小波分析

Via,Math,Sysu,China

2008-6-25 输入

1.设函数$\varphi(x)$连续有紧支集,且满足$\hat{\varphi}(0)=0$.若函数f满足

$|f(t)-f(s)|\le K|t-s|^{\alpha}$, $K>0,0<\alpha<1$

记$d_{j,k}=\langle f,\varphi_{j,k}\rangle$.证明存在$M>0$,使得$|d_{j,k}|\le M2^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)j}$.

2.设函数$\varphi\in L^1(R)\cap L^2(R)$,求解方程

$$\varphi(t)=\varphi(2t)+\varphi(2t-1)$$

3.设函数$\varphi(t)=\chi_{[0,3]}(t)$.

(1)求它的 Fourier 变换.

(2)求φ所满足的双尺度方程.

(3)判断函数系$\{\varphi(t-k)\}_{k\in Z}$是否是由$\varphi$所生成的平移不变子空间的Riesz基,并给出理由.

4.设滤波器系数$\{h_k\}$和$\{g_k\}$满足

$$\varphi(t)=\sum_k h_k\varphi(2t-k)$$

$$\psi(t)=\sum_k g_k\varphi(2t-k)$$

其中$g_k=(-1)^k\overline{h}_{1-k}$,且$\{\varphi(t-k)\}_{k\in Z}$为标准正交系.记

$$c_{j,k}=\langle f,\varphi_{j,k}\rangle,\ d_{j,k}=\langle f,\psi_{j,k}\rangle$$

证明:对任何$j,k\in Z$,有

(a)分解算法:

$$c_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\ell}\overline{h}_{\ell-2k}c_{j+1,\ell}$$

$$d_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l}\overline{g}_{l-2k}c_{j+1,k}$$

(b)重构算法:

$$c_{j+1,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l}\left(h_{k-2l}c_{j,l}+g_{k-2l}d_{j,l}\right)$$

5.设$\psi\in L^1(R)\cap L^2(R)$.

(1)写出函数ψ为可容许小波的条件

$C_\psi=?$

(2)定义

$$(Wf)(s,b)=\int f(t)\frac{1}{\sqrt{|s|}}\overline{\psi\left(\frac{t-b}{s}\right)}dt$$

利用f的 Fourier 变换,给出Wf的表达式.

(3)证明,对任意$f,g\in L^2(R)$,有

$$\int_{\mathcal{R}}\int_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{W}f\right)(s,b)\overline{\left(\mathcal{W}g\right)(s,b)}\,db\frac{ds}{s^{2}}=C_{\psi}\left\langle f,g\right\rangle$$