

黑洞的内部结构

1、引言

恒星演化理论预言恒星演化到晚期应存在三类天体：白矮星、中子星和黑洞。一颗恒星演化为那类天体完全取决于它的质量。具体说来， $M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$ 的晚期恒星将最后演化为白矮星，靠简并电子气的压力与引力平衡而维持形体的存在；

$8M_{\odot} < M < 30M_{\odot}$ 的晚期恒星将最后演化为中子星，靠简并中子气的压力与引力平衡而维持形体的存在；当晚期恒星的质量大于中子星质量的上限，即

$M > 30M_{\odot}$ 时，便不再存在稳定的结构，从而无止境地塌缩下去最后形成黑洞。可见黑洞的质量很大，存在很强的引力场。

爱因斯坦的的广义相对论指出宇宙的大质量物体会使宇宙结构发生畸变，而且时空性质完全取决于物质所产生的引力场。事实上，我们并不是生活在平直的欧式空间，而是一个弯曲的黎曼空间。

在黎曼空间中，我们使用四维的时空坐标 $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ （逆变的），这里我们都是用自然单位制，即 $c = \hbar = G = 1$ ，于是， $x^0 = t$ 代表时间， x^1, x^2, x^3 分别代表三个空间坐标（ x, y, z ； r, θ, ϕ 或其他广义坐标）；另外我们还定义协变坐标 $x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^{\nu}$ ，这样我们就能写出四维时空间距

$ds^2 = x^{\mu} x_{\mu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$ ， $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ ， $g_{\mu\nu}$ 为度规张量，在这里我们要求 $g_{00} < 0, g_{11} > 0, g_{22} > 0, g_{33} > 0$ 。 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 互逆，即

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1$$

下面我们不加推导地直接给出爱因斯坦的引力场方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu} \quad \text{其中 } R_{\mu\nu} \text{ 为里奇张量，不加下标时表示此张量的迹，} \\ \lambda \text{ 为宇宙因子， } T_{\mu\nu} \text{ 为能动量张量}$$

2、黑洞的分类。

霍金和彭罗斯等人严格证明了黑洞的无毛定理，即奇性定理：星体塌缩成黑洞后，只剩下质量 M ，角动量 J 和电荷 Q 三个基本守恒量，其他一切因素（毛发）在进入黑洞后都将消失。

根据黑洞本身的物理特性，可分为四类：

- (1)、不旋转 ($J = 0$) 不带电荷 ($Q = 0$) 的黑洞，首先由 Schwarzschild (以后简称为 S) 钽年研究出，称为 S 黑洞，其对应的场方程的解称为 S 时空；
- (2)、不旋转 ($J = 0$) 但带电荷 ($Q \neq 0$) 的黑洞，由 Reissner 和 Nordstorm (R-N) 钽---1918 年研究出，称为 R-N 黑洞，其对应的场方程的解称为 R-N 时空；
- (3)、旋转 ($J \neq 0$) 但不带电荷 ($Q = 0$) 的黑洞，由 Kerr 钽年研究出，称为 K 黑洞，其对应的场方程的解称为 K 时空；
- (4)、一般黑洞-----旋转 ($J \neq 0$) 带电荷 ($Q \neq 0$) 的黑洞，由 Kerr 和 Newman

鉴年研究出,称为**K-N**黑洞, 其对应的场方程的解称为**K-N**时空。

3、稳态时空和静态时空

度规不随时间变化的时空定义为稳态时空, 即稳态时空应满足 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$;

时轴正交的稳态时空称为静态时空, 即 $g_{0i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$)

4、从最一般的稳态黑洞出发向回讨论

最一般的**K-N**黑洞($J \neq 0, Q \neq 0$) , 其解为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}) dt^2 + \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + [(r^2 + a^2) \sin^2\theta + \frac{(2Mr - Q^2)a^2 \sin^4\theta}{\rho^2}] d\phi^2 - \frac{2(2Mr - Q^2)a \sin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi$$

其中

$$\begin{aligned} \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta \\ \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \end{aligned}$$

这里 a 有着明确的物理意义, 稍后就会看到。

可以得出

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi} = 0$$

因此, 这是场方程的一个稳态轴对称解, 但是由于存在时轴交叉项 $g_{03} \neq 0$, 所以不是静态的。

(1) 、当 $Q = 0, a \neq 0$ 时, 上式变为**K**解, 即

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}) dt^2 + \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + [(r^2 + a^2) \sin^2\theta + \frac{2Mra^2 \sin^4\theta}{\rho^2}] d\phi^2 - \frac{4Mra \sin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi$$

