

求  $y = \frac{x+1}{x(1-x)}$ ,  $x \in (0,1)$  的最小值。

**解法 1** (高等数学) 由

$$y' = \frac{(x-x^2) - (x+1)(1-2x)}{[x(1-x)]^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{[x(1-x)]^2} = \frac{(x+1)^2 - 2}{[x(1-x)]^2}$$

知  $y$  在  $x = \sqrt{2} - 1$  处取得最小值

$$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

**解法 2** (初等数学, 貌似初二学的) 由  $y = \frac{x+1}{x(1-x)}$  知

$$yx^2 + (1-y)x + 1 = 0$$

把  $y$  看成已知, 则对二次函数  $f(x) = yx^2 + (1-y)x + 1$  有

- $f(0) = 1 > 0$
- $f(1) = 2 > 0$

而明显  $y > 0$ , 考虑  $f$  之图像, 我们有条件

$$\begin{cases} \Delta = (1-y)^2 - 4y \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{1-y}{2y} \in (0,1) \end{cases}$$

解得  $y \geq 3 + 2\sqrt{2}$ 。

**注** 看 [On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems](#) 第 368 页, 让我想起了初二的东西。

文件名: 求一函数最小值.doc  
目录: E:\我的文档  
模板: C:\Documents and Settings\ZHANG ZUJIN\Application  
Data\Microsoft\Templates\Normal.dot  
标题:  
主题:  
作者: zjzhang  
关键词:  
备注:  
创建日期: 2009-9-28 23:37:00  
修订号: 44  
上次保存日期: 2009-9-29 12:36:00  
上次保存者: zjzhang  
编辑时间总计: 17 分钟  
上次打印时间: 2009-9-29 12:36:00  
打印最终结果  
    页数: 1  
    字数: 92 (约)  
    字符数: 530 (约)