关于椭圆和Q－共轭的几何解释　　　　　　　　　邹谋炎

椭圆相关的共轭性质在最优化计算中有用。此注记可为学习者提供方便。

椭圆公式的矩阵－向量表达式如下

$$[x-x_0\ \ y-y_0]\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}=1。 \tag{1}$$

这是一个以(x_0,y_0)为中心的椭圆，其中的矩阵必须正定，即满足条件$AC-B^2>0$。这个表达式中含有 5 个自由参数：$\{x_0,y_0,A,B,C\}$。椭圆轴向与x轴的夹角为θ，有公式

$$\tan(2\theta)=\frac{2B}{A-C}。 \tag{2}$$

如果$A=C$，则$\theta=\pm\pi/4$。若$B=0$并且$A=C$，则得到正圆。利用坐标旋转变换

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

可以将椭圆公式（1）变成主轴形：

$$(\boldsymbol{x}')^T\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}'=1， \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{R}\cdot\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$，而$\lambda_1$和$\lambda_2$是矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$的两个特征值，

$$\lambda_{1,2}=\tfrac{1}{2}(A+C\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2})。 \tag{5}$$

由公式（4），椭圆的长轴和短轴分别是$1\big/\sqrt{\lambda_{1,2}}$，这里约定开根只取正值。

为了简化进一步结果的记号，在以下讨论中限定椭圆的中心在坐标原点处。椭圆公式为

$$[x\ \ y]\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1, \qquad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}, \tag{6}$$

并满足$AC-B^2>0$。假定$p_0=(x_0,y_0)$是椭圆上的一个点。以p_0为切点，椭圆的切线方程可以写成

$$[x_0\ \ y_0]\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1 \tag{7}$$

使用向量描述，可以记$\boldsymbol{p}_0=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$，是一个从坐标原点到$(x_0,y_0)$的一个向量。容易证明，如果$\boldsymbol{p}_M$是椭圆在$p_0$点切线上的一个向量，则有Q－共轭关系

$$\boldsymbol{p}_0^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_M=0。 \tag{8}$$

事实上，假定 $\boldsymbol{p}_M$ 是一个从 p_1 点到 p_2 点的向量，这两点都在切线 M 上，则有

$$\boldsymbol{p}_0^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)=\boldsymbol{p}_0^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_M=0$$

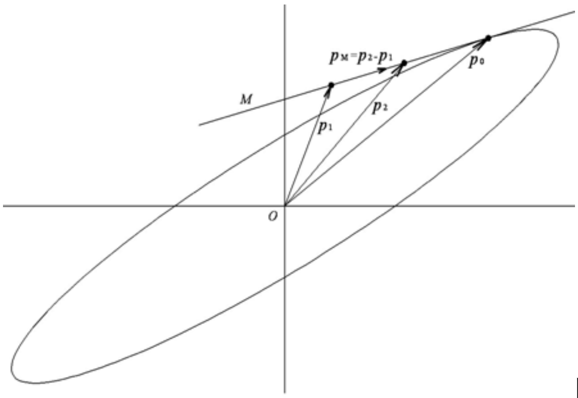

图 1 用于 2 维 Q 共轭的解说

椭圆的矩阵－向量表达很容易将以上结果推论到多维。以坐标原点为中心的 N 维（N≥2）椭圆（椭球、或高维椭球）公式可以表达为

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=1, \qquad (9)$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是一个 N 维向量，$\boldsymbol{Q}$ 是一个 N X N 正定矩阵。假定 $\boldsymbol{p}_0$ 是该 N 维椭圆上的一个点。以 $\boldsymbol{p}_0$ 为切点，N 维椭圆的切面方程可以写成

$$\boldsymbol{p}_0^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=1, \qquad (10)$$

这个公式的正确性可以通过（9）式计算 N 维椭球在 $\boldsymbol{p}_0$ 点处任何一个维上的方向导数来检验。将（10）式定义的切面记为 M。设 $\boldsymbol{p}_M$ 是 M 上的一个任意向量，则有 Q－共轭关系

$$\boldsymbol{p}_0^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_M=0\,。 \qquad (11)$$

显然，根据上式，将 $\boldsymbol{p}_0$ 理解为一个从切点指向椭圆中心的向量也是正确的。于是，我们可以说，切面 M 的 Q－共轭向量是一个从切点指向椭圆中心的向量。

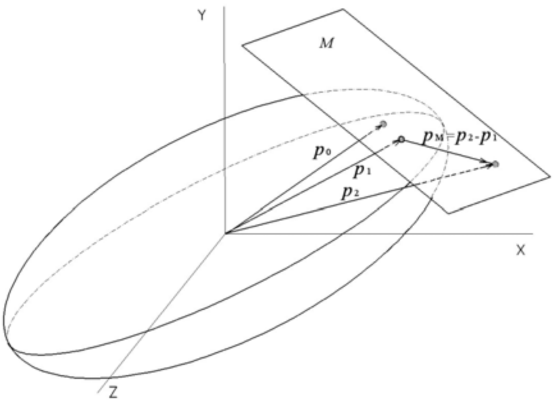

图 2　 三维情况下 Q－共轭关系的示意图

椭圆的这个性质是最优化技术中共轭梯度法或共轭方向法的基础。当使用梯度算法寻找价格函数的最小值时，起始搜索方向带有随意性。但可以假定能够找到价格函数沿此方向的一个极小值。这个极小值点应该是价格函数等高线中一个围道的切点。如果价格函数是二次的，它的等高线是一组同中心椭圆。进而，二次价格函数有唯一的极小值点，处于各个等高线椭圆的公共中心上。共轭方向指示了获得价格函数极小值点的正确方向。在二维情况下，只需要二步就可以达到价格函数的极小值。在 N 维情况下，每次搜索只能在一个独立空间维上进行，要确定 N 维椭球的一个 N 维切平面，原则上需要 N－1 个独立空间维搜索。因此，处理形式为 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b}$ 的二次形最小化问题，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是一个 N X N 正定矩阵，使用共轭梯度法时，至多只需要 N 次迭代搜索。图 3 示意了二维情况下共轭梯度搜索和常规梯度搜索的差异。

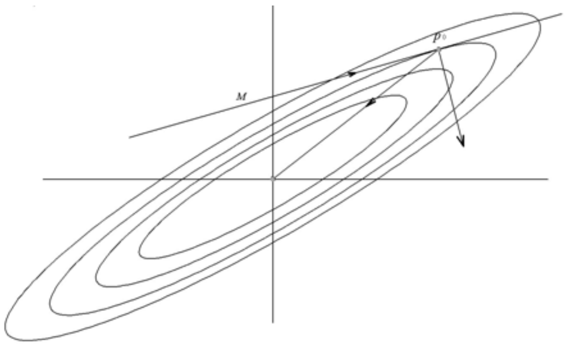

图 3　说明共轭方向搜索和常规梯度方向搜索的差别