其中

$$\begin{aligned} \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta \\ \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2 \end{aligned}$$

这是一个稳态轴对称解。

(2)

、当 $Q = 0, a = 0$ 时, 上式变为**S**解, 即

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(1 - \frac{2M}{r}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

很明显，这是一个静态球对称解。

(3)、当 $Q \neq 0, a = 0$ 时，上式变为R-N解，即

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

这也是一个静态球对称解。

由上面的讨论可以看出，当 $a = 0$ 时，度规张量与方向无关，呈现出球对称的性质；而当 $a \neq 0$ 时，度规张量依赖于方向，不再是球对称的了，而只是轴对称的。因此， a 是一个与转动有关的物理量。

1918年，Lense和Thirring在研究若场近似下转动球体的外部度规时，得出

$$a = \frac{J}{M}$$

为单位质量的角动量。

(由一般黑洞的解可以很容易看出，度规时轴交叉项的出现以及空间方向依赖性完全是 a 造成的，因此，只要黑洞有旋转（即 $J \neq 0$ ），它就不是静态的，也不再具有球对称性了，K黑洞和K-N黑洞都是这样的；只要没有旋转（即 $J = 0$ ），黑洞就是静态的，而且是球对称的，S黑洞和R-N黑洞都是这样的）

5、相应时空中黑洞的基本结构

(1)、无限红移面

现在假设有两个静止的时空点 P_1 和 P_2 ，分别代表黑洞表面附近的光源和无限远处的观察者。 P_1 处的光源在 t_1 时刻发出一个光信号， P_2 处的观测者在 t_2 时刻收到这个光信号；然后， P_1 处的光源在 t'_1 时刻发出一个光信号， P_2 处的观测者在 t'_2 时刻收到这个光信号。

由于时空是稳态的，所以有

$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \Rightarrow dt_2 \equiv t'_2 - t_2 = t'_1 - t_1 \equiv dt_1$ ， dt_1 为 P_1 发出两个光信号的时间间隔， dt_2 为 P_2 收到两个光信号的时间间隔；

Δ 在狭义相对论中，我们曾引入固有时间隔

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt$$

\Rightarrow

$$d\tau_1 = \sqrt{-g_{00}_1} dt_1$$

$$d\tau_2 = \sqrt{-g_{00}_2} dt_2$$

$$\underline{dt_2 = dt_1}$$

$$d\tau_2 = \frac{\sqrt{-g_{00}_2}}{\sqrt{-g_{00}_1}} d\tau_1$$

原子发射的光谱线的固有频率，反映为固有振动次数 $\nu = \frac{dN}{d\tau}$ ， N 为振动次数。由于 P_1 和 P_2 测得相同的振动次数，所以 $dN_1 = dN_2$ ，于是

$$\nu_1 d\tau_1 = \nu_2 d\tau_2$$

\Rightarrow

$$\nu_2 = \frac{\sqrt{-g_{00}_1}}{\sqrt{-g_{00}_2}} \nu_1$$

对于无限远处的观测者来说，黑洞附近发出的光将产生无限红移，因此 $\nu_2 = 0$ ，

因此要求 $\sqrt{-g_{00}_1} = 0$ ，即黑洞附近的 $g_{00} = 0$ 。

由以上的分析， $g_{00} = 0$ 决定了黑洞的无限红移面。

▶ 在S时空中，令 $g_{00} = -(1 - \frac{2M}{r}) = 0$ ，得无限红移面

$$r^s = 2M$$

▶ 在R-N时空中，令 $g_{00} = -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}) = 0$ ，得无限红移面

$$r^s = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

由于没有旋转，这两种黑洞的无限红移面和 θ 无关。

而对带有旋转的黑洞，无限红移面则要依赖于角度。

▶ 在K时空中，令 $g_{00} = -(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}) = 0$ ，得无限红移面

$$r_{\pm}^s = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

▶ 在K时空中，令 $g_{00} = -(1 - \frac{2Mr - Q^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}) = 0$ ，得无限红移面

$$r_{\pm}^s = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2}$$

(2) 视界 (Horizon)

