

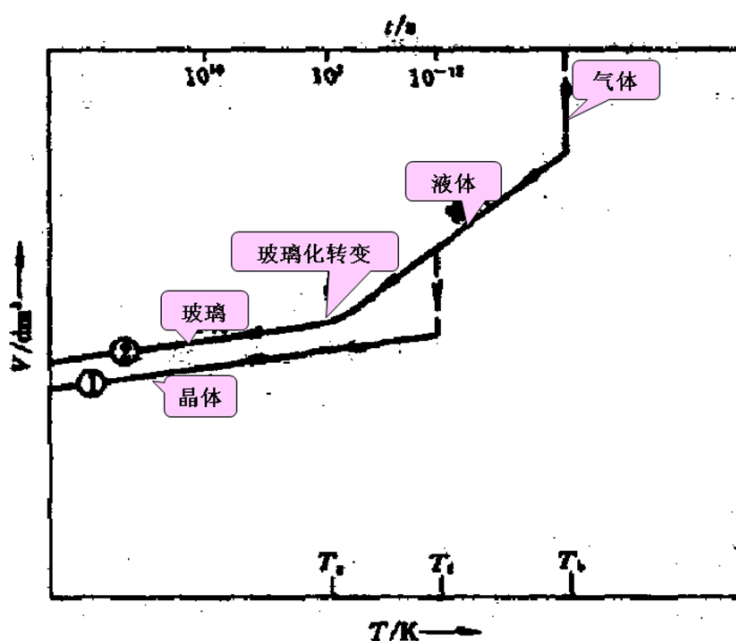
第二章 晶体学基础与基本材料类型

肉眼看到的固体是连续刚体。实际上固体是由分立的原子所组成。固体是一个很复杂的客体，原子与原子之间、电子与电子之间以及原子与电子之间的相互作用相当强烈。正是这些相互作用决定了固体的存在状态。而研究这些相互作用及其对固体的结构和性能的影响则是材料化学中的重要内容之一。(p9-15 元素与化学键) 同样地，材料中原子、离子或分子的排列方式对材料的性质也具有决定性的影响。(p9-19 晶体学基本概念)

2.1 晶体学基本概念

2.1.1 晶体与非晶体

物质由气态转变为固态的变化如下：首先在沸点处，发生相变，气相转变为液相。随着温度的继续降低，液体的体积连续减小，并且由液相变为固相。



当液体缓慢降温时，在某一个确定的温度（凝固点）下，液体的体积突然收缩，形成固体；之后固体的体积随温度的降低缓慢减小。在这一过程中，原子重排时间足够，因此形成的固体中原子的排列呈有序状态。此固体为晶态固体。

当液体快速冷却时，可以获得过冷液体，之后过冷液体凝固，由于原子没有足够的时间发生重排，因此形成的固体中原子的排列呈无序状态。此为非晶态固体。

因此，固体材料可以按照其中原子排列的有序程度分为晶态和非晶态两类。

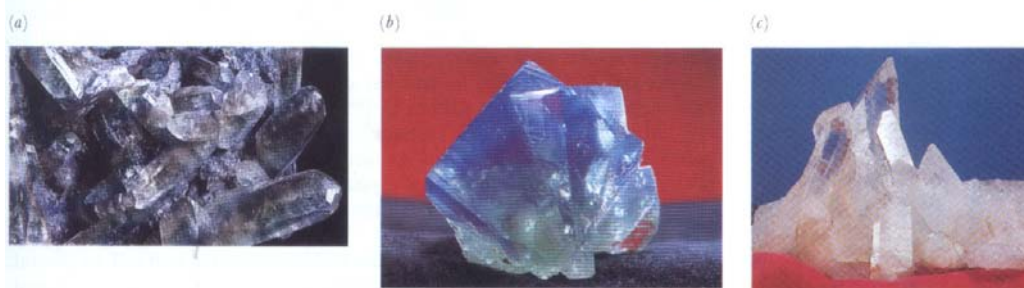
晶态材料具有长程有序的点阵结构，其组成原子或基元处于一定格式空间排列的状态；非晶态材料只有在几个原子的短程范围内具有原子有序的状态，称为短程有序。这是晶态材料和非晶态材料的根本区别。

显然，材料微观结构的不同必然反映在材料的宏观表现上。晶体的宏观特征有（1）规则的几何外形；（2）晶面角恒定；（3）有固定的熔点；（4）物理性质的各向异性。



Crystalline rutile in quartz

Figure 11.23 Crystalline solids come in a variety of forms and colors. (a) Calcite, (b) fluorite twin crystals, (c) quartz. (Runk, Schoenberger/Grant Heilman Photography)



然而，关于晶体的研究却经历了漫长的时期。晶体是一个非常古老的名词。人类早期在采集石块的同时也就发现了各种具有规则外形的石头，便将它们称为晶体。在我国周口店的中国猿人遗址就发现了用水晶等晶体制成的工具。这是人类认识晶体的开始。

“... But I must speak again about crystals, shapes, colors. There are crystals as huge as the colonnade of a cathedral, soft as mould, prickly as thorns; pure, azure, green, like nothing else in the world, fiery, black; mathematically exact, complete, like constructions by crazy, capricious scientists, or reminiscent of the liver, the heart... There are crystal grottos, monstrous bubbles of mineral mass, there is fermentation, fusion, growth of minerals, architecture and engineering art... Even in human life there is a hidden force towards crystallization. Egypt crystallizes in pyramids and obelisks, Greece in columns; the middle ages in vials; London in grubby cubes... Like secret mathematical flashes of lightning the countless laws of construction penetrate the matter. To equal nature it is necessary to be mathematically and geometrically exact. Number and phan-

tasy, law and abundance – these are the living, creative strengths of nature; not to sit under a green tree but to create crystals and to form ideas, that is what it means to be at one with nature!” These are the words of Karel Čapek the Czech writer after his visit to the mineral collection of the British Museum [9-18]. He added a drawing (Fig. 9-1) to his words to express man’s humility in front of these miracles of nature.

Figure 9-1.
Čapek’s drawing after his visit to the mineral collection of the British Museum [9-18].
Reproduced with permission.



The word crystal comes from the Greek *krystallos* meaning clear ice. The name originated from the mistaken belief that the beautiful transparent quartz stones found in the Alps were formed from water at extremely low temperatures. Later, by the seventeenth century the name crystal was applied to other solids that were also bounded by many flat faces and had generally beautiful symmetrical shapes. Crystals have also for centuries been considered mystical. A sad angel looks hopelessly at the huge rhombohedric crystal in Dürer’s “Melancholia” (Fig. 9-2). The polyhedron in the picture is a truncated rhombohedron, and there has been considerable discussion as to whether Dürer meant a particular mineral by it and if so which one [9-4, 9-5]. The emerging opinion is that this polyhedron “is simply an exercise in accurate draughtsmanship and that the art historians have made rather heavy weather of its explanation... The integral proportions show that no particular mineral was intended” [9-5]. Dürer’s drawings have been carefully analyzed by Schröder [9-6] who “has satisfactorily settled the matter with a technological rather than a mystical explanation” [9-5].

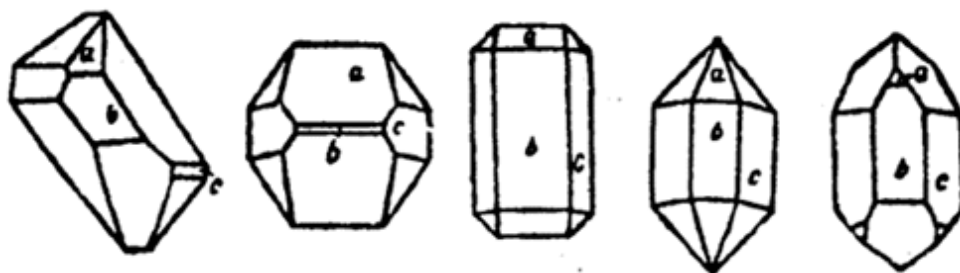
Figure 9-2.
Dürer: "Melancholia".



尽管晶体的对称性和美丽总是令人好奇和遐想,但是**晶体学(crystallography)**直到 18 世纪后半叶才出现。

晶面角守恒定律

1669 年,意大利人斯丹诺 (Nicolas Steno)发现:天然的水晶(石英晶体)可以有各种不同的外形,其晶面的大小、形状、个数都可能会有所不同,但是相应的晶面之间的夹角都是固定不变的。其中的 a 晶面和 b 晶面之间的夹角总是 $141^{\circ}47'$, b 晶面和 c 晶面之间的夹角总是 $120^{\circ}00'$, 而 c 晶面和 a 晶面之间的夹角总是 $113^{\circ}08'$ 。



此后,人们对大量的不同的晶体进行观察,发现也存在类似的规律。从而产生了结晶学上的第一条经验定律——晶面角守恒定律:在同一温度下,同一种物质所形成的晶体,其相同晶面的夹角是一个常数。晶面角守恒定律揭露了晶体外形的一种重要的规律性。因此,晶体测角工作曾盛极一时,制作了晶体测角仪,获得大量的观测数据,直至今今天,测定晶面角仍然是从晶体外形来鉴别各

种不同矿物的一种常用的可靠方法。

晶面角守恒定律的发现，使得当时的人们坚信“晶体就是具有规则形状的物体”。但是，这一定义只是考虑了晶体的宏观特征，并未涉及晶体的内在本质。

晶胞学说

法国科学家阿羽 (Réné Just Haüy)发现方解石 (calcite)可以裂成了很多内面夹角相同的小晶体，与原来晶体的夹角相同。于 1784 年提出了著名的晶胞学说：**每种晶体都有一个形状一定的最小的组成细胞——晶胞；大块的晶体就是由许许多多多个晶胞砌在一起而形成的。**这是晶体学上第一次就晶体由外表到本质进行的猜想。

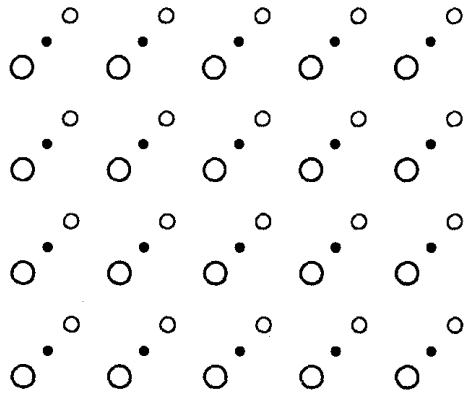


Figure 17-1
Microcrystals of realgar, As₄S₄.

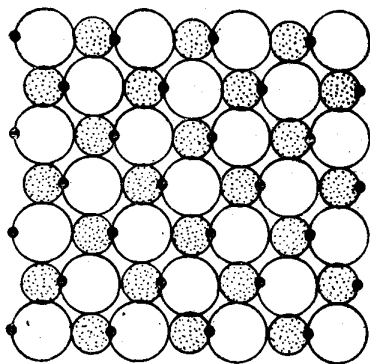
空间点阵学说

1855 年另一个法国人布拉维 (A. Bravais) 建立了晶体结构的空间点阵学说。一个理想晶体是由全同的称作**基元**的结构单元在空间作无限的重复排列而构成的；基元可以是原子、离子、原子团或者分子；晶体中所有的基元都是等同的，也就是说它们的组成、位形和取向都是相同的。我们把晶体结构中种类和所处的周围环境完全相同的微粒称为**等同微粒**，而两个等同微粒之间的距离称为**周期**。因此，晶体的内部结构可以抽象为在空间作周期性的无限分布的一些相同的几何点，这些几何点代表了基元的某个相同位置，而这些几何点的集合就称作**空间点阵**，简称**点阵**。空间点阵中的几何点称为点阵的**结点**，而沿点阵的任何一个方向上相邻两个结点之间的距离就是晶体沿这一方向的周期。

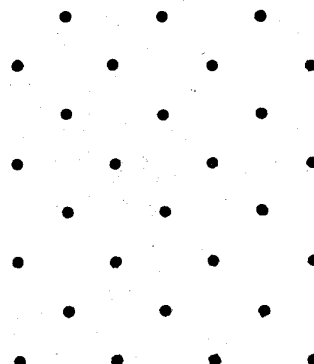
例如用 \circ 表示一个含有两个原子（分别用一大一小两个空心圆点表示）的基元，这个结构基元是由两种不同的原子（微粒）构成的，这两种原子由于种类不同而互为不等同原子。这个基元在二维空间作有规律的重复排列便得到了一个二维晶体结构。将由这两种原子组成的一个基元抽象为一个几何点（图中黑点），则这些几何点就构成了一个二维空间点阵。如果我们把这个空间点阵还原为晶体结构的话，点阵中的每一个结点都将转换为由两个原子组成的一个基元。



