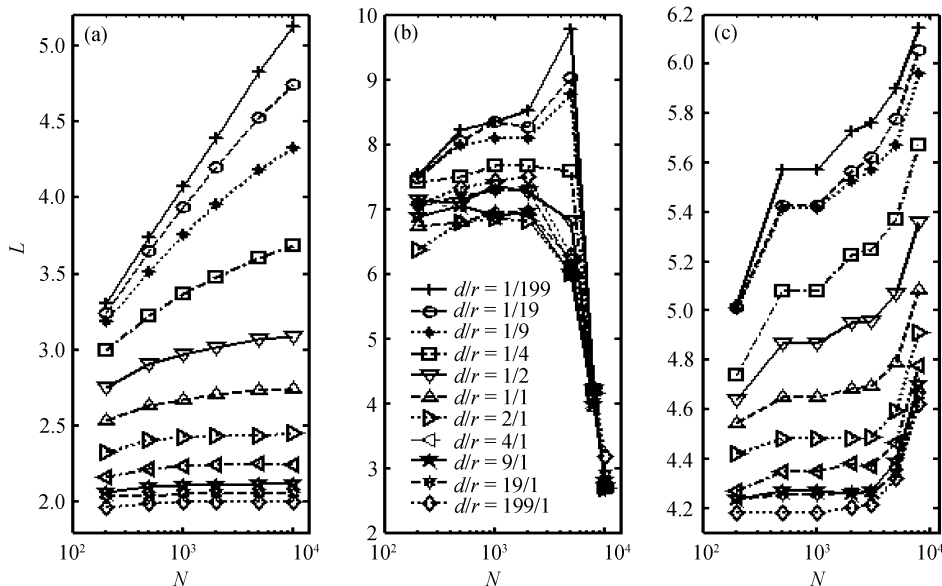


图 9 在不同  $d/r$  下最短平均路径距离  $L$  与网络规模  $N$  之间的关系

(a) HUHPM-BA 网络; (b) HUHPM-BBV 网络; (c) HUHPM-TDE 网络

的增加而增加, 这是随机性占主导的结果, 随机性越来越大,  $L$  上升越来越大; 但是凡是  $d/r > 1/1$  的曲线,  $L$  都是开始随着尺寸  $N$  的增加稍微增加, 变化很慢, 当混合比越来越大,  $L$  基本不变了. 可见混合比  $d/r$  对  $L$  有明显的影响. 增加确定性可以减小最短平均距离  $L$ . 对于图 9(b) 中 HUHPM-BBV 网络  $d/r = 1/4$  的方块曲线为分水岭, 上面凡是  $d/r < 1/4$  的曲线  $L$  随着  $N$  的增加存在一个最大值, 这是随机性占主导的结果, 随机性越来越大,  $L$  最大值也越来越大, 这与原来随机网络理论一致; 但是凡是  $d/r > 1/4$  后, 曲线  $L$  都是随着  $N$  的迅速下降,  $d/r$  值越来越大,  $L$  值越来越小, 最终下降到 2 ~ 3 之间. 显然, 混合比  $d/r$  对  $L$  有十分明显的影响. 对于图 9(c) 中 HUHPM-TDE 模型,  $L$  都是随着  $N$  的增加而增加, 在  $N$  比较小时增加比较慢, 但是在  $N > 10^3$  之后, 随着  $N$  增加, 引起  $L$  迅速上升, 这说明交通流驱动(TDE)模型容易导致  $L$  随着  $N$  增加而明显增加, 但是当增加混合比  $d/r$  后仍然可以减小 TDE 模型的最短平均距离  $L$ , 这样更加接近实际网络情形.

#### 4.4 $L$ 与参数之间关系的理论分析

从理论上我们能得到  $L$  随  $\gamma$  (或  $d/r$ ) 增加而下降的有趣的结论, 这是因为现在  $L$  是  $(\gamma, N, m)$  的函数, 而且  $\gamma$  又是  $d/r$  的函数, 所以  $L$  又同  $d/r$  密切相关. 如果  $\gamma$  随  $d/r$  的增加而上升, 那么  $L$  随  $\gamma$  增加而下降. 事实上, 从一般随机网络平均距离公式出发, 考虑确定性因素可能引起的影响而引进调整参数  $B$ , 我们有

$$l_{BA} = \frac{\ln(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle) - 2\langle \ln k \rangle + \ln N - \zeta}{\left[ \ln \left( \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \right) - 1 \right] B} + \frac{1}{2}, \quad (23)$$

这里  $\zeta \approx 0.5772$  是 Euler 常数.