存在这样的时空区域,光和其他任何东西都不能从该区域逃逸而达到远处的观察者,这样的区域就叫黑洞区。黑洞区的边界称作事件视界,它和刚好不能从黑洞逃逸的光线轨迹重合。

因此我们考虑类光超曲面,也就是光的轨迹形成的超曲面,由于对光来说,

$ds^2 = 0$, 故类光超曲面又叫零超曲面。

设类光超曲面的方程为

$$f(x^\mu) = 0$$

定义其法矢量为

$$n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

$$n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0$$

即

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0$$

这就是事件视界的方程。

注意这里用的是 $g^{\mu\nu}$, 它是 $g_{\mu\nu}$ 的逆。

► 在S时空中,考虑到该时空是静态球对称的,因此视界也有相应的对称性,即 f 只是 r 的函数,于是

$$g^{11} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 = 0 \xrightarrow{\text{求逆过程省略}} g^{11} = 1 - \frac{2M}{r} = 0$$

因此, S时空的视界为

$$r^h = 2M$$

► 在R-N时空中,同理可得

$$g^{11} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 = 0 \xrightarrow{\text{求逆过程省略}} g^{11} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0$$

因此, S时空的视界为

$$r_{\pm}^h = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

可以看出，对这两种无旋转的黑洞，其视界面刚好和无限红移面重合，这是其良好的对称性导致的。

► 在K-N时空中，不再有球对称性，而只有轴对称， f 是 r 和 θ 的函数，于是

$$g^{11}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

省略求逆过程，得：

$$(r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

分离变量 $f = R(r)H(\theta)$ ，带入得：

$$(r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2)\left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{1}{R}\right)^2 = -\left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{1}{H}\right)^2 = -\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{d\theta} = \pm \lambda \theta \Rightarrow H = Ae^{\pm \lambda \theta}$$

由周期性变条件，应该有

$$H(\theta) = H(\pi + \theta)$$

只能取 $\lambda = 0$

$$(r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2)\left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{1}{R}\right)^2 = 0 \Rightarrow (r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2) = 0$$

可解得K-N时空的视界为

$$r_{\pm}^h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$$

► 在K时空中，同理解得其时空视界为

$$r_{\pm}^h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

同样很明显地可以看出，这两种带有旋转的黑洞，其无限红移面和视界面不重合。可见，有没有旋转在很大程度上决定了黑洞的内部结构。

(3) 能层和坐标系的拖拽

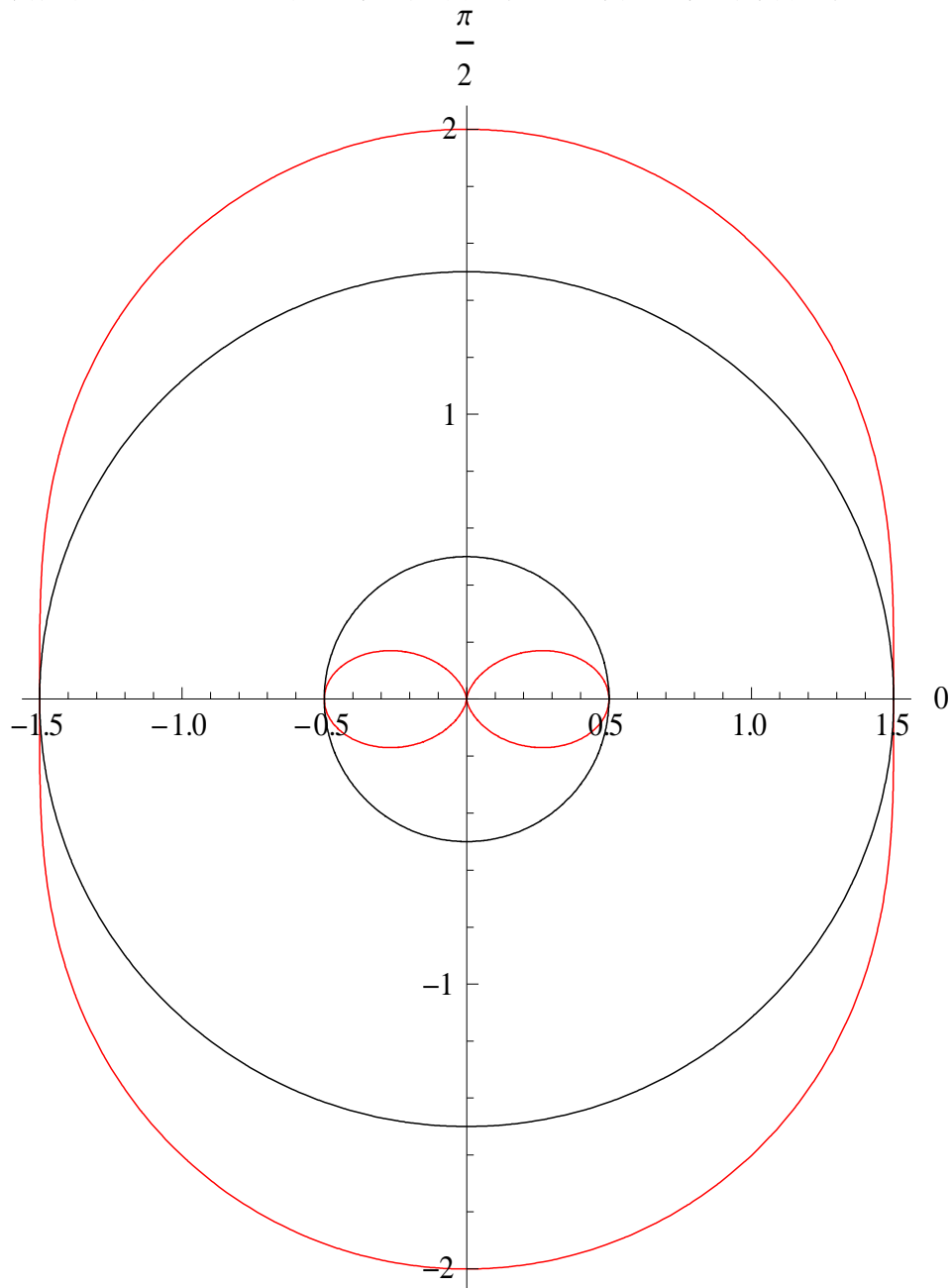
对两类带旋转的黑洞，K黑洞和K-N黑洞，其无限红移面 r_{\pm}^s 和视界 r_{\pm}^h 存在如下关系