显然在这一抽象过程中，构成基元的原子的种类和大小并不影响到最终点阵的形状。对点阵最终形状产生影响的仅仅是基元在空间的排列规律。下图表明了上述几个概念：在 NaCl 中，基元为 NaCl 分子；所有的 Na 离子均为等同原子，所有的 Cl 离子也是等同原子。由该二维结构也抽象导出二维点阵，在三维空间排列的等同点则形成空间点阵。



(A)



(B)

NaCl 晶体结构中等同点的分布及其相应导出的二维点阵

空间点阵可描述为：将构成晶体的最小结构单元——基元抽象为几何点，这些几何点的集合就称为空间点阵。晶体的最小结构单元基元中包括了晶体中所有种类的不等同微粒，而且构成基元的微粒中任意两个都互为不等同微粒。

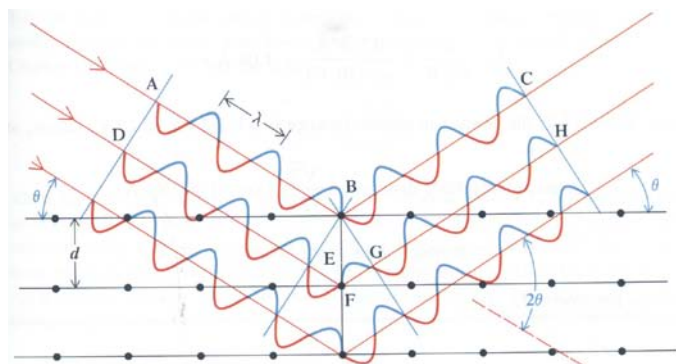
空间点阵学说的实验验证——劳厄的晶体 X 射线衍射实验

空间点阵学说提出之后的相当一段时间里一直被认为是一种假说，直到 X 射线衍射分析技术的出现。1912 年德国物理学家劳厄 (Max V. Laue) 发现了 X 射线通过晶体时产生的衍射现象，第一次从实验上证实晶体结构的空间点阵学说正确性。从而导致了 X 射线衍射技术的诞生，它成为研究晶体内部结构的重要手段。劳厄因这项成果而于 1914 年获得诺贝尔物理学奖。

晶体结构的检测——X 射线衍射分析技术

现代 X 射线衍射分析的理论基础是英国物理学家布拉格父子奠定的。布拉格父子于 1913 年借助 X 射线成功地测出金刚石的晶体结构，并提出了“布拉格公式”，为最终建立现代晶体学打下了基础，于 1915 年获得诺贝尔物理学奖。

一块单晶体，两个相邻晶面之间的距离为 d ，一束波长为 λ 的平行 X 射线与晶面成 θ 角入射。



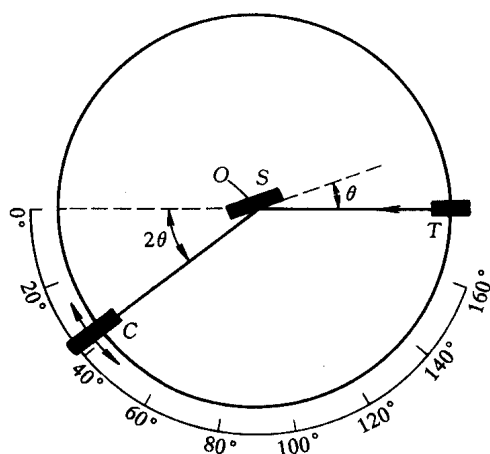
当入射的 X 射线 λ 、 θ 和 d 之间满足如下关系时，将产生衍射

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

这就是著名的**布拉格定律**。

在此基础上，人们发展出了一系列借助于 X 射线衍射分析晶体结构的技术，这些技术已经成为了材料科学研究中最重要也是最有用的分析手段。

波长为 λ 的 X 射线从 T 处以 θ 角入射至试样 S 处，如果试样中某一原子面正好满足布拉格方程，便会在 C 处得到加强的衍射束。



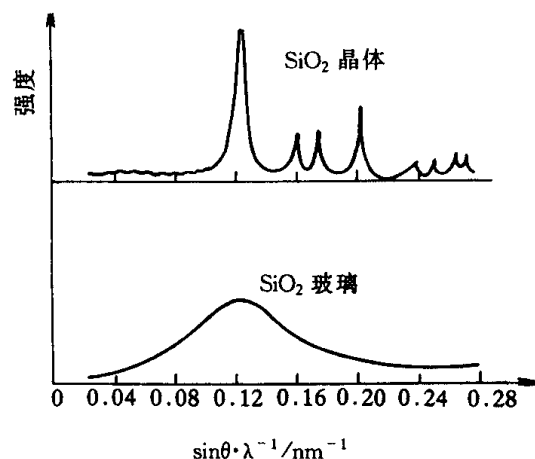
目前常用的X射线衍射仪的工作原理示意图



测试时衍射仪可以连续地改变试样与入射 X 射线的相对角度 θ , 使得更多的原子面有机会满足布拉格方程所限定的条件而得到衍射峰。在某些角度上, 晶体的衍射谱图出现了锐利的衍射峰。这是晶体衍射的基本特征, 根据这些锐利的衍射峰可以分析晶体内部原子排列的情况。

非晶态材料的衍射谱图与晶态材料有所不同, SiO_2 玻璃的衍射谱图上就不存在有类似的衍射峰, 表明原子排列没有长程有序的特征。

随着科学技术的发展, 人们也找到了另外一些研究晶体微观结构的实验方法, 包括电子显微镜、电子衍射、中子衍射等等。现在最先进的电子显微镜已经能够直接分辨出某些晶体中的原子。



SiO_2 晶体和 SiO_2 玻璃的 XRD 谱图

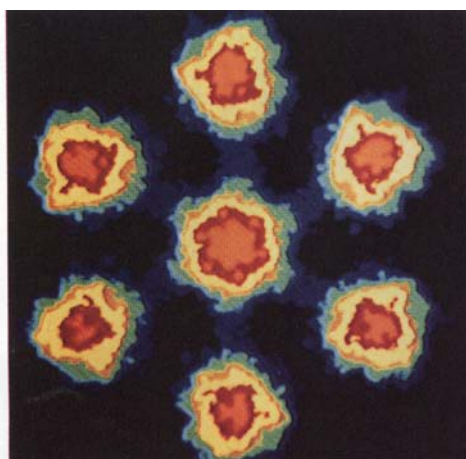


Figure 3.1 Shown here are images of seven individual uranium atoms (the colored spots with red-orange centers). The images are made with an electron microscope. The atoms are in the form of a compound called uranyl acetate and are pictured on an extremely thin carbon layer that appears black in this photograph. The atoms are 0.34 nm apart. [Courtesy of M. Isaacson, Cornell University, and M. Ohtsuki, The University of Chicago.]

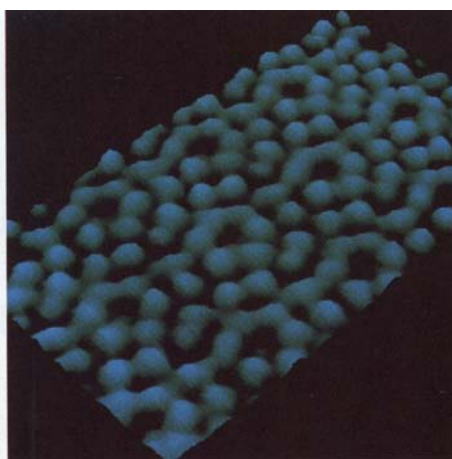


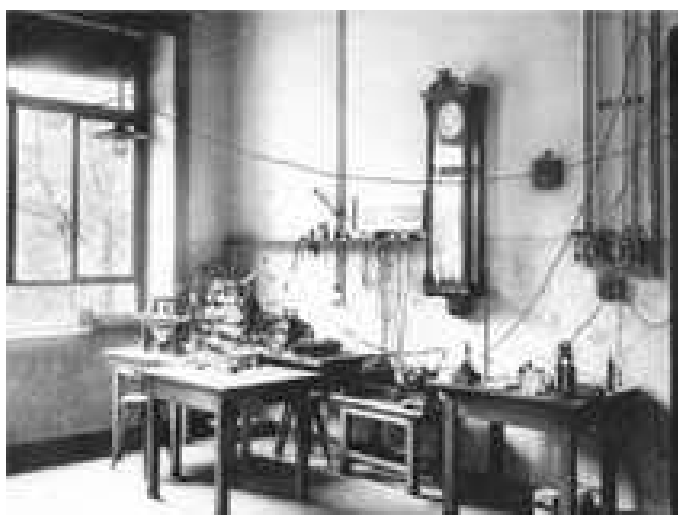
Figure 3.2 Image of the surface of silicon, produced by a scanning tunneling microscope. The blue spots are individual silicon atoms, which are arranged in a regular pattern that repeats itself across the surface. Images such as this aid our understanding of the surface structure of many different materials; silicon, in particular, is a material of vital significance to the semiconductor and computer industries. [Courtesy of IBM Thomas J. Watson Research Center, NY.]

自此, 空间点阵学说从猜想上升为正确理论, 奠定了现代结晶学的基础。自然地, 晶体定义描述为:

构成物体的微粒 (分子、原子或者离子) 在三维空间做有规律的周期性重复排列而得到的物体。

晶体有规则的几何外形其实就是构成晶体的微粒的有规则排列的外部反映。

【阅读材料】科学家的故事



伦琴 (1845~1923), 德国物理学家。就在这间简陋的实验室里, 伦琴发现了 X 射线。1895 年 11 月 8 日, 伦琴在实验室里从事阴极射线的实验工作, 一个偶然事件引起了他的注意。当时, 房间一片漆黑, 放电管用黑纸包严。他突然发现不超过一米远的小桌上有一块亚铂氰化钡做成的荧光屏发出闪光。他移远荧光屏继续试验, 荧光屏闪光仍随放电过程的节拍断续出现。他取来各种不同的物品包括书本、木板、铝片等等放在放电管和荧光屏之间, 发现不同的物品效果很不一样: 有的挡不住; 有的起到一定的阻挡作用。1895 年 12 月 22 日, 伦琴邀请夫人来到实验室, 用他夫人的手拍下了第一张人手 X 射线照片 (下左图)。1895 年年底, 他以通信方式将这一发现公之于众。题为《一种新射线(初步通信)》。伦琴在他的通信中把这一新射线称为 X 射线, 因为他当时确实无法确定这一新射线的本质。1901 年获得首届诺贝尔物理学奖。

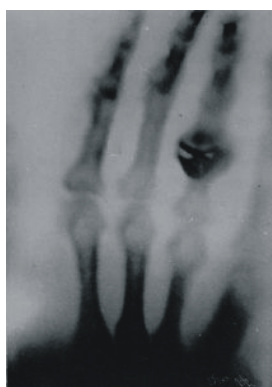
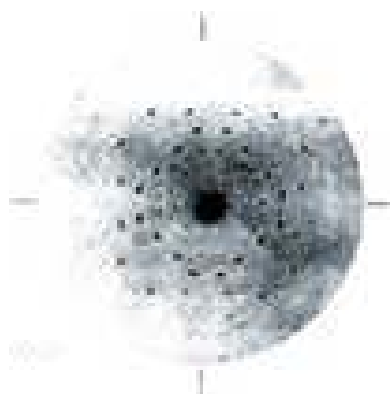


Figure 3.9 An early example of the use of X rays in medicine. Professor Michael Purpin of Columbia University made this X ray in 1896 to aid in the removal by surgery of gunshot pellets (the dark spots) from the hand of a patient. [Courtesy of Burndy Library, Norwalk, CT.]