对于 HUHM-BA 网络情形, 我们有

$$\langle k \rangle = \int_m^{mN^\beta} k P(k) dk = \int_m^{mN^\beta} k 2m^{\gamma-1} k^{-\gamma} dk \xrightarrow{\lim N \rightarrow \infty} \frac{2m}{\gamma-2}. \quad (24)$$

$$\langle k^2 \rangle = \int_m^{mN^\beta} k^2 P(k) dk = \int_m^{mN^\beta} k^2 2m^{\gamma-1} k^{-\gamma} dk \xrightarrow{\lim N \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{2m^2}{\gamma-3}, & (d/r > 0), \\ m^2 \ln N, & (d/r = 0 \text{ 或 } \gamma = 3), \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle \ln k \rangle &= \int_m^{mN^\beta} \ln(k) P(k) dk = \int_m^{mN^\beta} \ln(k) 2m^{\gamma-1} k^{-\gamma} dk \\ &= 2m^{\gamma-1} \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma} \ln k \Big|_m^{mN^\beta} - \frac{2m^{\gamma-1}}{1-\gamma} \int_m^{mN^\beta} \frac{k^{1-\gamma}}{k} dk \xrightarrow{\lim N \rightarrow \infty} \frac{2 \ln m}{\gamma-1} + \frac{2}{(\gamma-1)^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

把(24) ~ (26)式代入(23)式, 我们得到 HUHM-BA 网络的平均距离计算公式:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} l_{BA}^{\text{HUHM}}(d/r, N, m) = \frac{\ln \left( \frac{2m^2}{\gamma-3} - \frac{2m}{\gamma-2} \right) - \frac{4 \ln m}{\gamma-1} - \frac{4}{(\gamma-1)^2} + \ln N - \zeta}{\left[ \ln \left( \frac{m(\gamma-2)}{\gamma-3} \right) - 1 \right] B} + \frac{1}{2}, \quad (27)$$

这里  $\gamma > 3$  或  $d/r > 0$ .

同理可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} l_{BA}^{HUHM}(d/r, N, m) = \frac{\ln(m^2 \ln N - 2m) - 2 \ln m - 1 + \ln N - \zeta}{\left[ \ln\left(\frac{m \ln N}{2}\right) - 1 \right] B} + \frac{1}{2}, \quad (28)$$

这里  $\gamma = 3$  或  $d/r = 0$ .

根据(27)和(28)式, 我们取  $N = 6000, m = 3, B = 40$ , 有

$$l_{BA}^{HUHM}(\gamma) = \frac{\ln\left(\frac{12}{\gamma-3}\right) - \frac{4 \ln 3}{\gamma-1} - \frac{4}{(\gamma-1)^2} + 8.1309}{4} + \frac{1}{2}. \quad (29)$$

图 10(a)给出对于 HUHPM-BA 网络  $L$  与  $\gamma$  关系的理论曲线与数值模拟曲线的比较, 我们看到两者的变化趋势是一致的.

对于 HUHPM-BBV 模型, 从(23)式出发, 有

$$\langle k \rangle = \int_m^{mN^\beta} k P(k) dk = \int_m^{mN^\beta} k \frac{1}{m^{2-\gamma} \left(\frac{1}{\gamma-1}\right) k^\gamma} dk \xrightarrow{\lim N \rightarrow \infty} \frac{\gamma-1}{\gamma-2}, \quad (30)$$