$$r_-^s \leq r_-^h < r_+^h \leq r_+^s$$

视界 r_+^h 和无限红移面 r_+^s 包围的区域叫外能层；视界 r_-^h 和无限红移面 r_-^s 包围的区域叫内能层。

当黑洞没有旋转，即 $a = 0$ 时，K黑洞变为S黑洞，K-N黑洞变为R-N黑洞，视界和无限红移面重合，能层消失。

下面是以K时空为例画的一个简单的示意图（和周四讲时画的那个图稍有不同），图中取了 $M = 1, a^2 = 3/4$ ，外面的红线表示外无限红移面 r_+^s ，里面的红线表示内无限红移面 r_-^s ；外黑线表示外视界 r_+^h ，内黑线表示内视界 r_-^h 。



我们以K时空为例简要分析一下各个区域的时空特征（K-N时空与此类似）
K度规

$$g_{00} = -(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}); g_{11} = \frac{\rho}{\Delta}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

▶ 外无限红移面之外 ($r > r_+^s$) 和内无限红移面之内, ($r < r_-^s$)

$g_{00} < 0, g_{11} > 0 \Rightarrow$ 为正常时空; t 表示时间, r 表示空间

▶ 内外视界之间 ($r_+^h < r < r_-^h$)

$g_{00} > 0, g_{11} < 0 \Rightarrow$ 不正常; 这时时空坐标应该互换, t 表示空间, r 表示时间; 这个区域成为单向膜区。

▶ 内能层区 ($r_-^s < r < r_-^h$) 和外能层区 ($r_+^h < r < r_+^s$)

$g_{00} > 0, g_{11} > 0$ 在能层区, 时空概念模糊不清。

我们看到, 在能层内部建立时空坐标系出现了问题, 导致时空概念不清晰。这是由于黑洞是旋转的, 我们不能用静止的坐标去描述它, 而必须让坐标系也跟着转起来。为此, 我们采用拖动坐标系, 即假定任何物理坐标系都不可避免地会被球体转动所拖动, 拖动角速度为

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2\theta) + 2Mra^2 \sin^2\theta}$$

则有

$$ds^2 = (g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}})dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{22}(d\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}}dt)^2$$

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = -\frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}}$$

这样, 很容易验证, 在能层内部, 即区域 ($r_-^s < r < r_-^h$) 和 ($r_+^h < r < r_+^s$),

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} < 0, g_{11} > 0$$

于是，在能层内部， t 仍可看作时间， r, θ, φ 看做空间，时空概念就清楚了。但此时坐标系必须以角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$ 绕对称轴随球体一起转动。而在能层外部，用拖动坐标系也不会影响时空，当然我们也可以使用静止坐标系。无限红移面 r_+^* 是能层的界面，因此也是我们可以使用静止坐标系的界面，所以也叫静界。