伦琴对科学有崇高的献身精神。他无条件地把 X 射线的发现奉献给全人类, 自己没有申请专利。在诺贝尔物理奖的颁奖大会上他没有发表演说, 也不愿

在公共场合上露面，更不高兴接受人们的赞扬和吹捧。为了避开人们的访问和庆贺，他多次远离柏林，躲到乡下去生活。伦琴晚年生活十分困苦，他的双手由于受 X 射线照射，在晚年干枯得像干柴一般。他没有儿女，夫人早年就已去世，1923 年伦琴因癌症去世时，身边竟没有任何亲人……



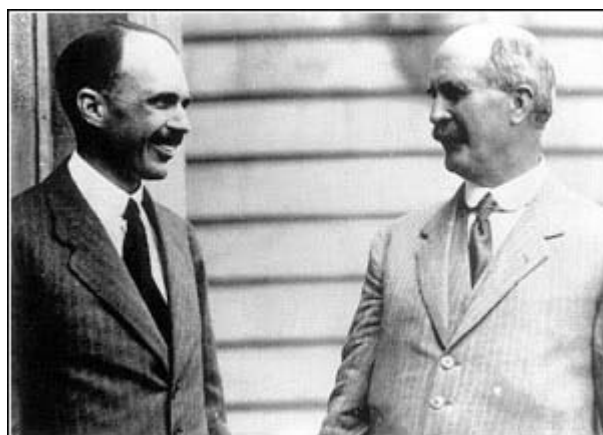
劳厄拍的衍射照片

劳厄（1879-1960），德国物理学家，1904 年在普朗克指导下以“平行平面板上的干涉现象的理论”为题完成了博士论文，1909 年转到索末菲所在的慕尼黑大学任教，并在这里发现了 X 射线衍射。劳厄最初对 X 射线进行研究的出发点仅仅是为了寻找一个证据来证明 X 射线具有波动性。然而，他的工作不仅令人信服地证明了 X 射线是一种波长很短的电磁波，也不仅在于证实了晶体空间点阵理论，而且对原子学说也有巨大的意义。

劳厄科研生涯的黄金时代正好是量子理论取得了逐步胜利的时期。虽然他曾经根据量子论研究过原子裂变，但总的来说他不仅没有能够积极参与量子理论的创建或发展工作，而且多次对量子理论的重大成果表示怀疑。在玻尔提出了著名的原子理论之后，劳厄说过一句现在看来很过分的话，“假如玻尔的理论碰巧是对的话，我们将退出物理学界。”

现代 X 射线衍射分析的理论基础是英国物理学家布拉格父子奠定的。从 1886 年开始，老布拉格在澳大利亚阿德莱德大学任教授，大部分时间都花在教学、通俗演讲以及追踪、学习并重复别人的实验上，“从未想过去做研究”。1904 年，因为被任命为澳大利亚科学促进会物理学部主席，需要发表主席致词，因此

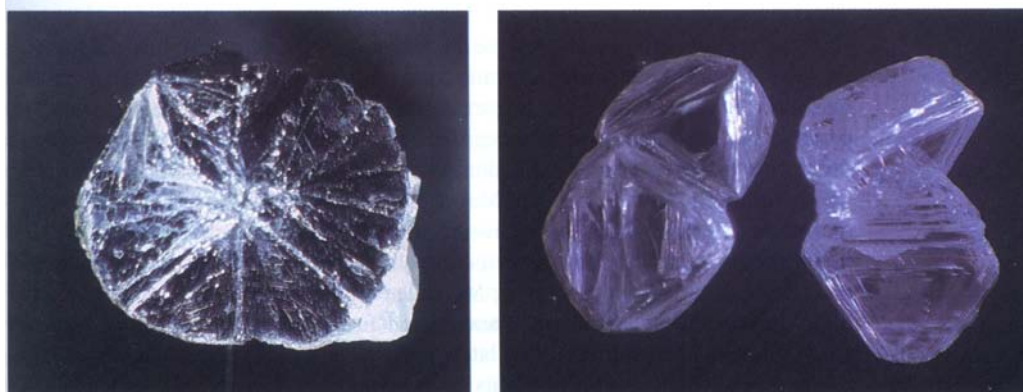
涉及到最新的电子与放射性现象，产生研究兴趣，并结识了卢瑟福。



1912 年，劳厄发现了第一张 X 射线衍射图，激起了老布拉格对这张图做出解释的迫切愿望；更为重要的是儿子小布拉格已经长大，在剑桥显露出聪明才智。布拉格父子于 1913 年借助 X 射线成功地测出金刚石的晶体结构，并提出了“布拉格公式”，于 1915 年获得诺贝尔物理学奖，成为诺贝尔历史上第一对父子获奖者。当时，小布拉格年仅 25 岁，是至今为止最年轻的诺贝尔奖获得者；而老布拉格则已经 53 岁，被称为是大器晚成的科学家。

Figure 2-4

Graphite (*left*) and diamond (*right*) are two dramatically different forms of carbon. Graphite is a soft, grayish-black, flaky solid that conducts electricity; diamond consists of very hard, transparent crystals that are nonconductors of electricity. Both graphite and diamond are now extensively synthesized.

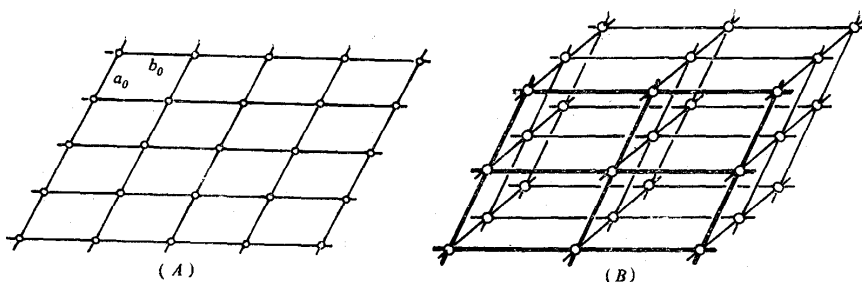


老布拉格的大器晚成证明了美国科学社会学家朱克曼在研究美国诺贝尔奖获奖者的创造性年龄后得出的如下结论：

科学事业中何种年龄最富于创造性的问题并不像唯青年论所主张的那样简单。赢得诺贝尔奖金的研究工作者中，虽然相当经常地出现青年人，可也同样地出现中年人。科学并非青年人垄断的游戏，至少在诺贝尔奖金获得者中是如此；显然，中年人同样会玩这种游戏。

2.1.2 晶格、晶胞、晶格参数、晶系

三维空间点阵是由一些按照一定规律排列的几何点（结点）所构成的一个阵列。在空间点阵中，分布在同一直线上的结点构成一个行列。很显然，任意两个结点就可以决定一个行列。行列中两个相邻的结点间的距离称为结点间距。连接分布在同一平面内的结点即构成一个面网，而连接分布在三维空间内的结点就构成了空间点阵。



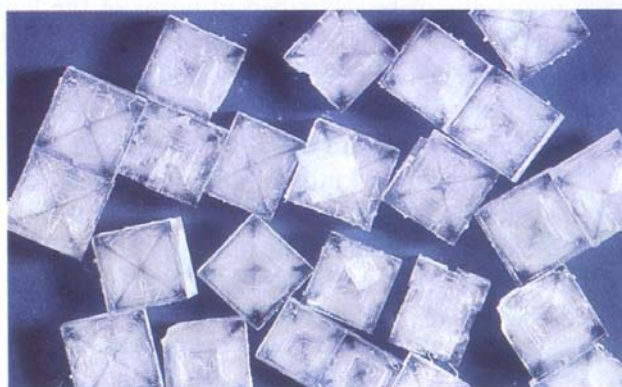
空间点阵也可以看成是由一个只在八个顶点上含有结点的平行六面体单元沿三维方向重复堆积而构成的。这样的平行六面体单元称为原始格子。每个结点都由 8 个原始格子所共有，因此，每个原始格子中只含有一个结点。

为构成点阵，必须满足两个条件：点数无限多；各点所处的环境完全相同。因为有限多个点必须有一个边界，将这些点沿某一个方向平移时，边界上的点就不可能有与它相应的点相重合。当然，实际上不存在无限多个原子组成的晶体，但宏观上的晶体颗粒与内部微粒相比其直线上的尺度之差约达 10^7 倍。例如，一小颗食盐晶体的边长为 564pm 的面心立方型式，则不难算出此晶棱共排有

$\frac{1\text{mm}}{564\text{pm}} = 1.8 \times 10^6$ 个晶胞。这样大的数字完全可以近似认为是无限多个粒子的排

列，是符合点阵结构要求的。而点阵点所处的环境完全相同，指的是对于每个点，在相同的方向上、相同的距离处都可找到点阵点。

Figure 11.29 Crystals of NaCl, showing well-defined crystal planes based on the underlying cubic structure. (Dr. E. R. Degginger)



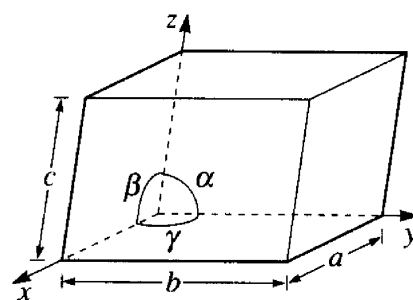
空间点阵是一个三维无限大的图形，直接用空间点阵来描述晶体中原子的堆积方式显然是很不方便的，而构成空间点阵的基本单元体——原始格子又因边棱取向的随意性而不可能完整地反映出空间点阵的几何特征。因此，法国科学家布拉维于 1848 年提出了一套简便而准确描述空间点阵几何特征的方法。

布拉维认为，对于任何一种晶体的结构抽象出来的空间点阵，都可以看成是由一个能够全面准确体现该点阵几何特征的平行六面体沿三维方向重复堆积而构成；这个能够全面准确体现空间点阵几何特征的平行六面体的选取必须遵循 4 个基本原则——晶胞的选取原则：

- (1) 所选取的平行六面体的对称性应该符合整个空间点阵的对称性；
- (2) 在不违反对称的条件下，应选择棱与棱之间的直角关系最多的平行六面体；
- (3) 在遵循上述两条的前提下，所选的平行六面体体积应该最小；
- (4) 在对称性规定棱间交角不为直角时，在遵循前三条的前提下，应选择结点间距小的行列作为平行六面体的棱，且棱间交角接近于直角。

据此确定了平行六面体，也就相当于确定了空间点阵的坐标系。点阵是一组无限的点，连接其中任意两点可以得到一个矢量，点阵按此矢量平移后都能复原。三维空间点阵是在三维空间中点的无限阵列，其中所有的点都有相同的环境。

选任意一个阵点作为原点，三个不共面的矢量 a 、 b 和 c 作为坐标轴的基矢，这三个矢量得以确定一个平行六面体。此平行六面体称为**晶胞**。单位平行六面体的三根棱是三个坐标轴的方向；棱之间的交角是坐标轴之间的交角；棱长就是坐标系统的轴单位。晶体可看做由无数个晶胞有规则地堆积而成。晶胞的大小和形状可由晶轴 a 、 b 、 c 和轴间夹角 α 、 β 、 γ 来确定，这 6 各量合称**晶格参数**。

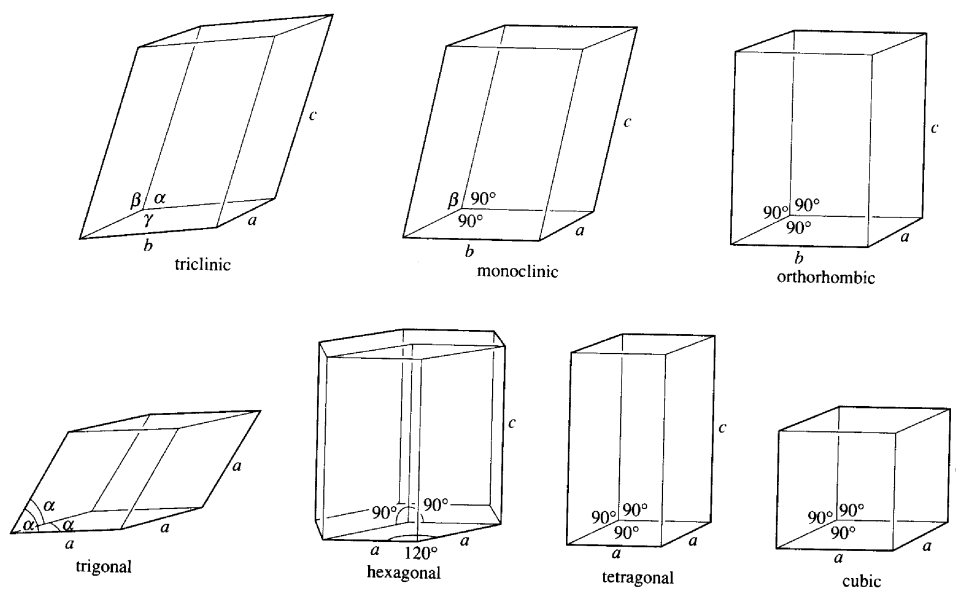


布拉维通过数学推导发现，尽管存在有各种各样的晶体，但是按照四条基本原则，从各种晶体中抽象出来的空间点阵只有 14 种形式，称为**14 种布拉维格子**，分别可以用一个根据上述四条基本原则划分出来的平行六面体来表示。根据相应的平行六面体的几个特征，14 种布拉维格子可以分为 7 类，称为**7 大晶系**。按