$$\langle k^2 \rangle = \int_m^{mN^\beta} k^2 P(k) dk = \int_m^{mN^\beta} k^2 \frac{1}{m^{2-\gamma} \left(\frac{1}{\gamma-1}\right) k^\gamma} dk \xrightarrow{\lim N \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{m(\gamma-1)}{(\gamma-3)}, & (d/r > 0), \\ m \ln N, & (d/r = 0 \text{ 或 } \gamma = 3), \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \langle \ln k \rangle &= \int_m^{mN^\beta} \ln(k) P(k) dk = \int_m^{mN^\beta} \ln(k) \frac{1}{m^{2-\gamma} \left(\frac{1}{\gamma-1}\right) k^\gamma} dk \\ &= \frac{-k^{-\gamma+1}}{m^{2-\gamma}} \ln k \Big|_m^{mN^\beta} + \int_m^{mN^\beta} \frac{mN^\beta k^{-\gamma+1}}{m^{2-\gamma} k} dk \xrightarrow{\lim N \rightarrow \infty} \frac{\ln m}{m} + \frac{1}{m(\gamma-1)}, \end{aligned} \quad (32)$$

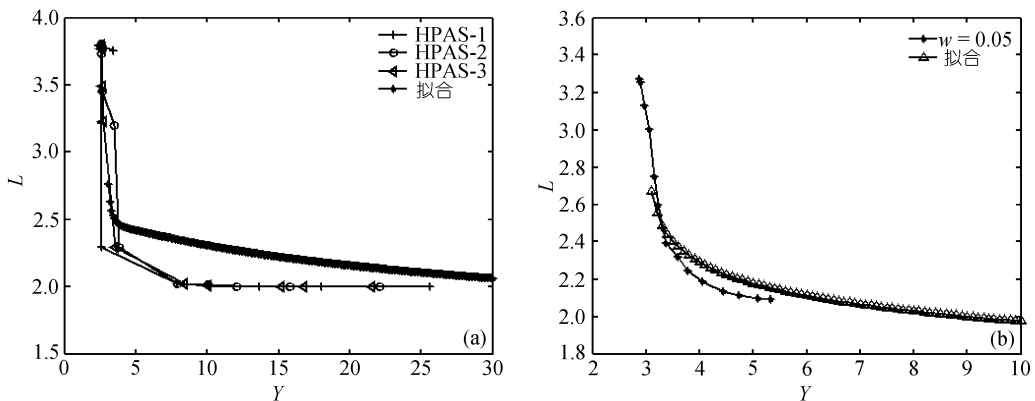


图 10 HUHPM 模型下  $L$  与  $\gamma$  关系的理论曲线与数值模拟曲线的比较

(a) HUHPM-BA 网络; (b) HUHPM-TDE 网络

把(30) ~ (32)式代入(23)式, 我们得到 HUHPM-BBV 网络的平均距离计算公式:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} l_{BBV}^{HUHM}(d/r, N, m) = \frac{\ln \left[ m(\gamma-1) \left( \frac{1}{\gamma-3} - \frac{1}{\gamma-2} \right) \right] - 2 \left[ \frac{\ln m}{m} + \frac{1}{m(\gamma-1)} \right] + \ln N - \zeta}{\left[ \ln \frac{m(\gamma-2)}{(\gamma-3)} - 1 \right] B} + \frac{1}{2}, \quad (33)$$

这里  $\gamma > 3$  或  $d/r > 0$

如果取  $N = 6000$ ,  $m = 3$ ,  $B = 25$ , 我们有

$$l_{BBV}^{HUHM}(\gamma) = \frac{\ln \left[ \frac{3}{(\gamma-3)} \right] - \frac{2}{3(\gamma-1)} + 7.3985}{2.4653} + \frac{1}{2}, \quad (34)$$

对于 HUHPM-TDE 模型, 从(23)式出发, 与上述类似, 可分别求  $\langle k \rangle$  和  $\langle k^2 \rangle$  的表达式, 然后代入 (23)式, 我们得到 HUHPM-TDE 网络的平均路径距离的计算公式:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} l_{TDE}^{HUHM}(d/r, N, m) \\ &= \frac{\ln \left[ m^\chi(\gamma-1) \left( \frac{1}{\gamma-3} - \frac{1}{\gamma-2} \right) \right] - 2 \left[ \frac{1}{m^\chi} \ln m^\chi + \frac{1}{m^\chi(\gamma-1)} \right] + \ln N - \zeta}{\ln \frac{m^\chi(\gamma-2)}{(\gamma-3)} B} + \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $\gamma > 2$ ,  $\gamma \neq 3$  或  $d/r > 0$ , 如果取  $\chi = 2$ ,  $N = 6000$ ,  $m = 3$ ,  $B = 4$ , 我们有

$$l_{TDE}^{HUHM}(\gamma) = \frac{\ln \left[ \left( \frac{9}{\gamma-3} \right) \right] - \frac{2}{9(\gamma-1)} + 8.6192}{4.788} + \frac{1}{2}, \quad (36)$$

则从图 10 给出 HUHPM-BA 网络和 HUHPM-TDE 网络的  $L$  与  $\gamma$  关系的理论曲线与数值模拟曲线的比较, 我们看到两者的变化趋势吻合得很好.

