

## 1. 简述

矩的概念：对于连续灰度函数  $f(x, y)$  ( $\cdot$ )，它的  $p+q$  阶二维原点矩为：

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad p, q = 0, 1, 2, \dots$$

针对图像特征往往具有平移、旋转、比例、反射、亮度等方面不变的属性，Hu 在矩概念的基础上提出了七个不变矩，并证明了七个矩的平移不变性、比例不变性和旋转不变性等性质。不变矩能够描述图像的整体性质，从而在边缘提取、图像匹配及目标识别中得到了广泛的应用。

不变矩的应用过程一般包括：1) 选择合适的不变矩类型；2) 选择分类器（如神经网络、最短距离等）；3) 如果是神经网络分类器，则需要计算学习样例的不变矩去训练神经网络；4) 计算待识别对象的不变矩，输入神经网络就可得到待识别对象的类型，或者计算待识别对象不变矩与类别对象不变矩之间的距离，选择最短距离的类别作为待识别对象的类别。

## 2. 本质

可以看出，不变矩作用主要目的是描述事物（图像）的特征。人眼识别图像的特征往往又表现为“求和”的形式，因此不变矩是对图像元素进行了积分操作。

不变矩能够描述图像整体特征就是因为它具有平移不变性、比例不变性和旋转不变性等性质。

然而，另一方面图像的各阶不变矩究竟代表的什么特征很难进行直观的物理解释。

## 3. 正交不变矩

正交不变矩的研究是不变矩理论发展一个重要的方向，也就是 Zernick 矩，相对 Hu 矩的 C3、C4、C5 和 C7 存在信息冗余的缺点，Zernick 矩不具有任何冗余信息，而且非常方便进行图像重构。但无法构造仿射不变矩、图像必须限制在正交区域内，而且计算复杂。

## 4. 仿射不变矩

仿射变换， $x \mapsto Ax + b$ ，很明显，当 A 为单位矩阵的倍数时，该仿射变换就是缩放加平移，在二维空间中一般仿射变换将对应物体在三维空间旋转对应的投影。二维仿射不变矩能够在深度信息未知的情况下识别三维空间中绕坐标轴旋转的图像。但仿射不变矩构造需要应用到复杂的代数不变量理论，已报道的仿射不变矩并不多。

现有图像不变性识别方法只是针对平移、缩放、旋转进行不变性识别，现实中图像可能还存在其他的仿射变换，（如镜头倾斜所引起的图像倾斜），所以研究一般性的仿射不变矩算法也非常有必要。