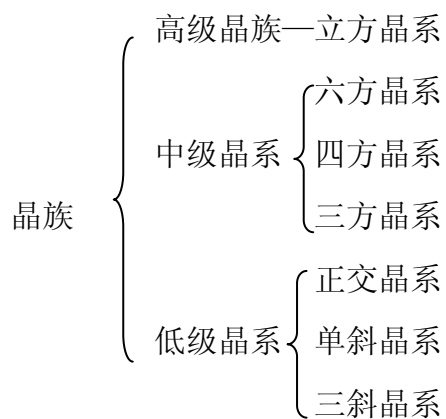
照晶胞的特征对称元素可以分成 7 个不同类型，称为**晶系**。7 大晶系及其几何特征如下：

- (1) 立方晶系： $a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
- (2) 四方晶系： $a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
- (3) 正交晶系： $a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
- (4) 单斜晶系： $a \neq b \neq c; \alpha = \gamma = 90^\circ; \beta \neq 90^\circ$
- (5) 三斜晶系： $a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
- (6) 六方晶系： $a = b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$
- (7) 三方晶系： $a = b = c; \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$

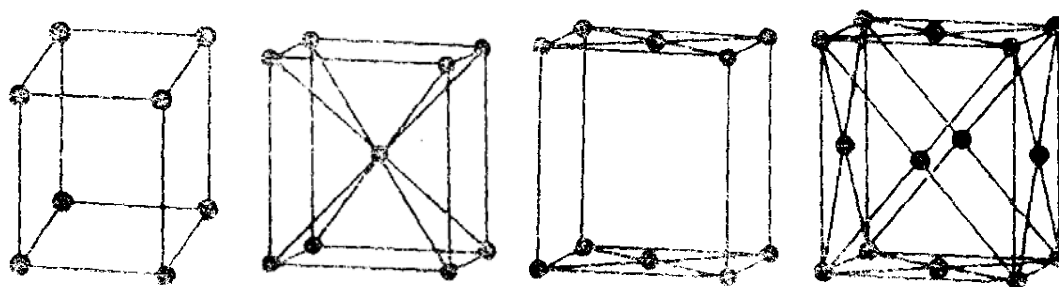
对应于 7 个晶系的单胞如下：



这 7 大晶系按对称程度增加的次序分别为：三斜晶系、单斜晶系、正交晶系、三方晶系、四方晶系、六方晶系、立方晶系。按照对称性不同，7 大晶系分为 3 大晶族，如下：

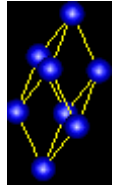
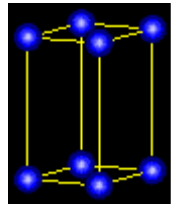
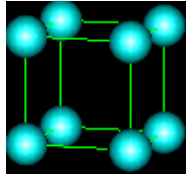
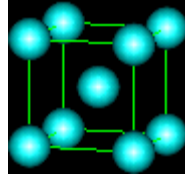
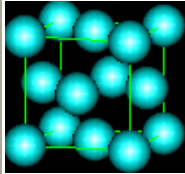


对于每一类格子，考虑到平行六面体选取原则，可能会出现四种情况：简单格子，只有八个顶点处有结点，故只含有 1 个结点；体心格子，除 8 个顶点外，六面体中心处还有 1 个结点，故含有 2 个结点；底心格子：除了 8 个顶点外，上下两个表面的中心处各有 1 个结点，故含有 2 各结点；面心格子：除了 8 个顶点外，六个表面的中心处各有 1 个结点，故含有 4 各结点。



对应于 7 大晶系，考虑简单、体心、面心和底心的存在，应该有 28 种格子。但是，这 28 种格子中，有的可能不满足对称性要求，有的则不符合选择原则。去掉了这些不符合要求的格子后，共有 14 种不同形式的空间格子。这就是通常所说的 14 种布拉维格子，下面是几种不同的表示方法。

晶系	简单格子 (P)	底心格子 (C)	体心格子 (I)	面心格子 (F)
三斜		C=I	I=F	F=P
单斜			I=F	F=C
正交				
四方		C=P		F=I

斜方		与本晶系对称不符	I=F	F=P
六方		与本晶系对称不符	与空间格子的条件不符	与空间格子的条件不符
立方		与本晶系对称不符		

14 种可能的 Bravais 点阵

CUBIC
 $a = b = c$
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

TETRAGONAL
 $a = b \neq c$
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

ORTHORHOMBIC
 $a \neq b \neq c$
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

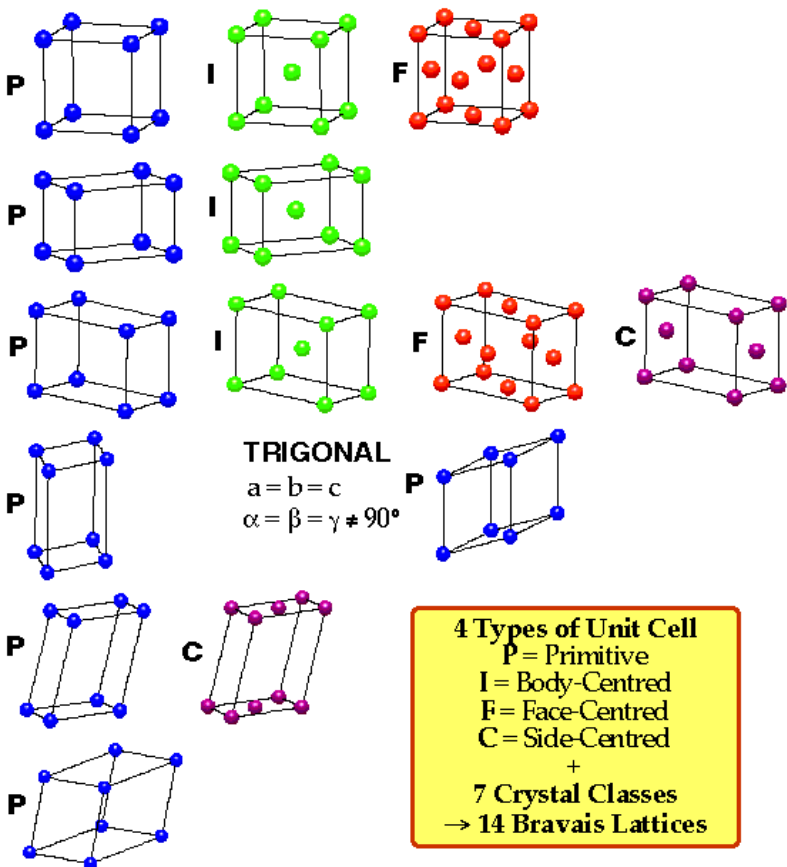
HEXAGONAL
 $a = b \neq c$
 $\alpha = \beta = 90^\circ$
 $\gamma = 120^\circ$

TRIGONAL
 $a = b = c$
 $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$

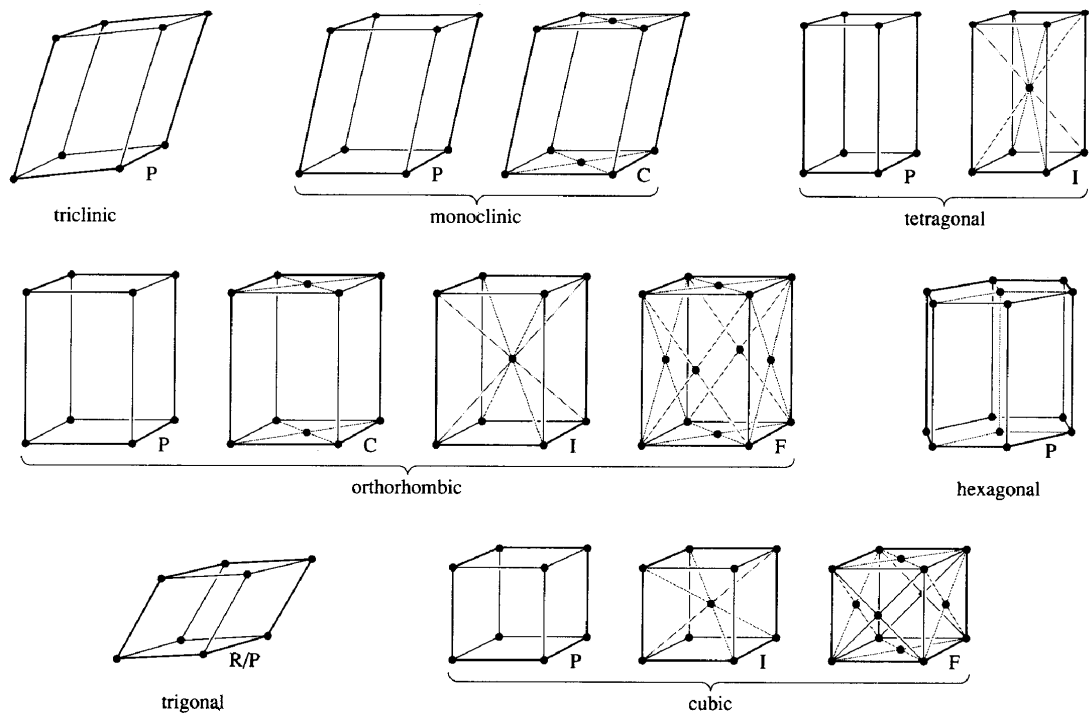
MONOCLINIC
 $a \neq b \neq c$
 $\alpha = \gamma = 90^\circ$
 $\beta \neq 120^\circ$

TRICLINIC
 $a \neq b \neq c$
 $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$

4 Types of Unit Cell
 P = Primitive
 I = Body-Centred
 F = Face-Centred
 C = Side-Centred
 +
 7 Crystal Classes
 → 14 Bravais Lattices



14 种空间点阵型式示意图(14 个 Bravais 点阵)



含有 1 个结点的格子也称为**素格子**；含有 1 个以上结点的格子相应地称为**复格子**。只含一个结构基元的晶胞称为**素晶胞**；含有 1 个以上结构基元的晶胞则称为**复晶胞**。

2.1.3 结点位置、晶向、晶面及其表示方法

(1) 结点位置的表示方法

以布拉维格子的任意一个顶点为原点，以三条棱作为坐标轴建立空间坐标系。用结点在这一空间坐标系中的坐标即可表示结点的位置。

①简单格子：只有八个顶点处有结点。坐标值分别为：**000, 010, 001, 100, 101, 110, 011, 111**。这 8 个结点对于布拉维格子而言只相当于 1 个结点，其位置可以统一写成：**000**

②体心格子：除了八个顶点外，体心处还有 1 个结点。顶点的坐标值与简单格子相同，可以统一写成：**000**。体心的坐标值为 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ 。

③底心格子：除了八个顶点外，底心处还有 2 个结点。顶点的坐标值与简单格子相同，可以统一写成：**000**。底心的坐标值为 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$ ， $\frac{1}{2}\frac{1}{2}1$ ，这两个结点相当于 1 个，记为 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$ 。

④面心格子：除了八个顶点外，面心处还有 6 结点。顶点的坐标值与简单

格子相同，可以统一写成：000。面心的坐标值为 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$ ， $\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$ ， $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2}\frac{1}{2}1$ ， $1\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ ，面心的结点相当于3个， $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$ ， $\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$ ， $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ 。

(2) 晶向和晶向指数

空间点阵的结点可以看成是分列在一系列相互平行的直线上，这些直线系称为**晶列**。同一个点阵可以形成方向不同的晶列，每一个晶列定义了一个方向称为**晶向**。或者说空间点阵还原为晶体结构后，行列的方向则称为**晶向**，表示晶体中原子的位置、原子列的方向。

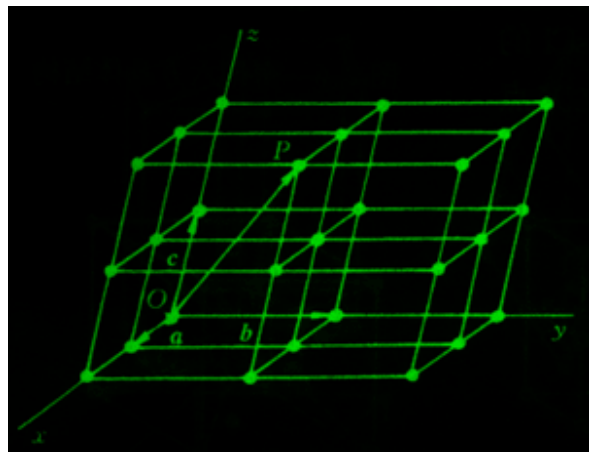
任意阵点 P 的位置可以用矢量或者坐标来表示。

$$OP = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$$

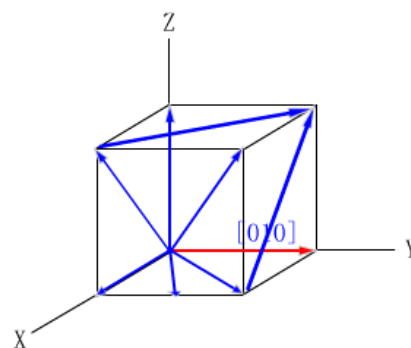
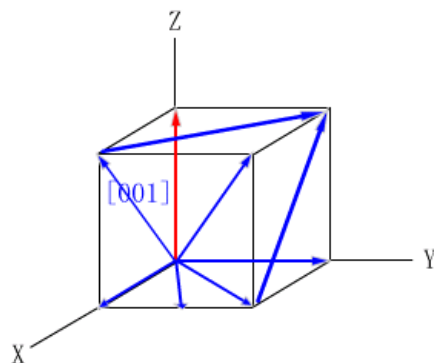
晶向指数表示为： $[uvw]$