## 5 HUHPM 网络的小世界效应之二

小世界效应之二是具有大的群聚系数  $C$ , 它是表征复杂网络局部集团化的特性的一个拓扑几何量. 平均群聚系数  $C$  越大, 则网络局部集团化程度越高, 在 HUHPM 模型下, 平均群聚系数  $C$  不仅与网络结构参数有关, 而且与混合比密切联系.

### 5.1 群聚系数 $C$ 与混合比 $d/r$ 的关系

图 11 示出 HUHPM 分别应用于三种模型的  $C$  与混合比  $d/r$  之间的关系比较. 从图 11 可见, 3 种情形都共同存在 3 个阶段, 有趣的是, 与图 7 最短平均路径距离  $L$  与混合比  $d/r$  之间的变化趋势刚好相反, 存在以纵坐标为轴在横坐标正方向成镜像关系, 是反对称曲线. 对于图 11(a) HUHPM-BA 模型, 第一阶段在  $d/r \leq 1/10$ , 属于随机性占主导情形, 这时  $C < 0.02$ , 基本是一个很小的常数. 第二阶段在  $1/10 \leq d/r < 10/1$ ,  $C$  值开始迅速上升, 从 0.2 上升到 0.9, 在  $d/r = 1/1$  处  $C = 0.5$ , 在  $10/1 < d/r < 100/1$ ,  $C$  值继续上升到 0.98, 这个阶段确定性占主导, 确定性发挥了关键作用. 第三阶段  $100/1 < d/r < \infty$  确定性占绝对主导,  $C$  数值从 0.98 逐渐接近于 1, 并保持

不变. 对于图 11(b)HUHPM-BBV 模型, 变化规律与 BA 模型基本相似, 只不过, 随着  $\delta$  增加, 开始阶段  $C$  值比 HUHPM-BA 模型有所增加, 大约在 0.16 附近上升, 其他两个阶段基本相同. 对于图 11(c)HUHPM-TDE 模型, 变化规律与 BBV 模型基本相似, 只不过, 当  $w < 1$  情形, 随着  $w$  增加开始阶段  $C$  值比 HUHPM-BBV 更大, 大约  $C > 0.4$ , 但是第三阶段中  $C$  值比 HUHPM-BA 模型和 HUHPM-BBV 模型都小, 不到 1, 约在 0.8 附近, 随着  $w$  增加,  $C$  值继续减小. 因此  $C$  值同时与混合比  $d/r$  及权参数  $w$  密切相关. 根据上述定义, 对于 HUHPM, 我们找到数值模拟曲线的理论计算公式:

