九引理

[2008年03月25日代数课上袁平之老师亲笔写下]

Chu Chin Chang

Pure Math, Sysu, zhangzujin360732@163.com

To Professor Yuan

若有 $A-$模及 $A-$模同态如下,各行各列均为正合的[exact].证明:若 f_{36} 是单的,则 f_{78} 是单的.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_4 & \to & M_5 & \to & M_6 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M_7 & \to & M_8 & \to & M_9 & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

证明 记由模 M_i 到 M_j 的 $A-$模同态为 f_{ij} ,则若 $f_{78}(x_7)=0$,则由 f_{47} 的满性,

$$\exists x_4\in M_4,\ s.t.\ f_{47}(x_4)=x_7$$

而

$$0=f_{78}(x_7)=f_{78}\circ f_{47}(x_4)=f_{58}\circ f_{45}(x_4)$$

设 $x_5=f_{45}(x_4)$,则

$$x_5\in Ker(f_{58})=Im(f_{25})$$

而

$$\exists x_2\in M_2,\ s.t.\ f_{25}(x_2)=x_5$$

现,

$$f_{36}\circ f_{23}(x_2)=f_{56}\circ f_{25}(x_2)=f_{56}(x_5)=f_{56}\circ f_{45}(x_4)=0$$

因 f_{36} 是单的,有

$$x_2\in Ker(f_{23})=Im(f_{12})$$

而

$$\exists x_1\in M_1,\ s.t.\ f_{12}(x_1)=x_2$$

这样,

$$f_{45}\circ f_{14}\left(x_1\right)=f_{25}\circ f_{12}\left(x_1\right)=f_{25}\left(x_2\right)=x_5=f_{45}\left(x_4\right)$$

由 f_{45} 的单的,有

$$f_{14}\left(x_1\right)=x_4$$

而

$$x_7=f_{47}\left(x_4\right)=f_{47}\circ f_{14}\left(x_1\right)=0$$

得证.

注记 开始的时候拼命写,有的地方弄丢了,很乱,字迹也有点模糊了,后才重新写下.看了下手机,半小时已过去...以后须要笔到心到而不乱!

诚哉妙也!自己做的就是比看的好! 附图如下 **[** 因 **Mathtype** 的不方便,f_{ij} 并未标出. **]**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & M_1\left(x_1\right) & \to & M_2\left(x_2\right) & \to & M_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & M_4\left(x_4\right) & \to & M_5\left(x_5\right) & \to & M_6 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M_7\left(x_7\right) & \to & M_8\left(0\right) & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$