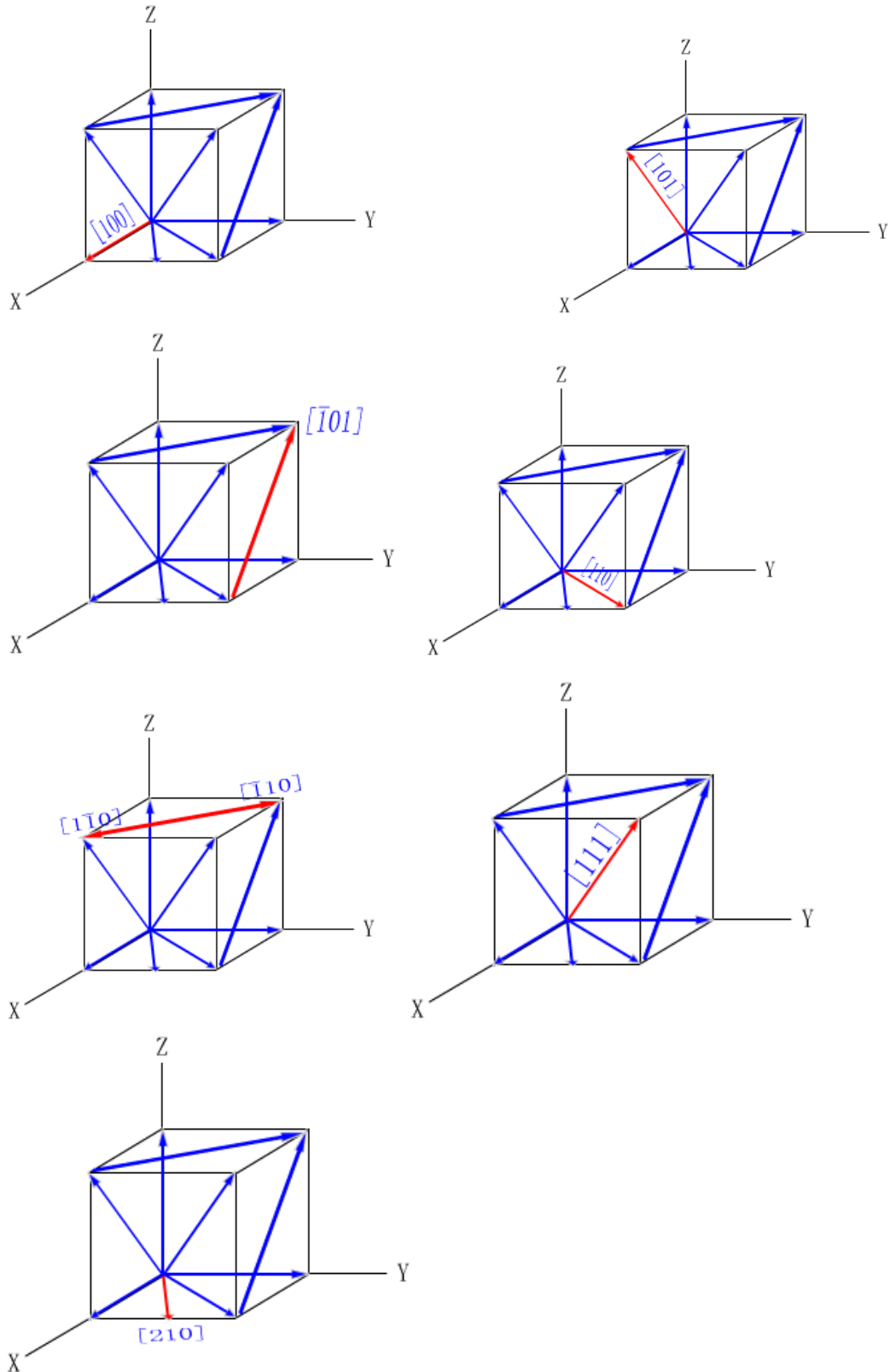
晶向指数的确定步骤如下

- ①以晶胞的某一阵点 O 为原点，过原点 O 的晶轴为坐标轴 x, y, z, 以晶胞点阵矢量的长度作为坐标轴的长度单位。
- ②过原点 O 作一直线 OP, 使其平行于待定晶向。
- ③在直线 OP 上选取距原点 O 最近的一个阵点 P, 确定 P 点的 3 个坐标值。
- ④将这 3 个坐标值化为最小整数 u, v, w, 加以方括号, $[uvw]$ 即为待定晶向的晶向指数。



[例子]





晶向指数的意义

考虑到空间点阵的平移对称性，晶向指数表示所有相互平行、方向一致的晶向；所指方向相反，则晶向指数的数字相同，但符号相反，如 $[\bar{1}21]$ $[\bar{1}\bar{2}\bar{1}]$ 。晶

体中因对称关系而等同的各组晶向可归并为一个**晶向族**，用 $\langle u \ v \ w \rangle$ 表示。立方晶系的四条体对角线构成的 8 个晶向（方向不同）上原子的排列是完全相同的，只是取向不同，所以构成了一个晶向族，可以用符号 $\langle 111 \rangle$ 表示。但是，正交晶系中的 $[100]$ 、 $[010]$ 和 $[001]$ 这 3 个晶向就不是等同的，因为在这 3 个晶向上的原子间距分别为 a 、 b 、 c ，原子的排列情况不同，所以不属于同一晶向族。

(3) 晶面和晶面指数

空间点阵的结点可以从各个方向被划分为许多组平行且等距的平面点阵。这些平面点阵所处的平面称为**晶面**。而实际晶体外形中每一个晶面都与一组平面点阵平行，可根据晶面和晶轴之间的取向关系用晶面指标标记同一晶体中不同方向的平面点阵组或晶体外形的晶面，这就是晶体学中常用的晶面指标。用 Miller(密勒) 指数标定晶面指数。

晶面指标的定义是“平面点阵面在三个晶轴上的倒易截数之比”。设有一平面点阵和三个坐标轴 x, y, z 相交，在三个坐标轴上的截长分别为 ra, sb, tc ，则 r, s, t 分别为平面点阵在三个轴上的截数，即可反映出平面点阵的方向。但直接用截数之比 $r:s:t$ 时，当平面点阵与某一坐标轴平行时，截数将为 ∞ 。为了避免这种情况，规定用截数的倒数（即倒易截数）之比 $1/r:1/s:1/t$ 作为平面点阵的指标，由于点阵的特性，这个比值一定可以化成互质整数之比，即 $1/r:1/s:1/t=h:k:l$ ，我们把晶体的每个晶面在三个晶轴上的倒易截数之比都成互质的整数比（而且一般时简单整数比）这个规律称为有理指数定律。这样 (hkl) 即作为此平面点阵面的晶面指标，在晶体学中常称为 Miller（米勒）指标，是由 Miller 在 1839 年建议使用的。

例如图中所示的 GHI, DEF, ABC 三个晶面

截长	2a	b	2c	4a	2b	4c	6a	3b	6c	ra	sb	tc
截数	2	1	2	4	2	4	6	3	6	r	s	t
倒易截数	1/2	1	1/2	1/4	1/2	1/4	1/6	1/3	1/6	1/r	1/s	1/t
倒易截数之比	1/2:1:1/2			1/4:1/2:1/4			1/6:1/3:1/6			1/r: 1/s: 1/t		
互质整数	1:2:1			1:2:1			1:2:1			h:k:l		
晶面指标	(121)			(121)			(121)			(hkl)		

可以看出，三个晶面的指标相同，且三个平面互相平行。因此，我们说晶面指标是用来标记一组互相平行且间距相等的平面点阵面与晶轴的取向关系的参

数。确定晶面指数的步骤可概括如下：

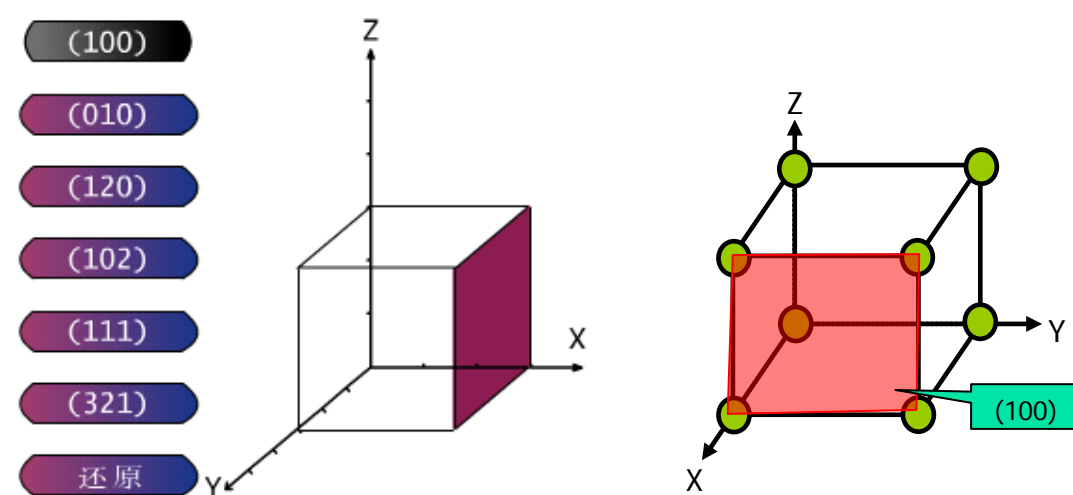
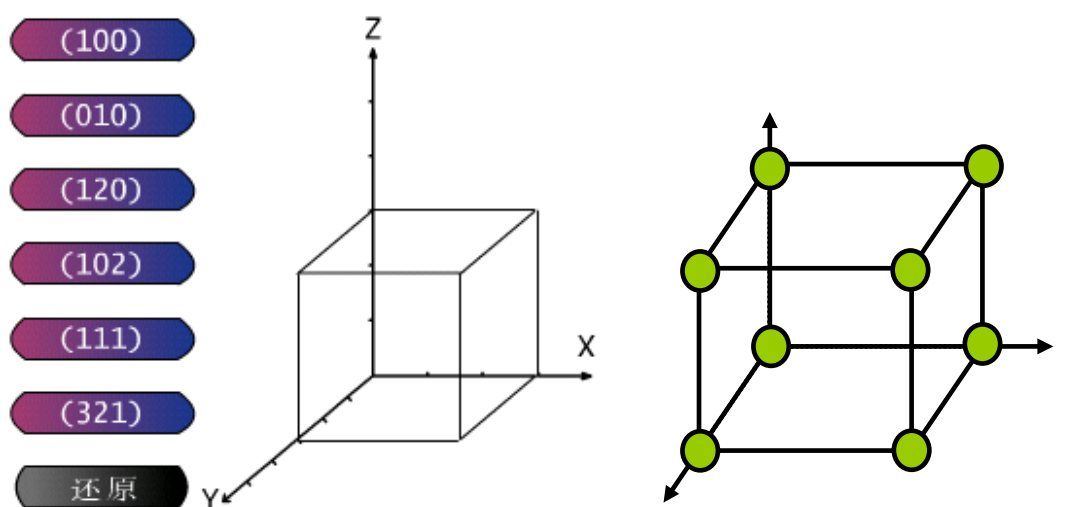
①在点阵中设定参考坐标系，设置方法与确定晶向指数时相同；