$$C = c_2 + (c_1 - c_2) / \{1 + [(d/r) / c_3]^q\}, \tag{37}$$

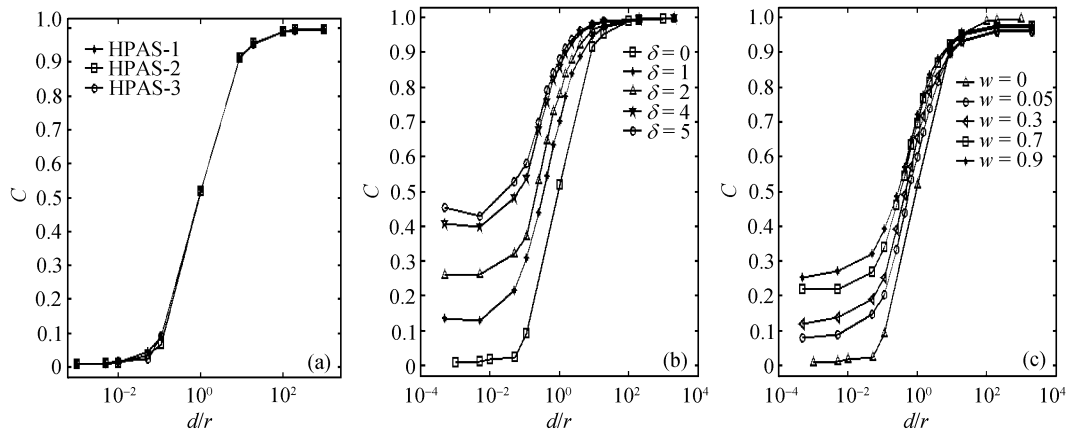


图 11 平均集群系数  $C$  与混合比  $d/r$  之间的关系  
(a) HUHPM-BA 网络; (b) HUHPM-BBV 网络; (c) HUHPM-TDE 网络,  $w < 1$  情形

表 2 列出 3 种类型网络的计算参数. 图 12 分别为 3 种类型网络的平均群聚系数  $C$  与混合比  $d/r$  关系曲线以及 3 种模型模拟结果与理论计算结果比较, 从图 11 可见, 彼此吻合得非常好.

表 2 3 种模型的群聚系数计算(37)式中的参数

模型	控制变量/参量			系数			
	$d/r$	$\delta$	$W$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$q$
HUHPM-BA	是			0.00543	0.99482	0.94419	1.11489
	是	1		0.12267	0.99959	0.46742	0.92043
HUHPM-BBV	是	2		0.25161	0.99115	0.40904	1.07934
	是	4		0.39859	0.99497	0.29878	1.0556
	是	5		0.43949	0.99567	0.27692	1.07346
	是		0.05	0.07608	0.96411	0.66542	0.9254
HUHPM-TDE	是		0.3	0.11867	0.963	0.56915	0.94334
	是		0.7	0.2102	0.97282	0.54682	0.96281
	是		0.9	0.25726	0.97951	0.55727	0.95256

总之, 混合择优模型具有很高群聚系数, 3 种典型模型的群聚系数随混合比的变化趋势基本一致, 增加混合比有利于网络局部集团化.



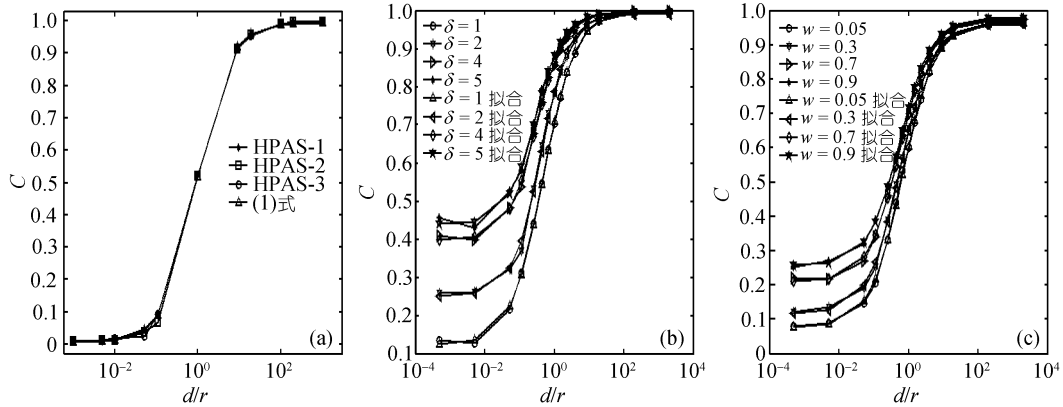


图 12 对于 HUHPM 模型平均集群系数  $C$  与混合比  $d/r$  关系, 模拟曲线与理论拟合结果比较  
(a) HUHPM-BA 网络三种混合择优; (b) HUHPM-BBV 网络; (c) HUHPM-TDE 网络

## 5.2 不同模型的群聚系数比较

进一步, 把 HUHPM-BA 模型与 3 种模型下群聚系数与网络尺寸  $N$  的关系曲线进行具体比较, 这 3 种模型分别是 HUHPM, 原来的 BA 模型和随机机图模型, 图 13 给出 3 种结果比较. 从图 13 可见, 方块为随机机图模型结果,  $C$  值最短; 圆点为原来的 BA 模型的结果,  $C$  值次大; 星号为 HUHPM-BA 结果,  $C$  值最大. 这再次说明和谐统一混合择优模型可提高群聚系数, 并且在同等网络尺寸  $N$  下, 它比其他网络能够达到最大的群聚系数.