对能层的理解：

能层就是能够从中提取能量的区域。彭罗斯发现的一个过程，使得从旋转黑洞中提取能量成为可能，这一过程利用的是进出能层的粒子。这一过程的关键是，能层中的某些轨道具有负的总能量，即引力束缚能超过了静质量和动能之和。让一艘宇宙飞船从无限远处沿一条正能轨道进入能层，并在那里用一种弹簧装置把一块砖从飞船中弹射出来，使它进入一条负能轨道，而飞船由于反冲进入一条能量增加了的正能轨道。于是砖块落入黑洞，飞船返回无穷远处。因为由黑洞、飞船和砖块所组成的系统总能量是守恒的，而且砖块携带一些负能进入黑洞，飞船必然携带相应数量的正能回到无穷远处，也就是说，飞船比它初始时具有了更多的能量-----飞船从提取了能量。而黑洞的转动速率会减小，即转动动能会减小。但黑洞并不在乎转动动能，而只是视界面积。黑洞进行的任何活动都保持视界面积只增不减。这是霍金证明的一个定理。

类似地，我们也可以从带电的黑洞中提取能量。

从这个性质可以看出，S黑洞似乎是黑洞演化的终态。它没有能层，也不带电荷，我们无法从那里获取能量。而另外三种黑洞都是演化中的黑洞。

6、时空坐标的互换

在S时空中，可以看出，在黑洞外部 ($r > 2M$)

$$g_{00} < 0, g_{11} > 0, g_{22} > 0, g_{33} > 0$$

在黑洞内部 ($r < 2M$)

$$g_{00} > 0, g_{11} < 0, g_{22} < 0, g_{33} < 0$$

在视界处，时空坐标发生互换。在黑洞内部，必须将看作 r 时间坐标， t 看作空间坐标； $r = 0$ 不能再理解为球心， r 已变成时间， $r = 0$ 应看做时间的端点，所以落入黑洞的物质奔向 $r = 0$ ，应该理解为它们的时间走向终结。

在K时空中，在无限红移面之外 ($r > r_+^*, r < r_-^*$)，时空坐标正常；在单向膜区 ($r_-^* < r < r_+^*$)，时空坐标互换；在能层内，必须用转动的拖拽坐标系，这时时空坐标不互换。

7、奇异性

- ▶ 在S时空中可以看出，在 $r = 0$ 和 $r = 2M$ 两处是奇异的。这种奇异性意味

着什么？是否是由于坐标系选择得不好而引起的？人们发现，在 $r = 0$ 处，不仅度规发散，曲率也发散，而且这种发散不能通过坐标变换消除，我们称这类奇点为内禀奇点。而在 $r = 2M$ 处，虽然度规发散，但曲率并不发散，可以通过坐标变换而消除，我们称其为坐标奇异性。

► 在K-N时空中，奇异性出现在 $\rho^2 = 0$ 和 $\Delta = 0$ 两个位置。出现在 $\Delta = 0$ （视界处）的奇异性是坐标奇异性，曲率并不发散。然而 $\rho^2 = 0$ 处的奇异性却是内禀的，曲率发散。而且我们可以计算出内禀奇异区不是一个点，而是一个环。

$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ ，可以看出 $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 。

坐标变换

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \int [dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr] - r \\ x &= (r \cos \varphi - a \sin \varphi) \sin \theta \\ y &= (r \sin \varphi + a \cos \varphi) \sin \theta \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

则

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[\frac{r(xdy + ydx) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\tilde{t} \right]^2$$

在上式中，视界处的奇性已经不再出现，只剩下内禀奇性。由内禀奇性

$r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 得：

$$x^2 + y^2 = a^2, z = 0$$

这是半径为 a 的圆环。

彭罗斯严格证明了奇点定理：

任何有物质的时空，都至少存在一个奇点。

这样看来，奇点或奇环虽然使我们为难，但不可避免。

► 当K-N黑洞满足时，内外视界重合，不存在单向膜区；当 $M^2 < a^2 + Q^2$ 时，黑洞的视界消失，奇环裸露出来。裸露的奇环会破坏是空的因果关系。为此彭罗斯提出宇宙监督假设：存在一位宇宙监督，它禁止裸奇性得出现。也就是奇点必须包含在黑洞里面，让生活在黑洞外部的人不会受到奇点的影响。所谓的宇宙监督假设只是一种权宜之计，它只不过暗示我们，应该存在某种物理规律，会禁止裸奇点的出现。研究表明，但裸奇点出现时，黑洞的温度会处于绝对零度。因此，很多人推测，这位宇宙监督很可能就是热力学第三定律。