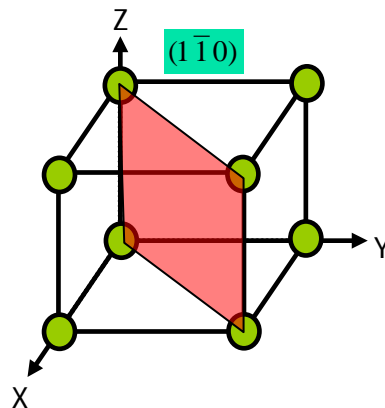
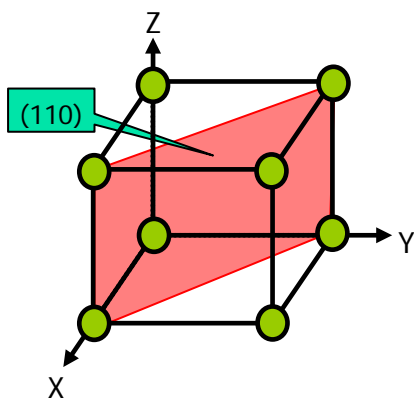
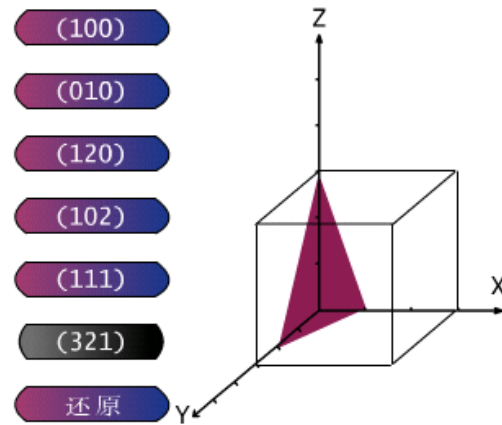
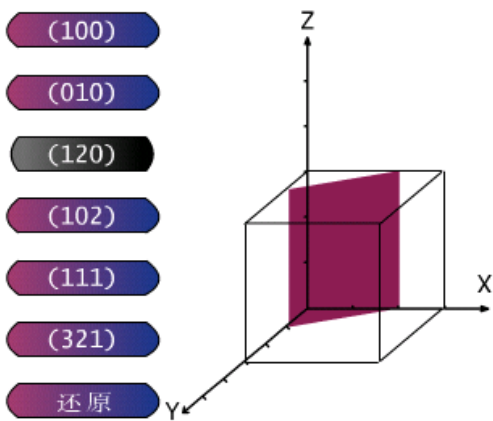
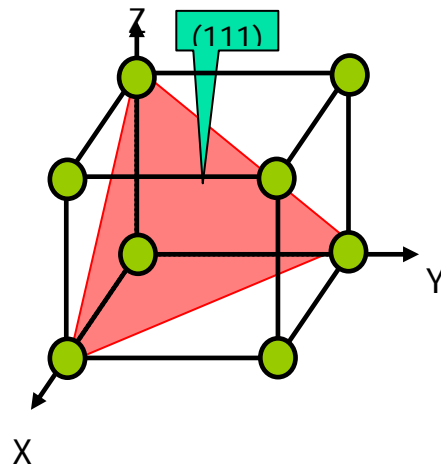
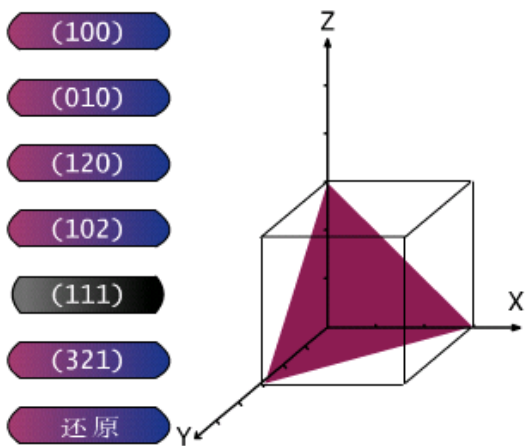
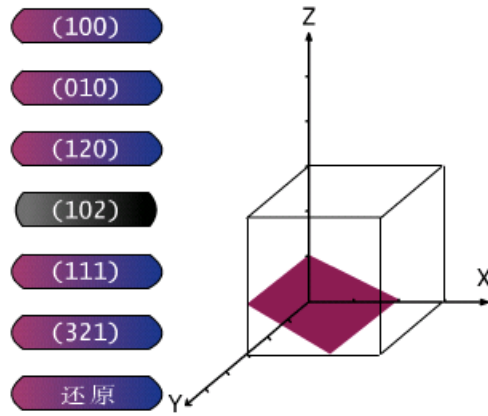
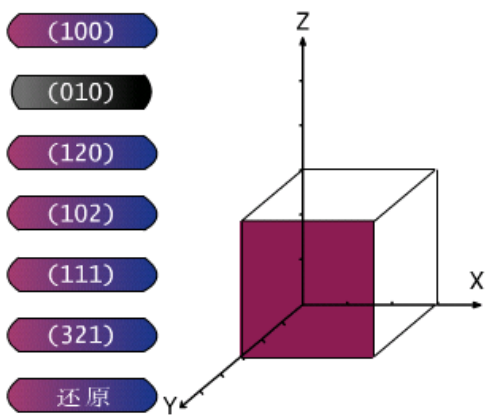
②求得待定晶面在三个晶轴上的截距，若该晶面与某轴平行，则在此轴上截距为无穷大；若该晶面与某轴负方向相截，则在此轴上截距为一负值；

③取各截距的倒数；

④将三倒数化为互质的整数比，并加上圆括号，即表示该晶面的指数，记为 (hkl) 。

[例子]





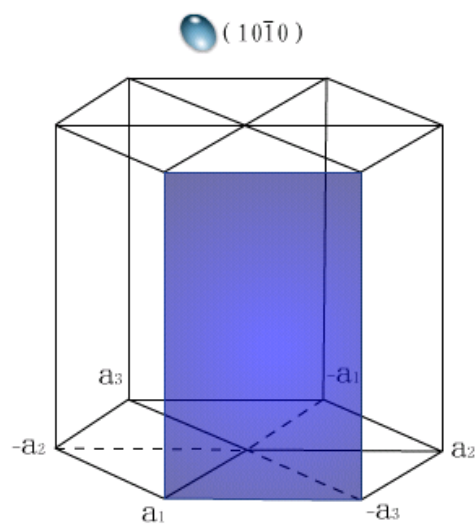
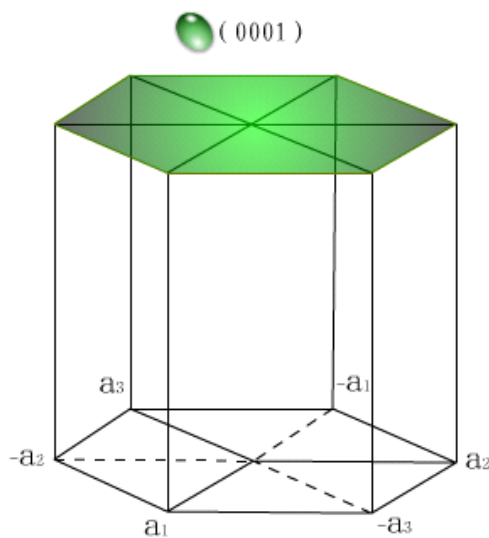
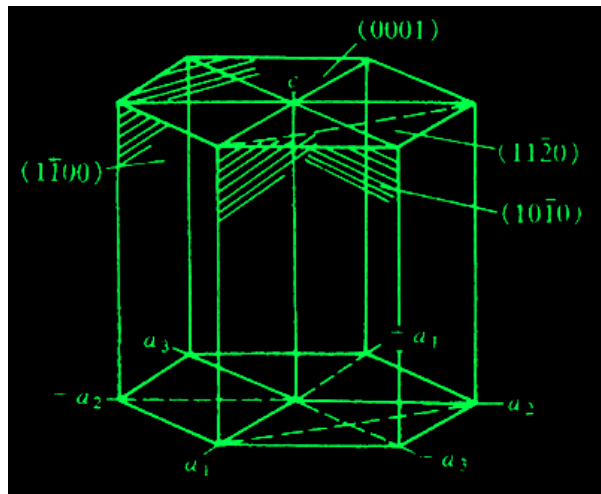
晶面指数的意义

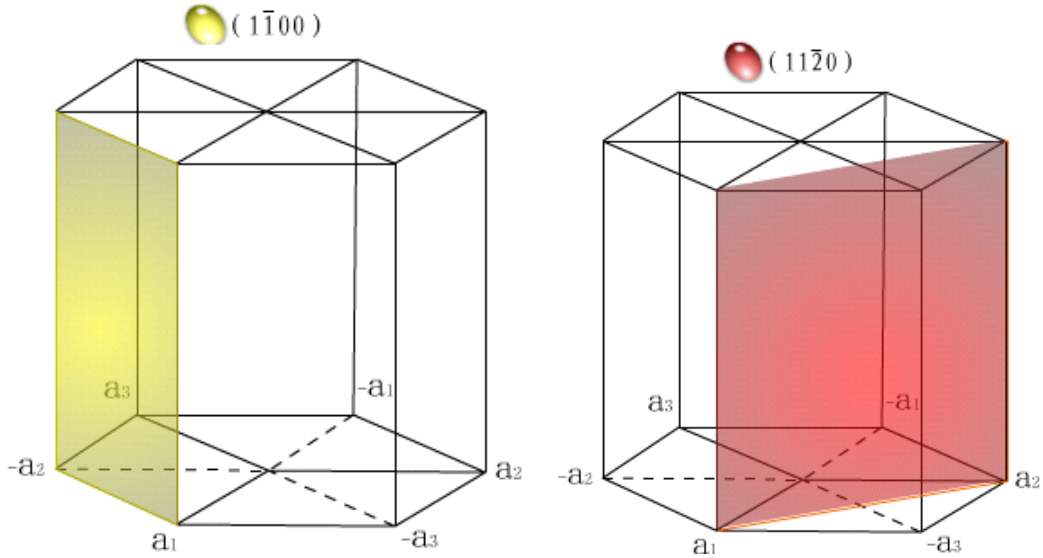
晶面指数所代表的不仅是某一晶面，而是代表着 一组相互平行的晶面。在晶体内凡晶面间距和晶面上原子的分布完全相同，只是空间位向不同的晶面可以归并为同一晶面族，以 $\{hkl\}$ 表示，它代表由对称性相联系的若干组等效晶面的总和。晶面族一经划定，所有结点都全部包含在晶面族中而无一遗漏。一族晶面平行且两两等距，这是空间点阵周期性的必然结果。

立方晶系中，相同指数的晶向和晶面垂直；晶面族 $\{111\}$ 表示正八面体的面；晶面族 $\{110\}$ 表示正十二面体的面；在立方晶系中，晶向 $[hkl]$ 总是垂直于同指数的晶面 (hkl) 的。但是这一关系在其他晶系中并不普遍适用。

六方晶系指数

六方晶系的晶向指数和晶面指数同样可以应用上述方法标定，这时取 a_1, a_2, c 为晶轴，而 a_1 轴与 a_2 轴的夹角为 120° ， c 轴与 a_1, a_2 轴相垂直。但这种方法标定的晶面指数和晶向指数，不能显示六方晶系的对称性，同类型 晶面和晶向，其指数却不相雷同，往往看不出他们的等同关系。

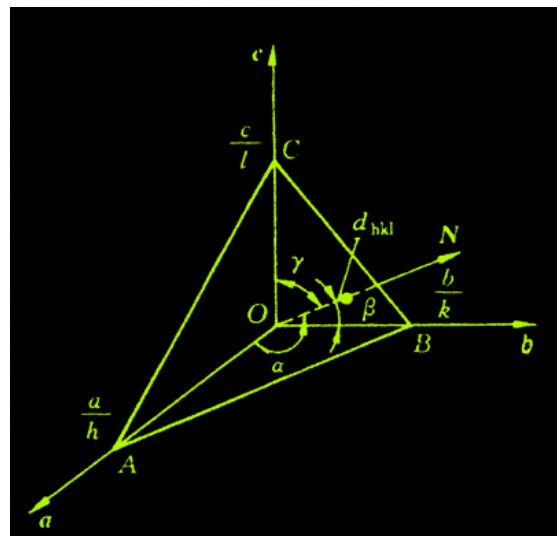
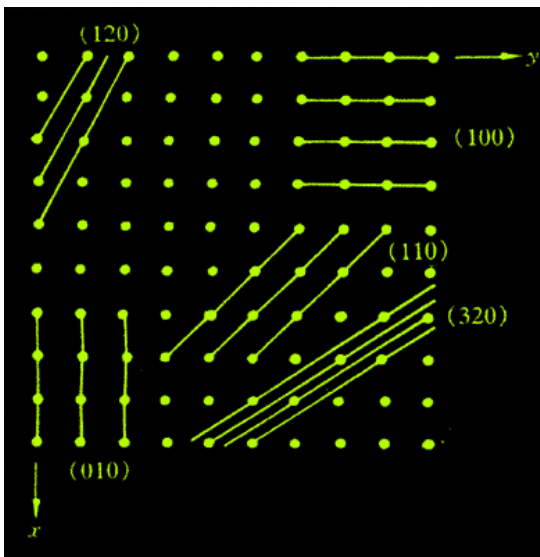