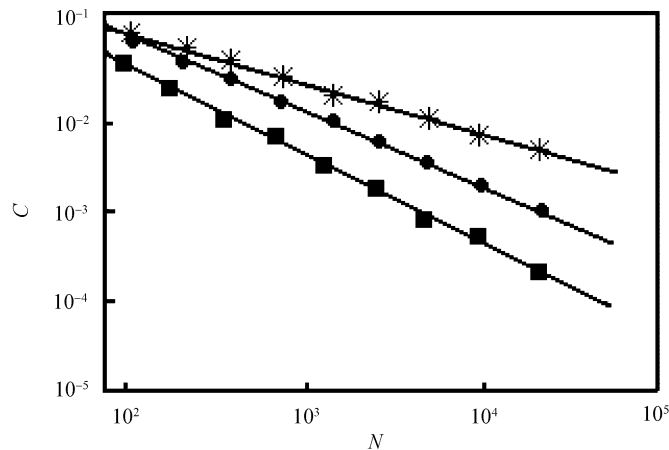


图 13 HPM-BA 模型与其他二种模型下的群聚系数  $C$  与网络尺寸  $N$  的关系曲线比较  
■ 示随机机图模型结果; ● 示原来的 BA 模型的结果; \* 示 HUHPM-BA 结果

## 5.3 群聚系数 $C$ 与网络尺寸 $N$ 的关系

在不同  $d/r$  时群聚系数  $C$  与网络尺寸  $N$  的关系示于图 14 中, 图 14 中在半对数横坐标下各条曲线从上到下分别取  $d/r=1/199, 1/19, 1/9, 1/4, 1/2, 1/1, 2/1, 4/1, 9/1, 19/1, 199/1$ . 从图 14 看到, 对于图 14(a)和(b)两种模型, 变化趋势十分相似, 以  $d/r=1/1$  为分水岭, 对于  $d/r > 1/1$  上面一些曲线, 即确定性占主导情形, 群聚系数  $C$  不依赖于网络尺寸  $N$ , 但是  $d/r$  值越大, 集群系数  $C$

越大,  $C$  对  $d/r$  值有明显的依赖性. 对于  $d/r < 1/1$ , 即随机性占主导情形,  $C$  随  $N$  增加而减小,  $N$  值越大,  $C$  越小. 对于图 14(c) HUHPM-TDE 模型, 不论  $d/r$  多少,  $C$  都随  $N$  增加而减小, 这是与原来 TDE 模型的产生机制有关.

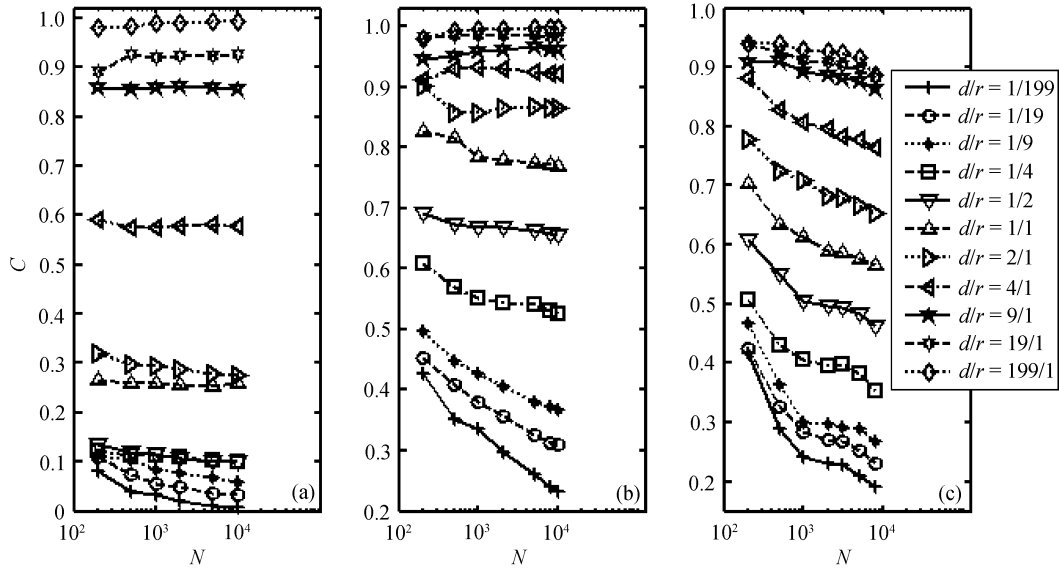


图 14 HUHPM 方法应用于三种类型网络情形在不同  $d/r$  时集群系数  $C$  与网络尺寸  $N$  的关系  
(a) HUHPM-BA 模型; (b) HUHPM-BBV 模型; (c) HUHPM-TDE 模型

## 6 $C$ 与 $L$ 之间的关系

我们可用理论分析给出群聚系数  $C$  与平均路径距离  $L$  之间存在一个有趣的关系. 如果从随机网络的一般结论出发 [3], 通常有  $L \propto \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}$ , 而  $C \propto \frac{\langle k \rangle}{N}$ , 这里  $\langle k \rangle = pN$ ,  $p$  是  $N$  结点连接概率, 由上两式可见,  $L$  和  $C$  随  $\langle k \rangle$  变化趋势刚好相反, 这分别与上述数值模拟看到的图 6, 7 和 11 中相对应的曲线变化的趋势是一致的, 即  $C$  与  $L$  随  $d/r$  的变化刚好相反.

当  $N$  和  $k$  较大时, 运用罗比塔法则, 我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L \propto \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)} \propto \frac{\langle k \rangle}{N} \propto \lim_{N \rightarrow \infty} C. \quad (38)$$

由此可见, 当  $N$  和  $k$  较大时, 集群系数  $C$  与平均路径距离  $L$  的公式具有相似的形式. 正好集群系数  $C$  同  $d/r$  关系式(37)与平均路径距离  $L$  同  $d/r$  关系式(23)也是完全相似, 但是它们各自与数值曲线符合得很好. 对于  $C$  方程:

$$C \propto \frac{\langle k \rangle}{N} = p = c_2 + \frac{c_1 - c_2}{1 + \left(\frac{d/r}{c_3}\right)^q}, \quad (39)$$

而  $L$  方程为

$$L = \frac{\ln N}{\ln p + \ln N} = L = L_2 + \frac{L_1 - L_2}{1 + \left(\frac{d/r}{L_3}\right)^h}. \quad (40)$$

从上面的计算, 图 6 和 11 的结果都表明这两者随  $d/r$  变化具有相反的趋势, 并且它们曲线形状对于纵轴具有镜像对称的特点. 注意到: 两个表达式十分类似而变化趋势却相反, 曲线的特性完全取决于两个不同的差值( $C_1 - C_2$ )和( $L_1 - L_2$ ), 一个是正值, 另一个是负值. 这个有趣的关系有助于了解混合复杂网络的拓扑性质的关系.

## 7 结论和展望

综观全文, 我们提出和研究了和谐统一的混合择优模型及其主要特性, 该模型适用于无权及含权的多种类型的网络, 作为典型模型实例, 以无权的 HUHPM-BA 网络, 含权的 HUHPM-BBV 网络和 HUHPM-TDE 网络等进行了详细讨论, 发现了一些共同的规律, 特别是无标度的幂律指数  $\gamma$  对混合比  $d/r$  具有高敏感性(依赖性); 与现有的无权及含权模型比较, HUHPM 模型具有最短平均路径长度  $L$  小, 最大群聚系数  $C$ , 且可以随  $d/r$  变化调整  $L$  和  $C$  的大小; HUHPM 模型的拓扑特性更加符合实际网络. 这些特性与混合择优的顺序无关. 虽然随机择优方式是产生结点度分布的幂函数形式的主要机制, 但是确定性择优方式同样发挥重要的作用, 可以抑制和消除度分布的随机重尾巴; 说明该模型揭示了随机性择优与确定性择优和谐混合是实际网络产生无标度和小世界效应的最本质机制之一. 该简洁的模型只通过一个适当的混合比, 使得随机择优与确定性择优达到了和谐统一, 比其他现有模型更加接近真实世界网络, 可望推广应用于众多的网络类型中去.