六方晶系晶面指数标定的方法：根据六方晶系的对称特点，对六方晶系采用 a_1 , a_2 , a_3 及 c 四个晶轴， a_1 , a_2 , a_3 之间的夹角均为 120 度，这样，其晶面指数就以 (hkl) 四个指数来表示。根据几何学可知，三维空间独立的坐标轴最多不超过三个。前三个指数中只有两个是独立的，它们之间存在以下关系： $i=-(h+k)$ 。上面是一些六方晶系的晶面指数。

2.1.4 晶面间距

具有相同密勒指数的两个相邻平行晶面之间的距离称为**晶面间距**，用 d_{hkl} 表示。可由晶面指数求面间距。通常，低指数的面间距较大，而高指数的晶面间距则较小；晶面间距愈大，该晶面上的原子排列愈密集；晶面间距愈小，该晶面上的原子排列愈稀疏（如下图左）。



晶面间距公式的推导如下（见上图右）：

$$d_{hkl} = \frac{a}{h} \cos \alpha = \frac{b}{k} \cos \beta = \frac{c}{l} \cos \gamma$$

$$d_{hkl}^2 \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 + \left(\frac{k}{b} \right)^2 + \left(\frac{l}{c} \right)^2 \right] = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

不同晶系的晶面间距计算公式如下：

正交晶系
$$d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h}{a} \right)^2 + \left(\frac{k}{b} \right)^2 + \left(\frac{l}{c} \right)^2}}$$

立方晶系
$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

六方晶系
$$d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{h^2 + hk + k^2}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{l}{c} \right)^2}}$$

2.1.5 对称性

晶体结构最基本的特点是具有空间点阵结构，因而在晶体的内部结构和它的理想外形乃至许多宏观性质上都表现出一定的对称性。对称性不仅是晶体学而且是整个自然科学的基本概念之一，作为人类文明史上永恒的审美要素，对称性几乎存在与人类的所有创作中，并且也是大自然建筑师的建筑法则。我国西汉的《韩诗外传》中记载“凡草木花多五出，雪花独六出”，反映出 2000 多年前，善于形象思维的中国人朴素的对称性观念。

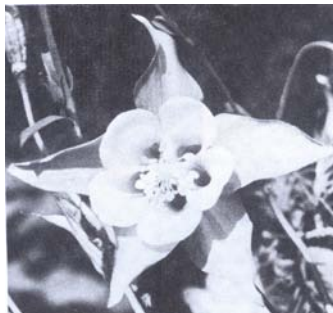


Figure 2-33. Flower displaying 5 · m symmetry. Photograph by the

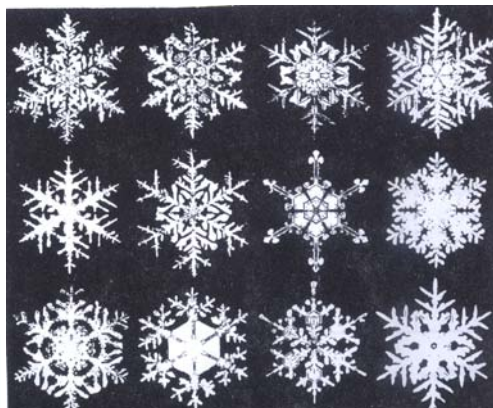
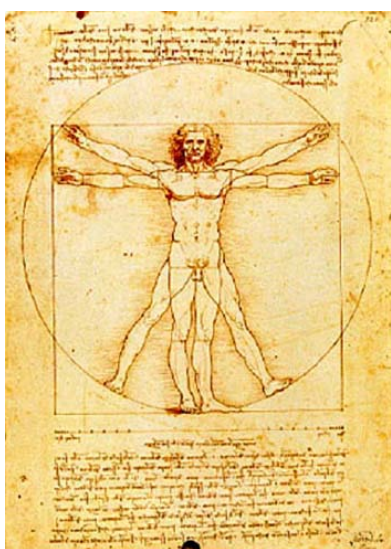


Figure 2-42. Snowflake photomicrographs by Bentley, after Bentley and Humphreys [2-19].

同样是 2000 多年前，擅长抽象思维的古希腊数学家柏拉图(Plato)证明了用正多边形构成的多面体只有五种，即正四面体、正八面体、立方体、正十二面体和正二十面体，这五种正多面体也称为柏拉图体。

对称指相对又相称，即对称图形中要含有等同部分，其等同部分要规则排列。对称的希腊字根的意思是类似尺寸的。



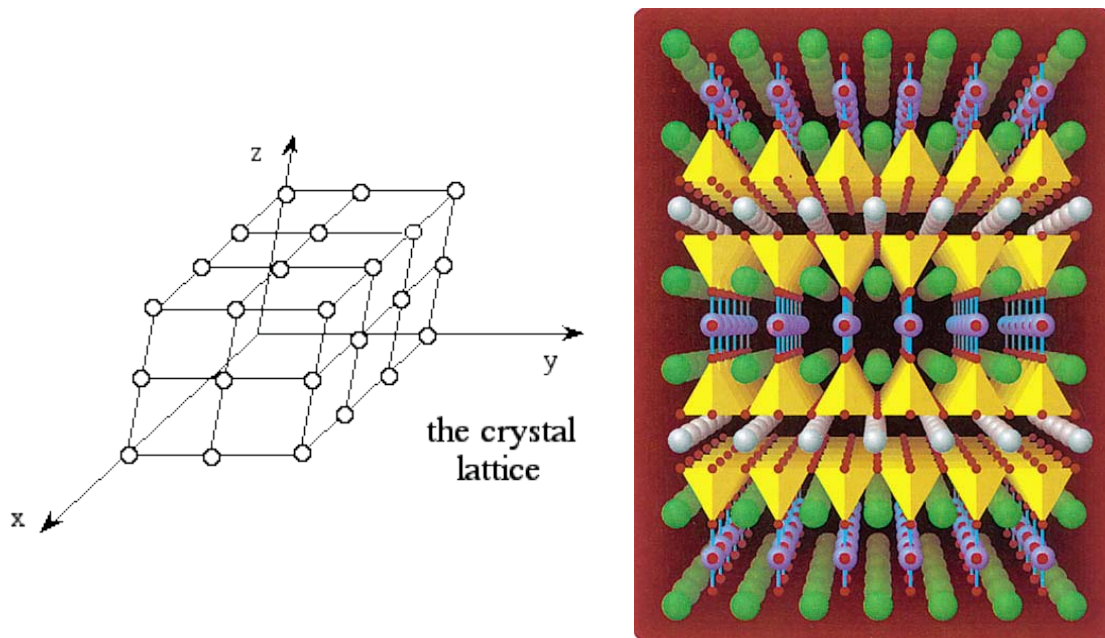
回文词

雾窗寒对遶天暮	暮天遶对寒窗雾
花蕊正啼鴉	鴉啼正蕊花
袖罗垂影瘦	瘦影垂罗袖
风剪一丝红	红丝一剪风

科学而严格的定义：对称性指的是物体在经过一定的操作之后其空间构型能够完全复原的性质。这种“一定的操作”称为**对称操作**。经过对称操作就是指一个物体经过运动或变换，使得变换后的物体与变换前不可区分（复原，重合）。对称操作一定与某一个几何图形相联系。换句话说，进行对称操作都必须凭借于一定的几何要素，这些几何要素可以是点、也可以是直线或者平面。进行对称操作所凭借的几何要素称为**对称要素**。在进行对称操作时，如果物体中至少有一个点

保持不动，那么相应的对称操作就称为**点对称操作**，也叫**宏观对称操作**。**对称元素**就是在对称操作中保持不变的几何图型，包括点、轴或面。

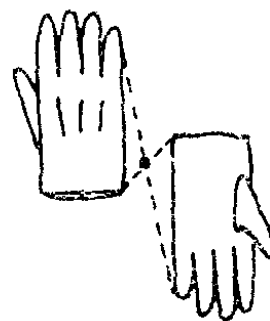
晶格的对称性



在晶体内部结构中（以及在相应抽象出来的空间点阵中）可能存在的对称要素以及相应可以进行的宏观对称操作主要有以下几类：对称中心(倒反或反演)、对称面（反映或镜面）、旋转轴、倒转轴（象转轴或旋转倒反）。

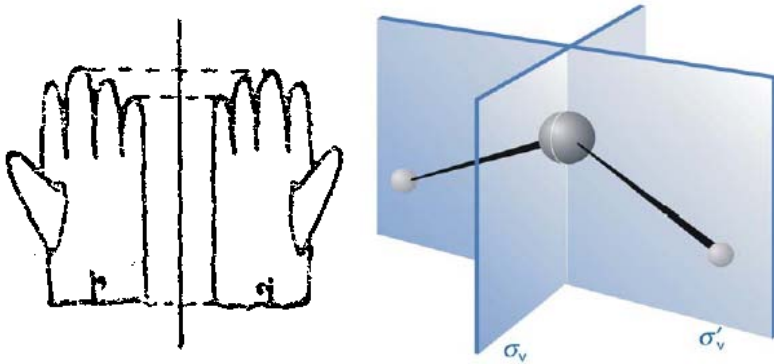
(1) 对称中心

对称中心是一个假想的几何点，其对应的对称操作是对于这个点的倒反（反演）。通过对称中心作任意直线，在此直线上位于对称中心两侧等距离的两点是性质完全相同的对应点。在晶体中，如果存在有对称中心，则对称中心肯定位于晶体的几何中心。在结晶学中，对称中心一般用符号“ i ”表示。



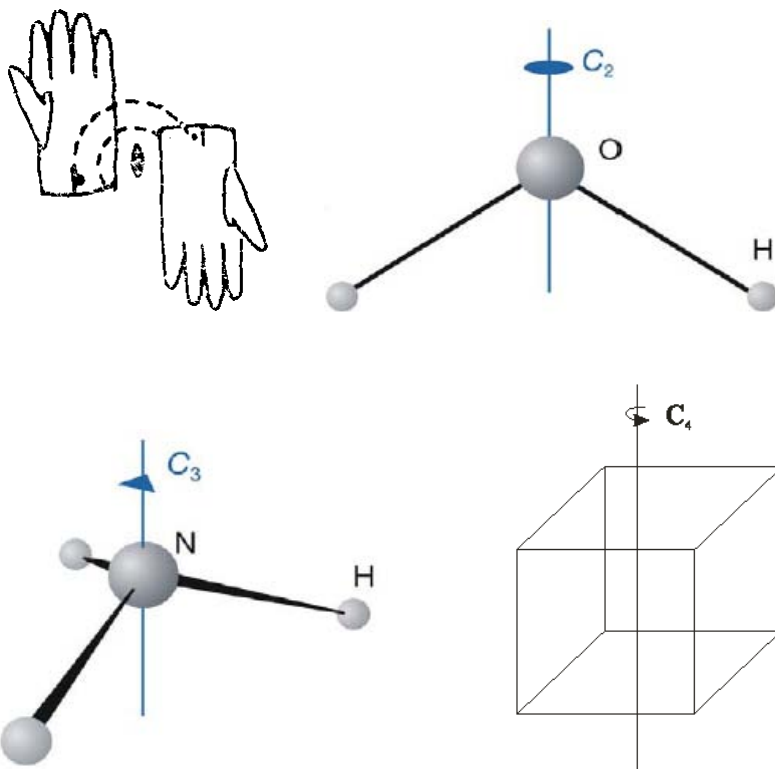
(2) 对称面

对称面是一个假想的平面，相应的对称操作为对此平面的反映。对称面就像一面镜子，把物体的两个相同的部分以互成镜像反映的关系联系起来。垂直于对称面作任意直线，位于直线两侧等距离的两点是性质完全相同的对应点。晶体中如果存在有对称面，则必定通过晶体的几何中心并将晶体分为互成镜像反映的两个相同部分。在结晶学中，对称面一般用符号“ m ”表示。



(3) 旋转轴

旋转轴是一条假想的直线，相应的对称操作是绕此直线的旋转。物体在旋转一周的过程中重复的次数称为该旋转轴的轴次。在结晶学中，一般直接采用轴次表示旋转轴，如“1”即代表 1 次旋转轴，“3”即代表 3 次旋转轴等。1 次旋转轴相当于没有对称性；吊扇叶片每旋转一周就重复 3 次，相应的对称轴为三次对称轴。在旋转操作中，使物体复原所需的最小旋转角 α 称为基转角。轴次 n 可以写成 $n = \frac{360}{\alpha}$ 。晶体中如果存在旋转轴，则其必定通过晶体的几何中心。