预计上述发现具有应用潜力, 我们考虑主要有以下 3 方面的可能应用<sup>[20]</sup>:

(i) 由于度分布和边权的幂函数标度律的负指数  $\gamma$  对混合比  $d/r$  的变化具有敏感性, 这一发现可利用网络控制拓扑特性, 如作为一种新的通信消息加密手段, 应用于密码学和保密通信领域, 与利用混沌轨道对初始条件的敏感性相类似;

(ii) 由于最短平均路径距离和群聚系数可随混合比  $d/r$  大小而调控, 这样人们就可以根据实际需要和要求来设计满足需要的网络结构, 以实现工程技术上不同特殊的用途;

(iii) 利用上述发现, 有助于理解人类社会和自然界中发生的某些网络特性.

总之, 本文提出的混合模型及其一些发现, 既揭示和解释了实际复杂网络所产生的本质机制和若干普适特性, 并且作了初步理论分析, 得到了有关拓扑特性的理论计算公式; 还提出了有关应用研究的设想, 指出了发展潜力. 应该看到, HUHPM 的精确理论分析极具挑战性, 模型还可以进一步完善, 我们下一步将通过引入两个新的混合比, 把它推广为大统一混合网络模型, 以便更深入地探索网络科学的规律及其应用.

## 参 考 文 献

- 1 Watts D J, Strogats S H. Collective dynamics of small world networks. *Nature*, 1998, 393(6684): 440—442[DOI]
- 2 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286(5439): 509—512[DOI]
- 3 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74(1): 47—97[DOI]
- 4 Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Phys Lett A*, 1999, 263: 341—346[DOI]

- 5 Albert R, Jeong H, Barabási A L. Diameter of the worldwide web. *Nature*, 1999, 401: 130—131[DOI]
- 6 Albert R, Barabási A L, Jeong H. The internet's achilles heel: error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 2000, 406: 378—382[DOI]
- 7 Aldana M, Cluzel P. A natural class of robust networks. In: *Proceedings of the National Academy of Science. USA*, 2003, 100(15): 8710—8714
- 8 Newman M E J, Moore C, Watts D J. Mean-field solution of the small-world network model. *Phys Rev Lett*, 2000, 84(14): 3201—3204[DOI]
- 9 Newman M E J. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Phys Rev E*, 2001, 64(1): 016131[DOI]
- 10 Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410: 268—276[DOI]
- 11 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*, 2003, 45(2): 167—256[DOI]
- 12 方锦清. 迅速发展的复杂网络研究与面临的挑战. *自然杂志*, 2005, 27(5): 269—275
- 13 Barrat A, Barthelemy M, Vespignani A. Weighted evolving networks: Coupling topology and weight dynamics. *Phys Rev Lett*, 2004, 92(22): 228701[DOI]
- 14 Wang W X, Hu B H, Ya B, et al. General dynamics of topology and traffic on weighted technological networks. *Phys Rev Lett*, 2005, 94(18): 188702[DOI]
- 15 Barabási A L, Ravasz E, Vicsek T. Deterministic scale-free networks. *Physica A*, 2001, 299(3-4): 559—564[DOI]
- 16 Comellas F, Ozon J, Peters J G. Deterministic small-world communication networks. *Inf Proc Lett*, 2000, 76(1-2): 83—90[DOI]
- 17 伊利亚·普利高津, 著. 确定性的终结——时间、混沌与新自然法则. 上海: 上海科技出版社, 1998
- 18 Fang J Q, Liang Y. Topological properties and transition features generated by a new hybrid preferential model. *Chin Phys Lett*, 2005, 22(10): 2719—2722[DOI]
- 19 Lu X B, Wang X F, Fang J Q. Topological transition features and synchronizability of a weighted hybrid preferential network. *Physica A*, 2006, 371: 841—850[DOI]
- 20 Fang J Q, Bi Q. Effects of hybrid ratio on topological and dynamical properties in HUHPM. *Proceedings of The Forth International Conference on Nonlinear Science. Korea: Pohang*, 2006. 34