在晶体的宏观对称中， n 的数值不能是任意的。晶体对称定律证明：在晶体中只可能出现一次、二次、三次、四次和六次旋转轴。不可能出现五次以及高于六次的旋转轴。

(4) 倒转轴

倒转轴是一种复合对称要素，由一根假想的直线和在此直线上的一个定点组成。相应的对称操作是绕此直线旋转一定角度以及对此定点的倒反。根据晶体对称轴定律，倒转轴也只有 1 次、2 次、3 次、4 次和 6 次等 5 种。倒反轴表示方法 $\bar{1}$ 、 $\bar{2}$ 、 $\bar{3}$ 、 $\bar{4}$ 、 $\bar{6}$ 。其中只有 4 次倒转轴是一个独立的基本对称操作，其他 4 种倒转轴都可以表示为对称中心、对称面、旋转轴的组合。



1 次倒转轴相当于旋转 360° 后再对中心反演而图形不变。由于旋转 360° 将使图形回复到原始位置，因此，1 次倒转轴的效果与单纯的反演操作完全相同。1 次倒转轴也就是对称中心， $\bar{1} = i$ 。

2 次倒转轴相当于旋转 180° 后再对中心反演而图形不变。2 次倒转轴就是对称面， $\bar{2} = m$ 。

3 次倒转轴相当于旋转 120° 后再对中心反演而图形不变。先旋转 120° 图形能够复原，因此该图形具有 1 条 3 次旋转轴，该图形显然具有一个对称中心。因此 3 次倒转轴相当于 1 条 3 次旋转轴加上一个对称中心， $\bar{3} = 3 + i$ 。

4 次倒转轴相当于旋转 90° 后再对中心反演而图形不变。这是一个独立的对称操作。它既没有 4 次旋转轴也没有对称中心，不能分解成其他基本对称要素的组合。

6 次倒转轴相当于旋转 60° 后再对中心反演而图形不变。先旋转 120° 图形能够复原，因此该图形具有 1 条 3 次旋转轴；该图形显然具有一个对称面。因此 6 次倒转轴相当于 1 条 3 次旋转轴加上一个对称面， $\bar{6} = 3 + m$ 。

综上所述，晶体中只存在有 8 种独立的对称要素，分别为：

$$i, m, 1, 2, 3, 4, 6, \bar{4}$$

任何宏观晶体所具有的对称性都是这 8 种基本对称要素的组合。

宏观晶体的几何外形是多种多样的，不同晶体中存在的对称要素也不同。晶

体中有几个对称要素共存时，它们在空间的分布也应该符合整体的对称关系。因此，对称要素的组合具有一定的规律。晶体中对称要素的集合称为晶体的对称型。已经证明，在一切宏观晶体中，总共可能出现的对称型只有 32 种。这就是在晶体研究中常说的 32 点群。在宏观晶体中存在的所有对称要素都必定通过晶体的中心，因此不论如何进行对称操作，晶体中至少有一个点是不变的，因此对称型也称为**点群**。晶体结构中还有一些微观的对称要素，微观对称要素的核心是平移轴，微观对称要素的集合构成平移群。晶体结构中存在的一切对称要素（包括平移轴在内）的集合称为**空间群**。晶体中可能存在的空间群只有 230 种。

【阅读材料】各种对称的例子

请分析各例中的对称类型。

Figure 2-1.
Egyptian sculpture emphasizing bilateral symmetry from B.C. 2720. Photo of Lehnert & Landrock Art Publishers, Cairo. Used by permission.

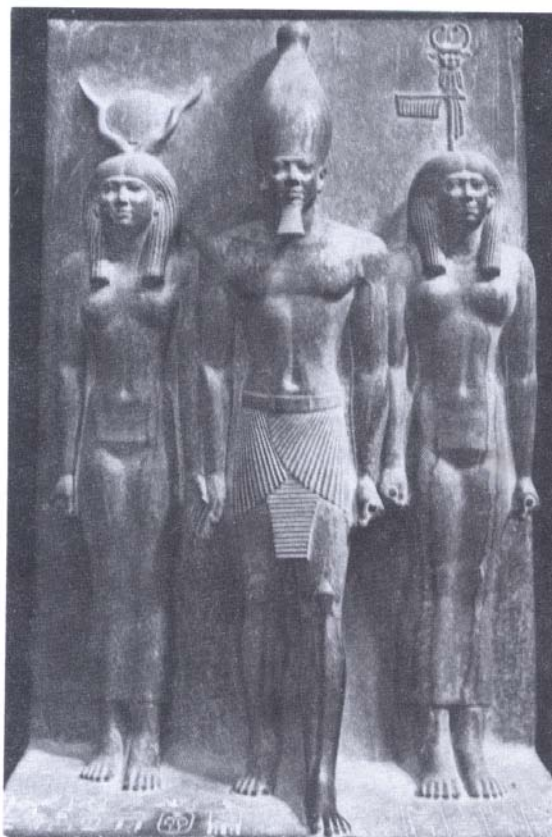


Figure 2-3.
M. C. Escher: "Curl-up".
Collection Haags Gemeentemuseum - The Hague. Reproduced with permission.
© M. C. Escher Heirs c/o
Cordon Art - Baarn - Holland.

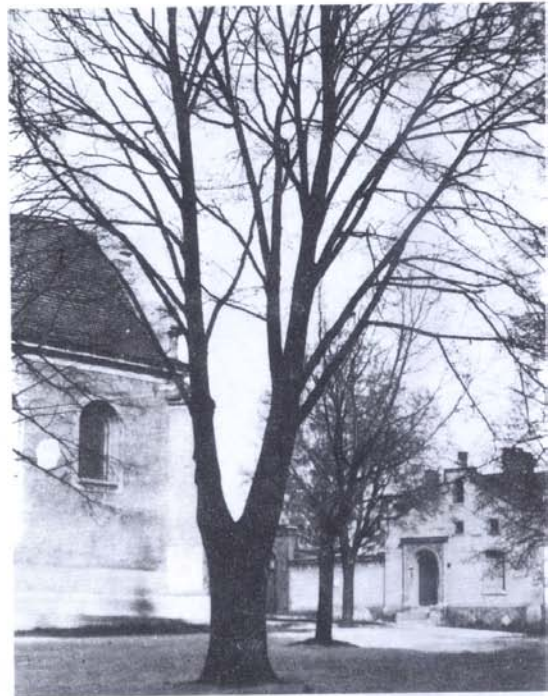
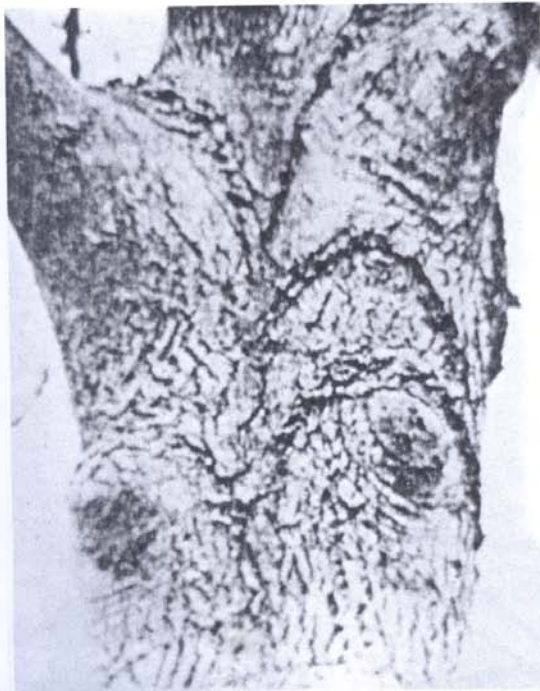
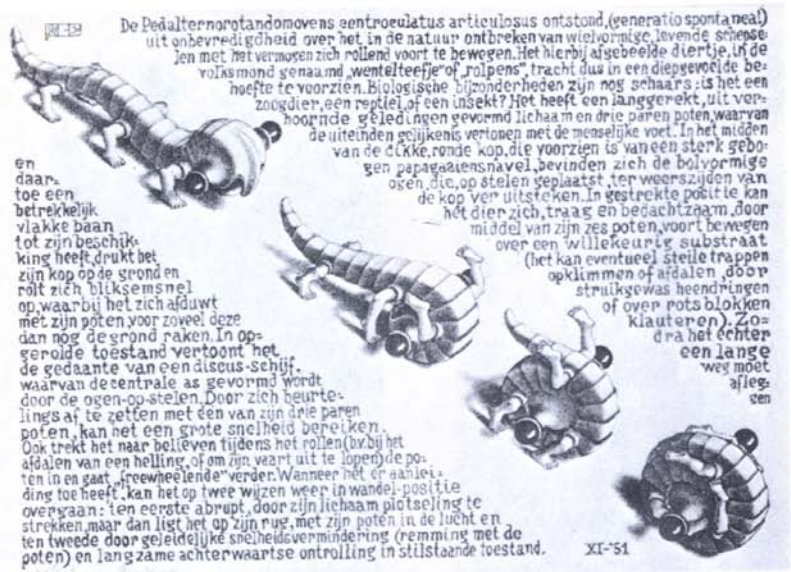


Figure 2-4.
Accidental bilateral symmetry
of trees.
(a) "Tree near Aveley, Essex",
photograph used by kind
permission of C. T. Ballard.
(b) Photograph by the
authors.

Figure 2-5.
Man-made bilateral symmetry
of a tree. Photograph by the
authors.

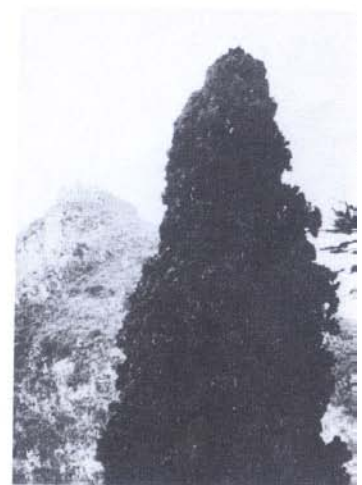
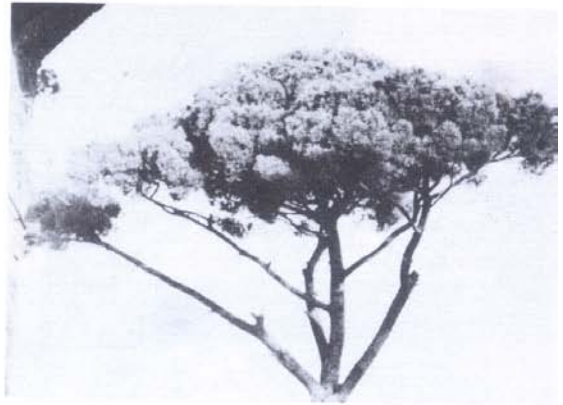
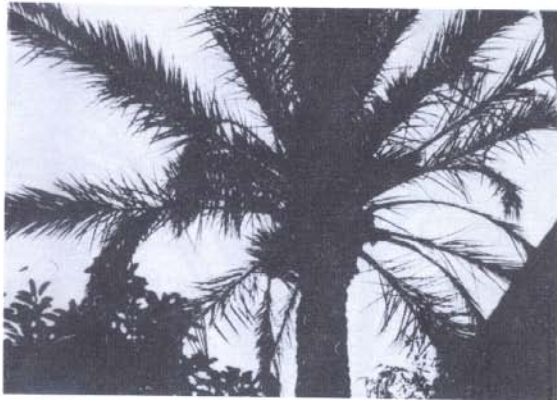


Figure 2-6.
Approximate radial and
conical symmetries in trees.
Photographs by the authors.

Figure 2-9.
The bilateral symmetry of the human face as indicated by artists

(a) Henri Matisse: "Woman's portrait". Reproduction by permission of The Hermitage, Leningrad.

(b) George Buday: "Miklós Radnóti", wood-cut, 1969. Reproduced by kind permission of George Buday, R. E.



(c) Jenő Barcsay: "Woman's head", 1961. Reproduced by permission.



Figure 2-10.
Eszter Hargittai in front of a shop-window (1980). Photograph by the authors.



Figure 2-11.
Sculpture from the Charles bridge, Prague. Photograph by the authors.

Figure 2-14.

(a) Salt columns in the Dead Sea. Drawing by Ferenc Lantos after a color slide of Palphot, Ltd., Herzlia, Israel.



(b) Calcium carbonate stalactites and stalagmites in a cave. Photographs by the authors.

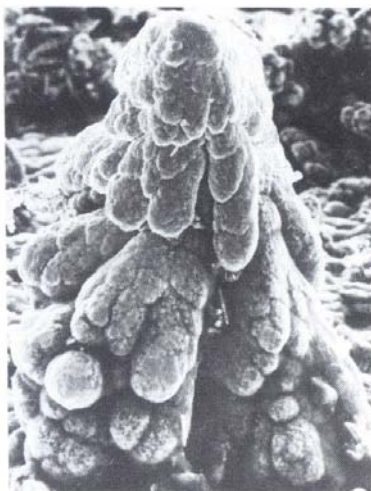
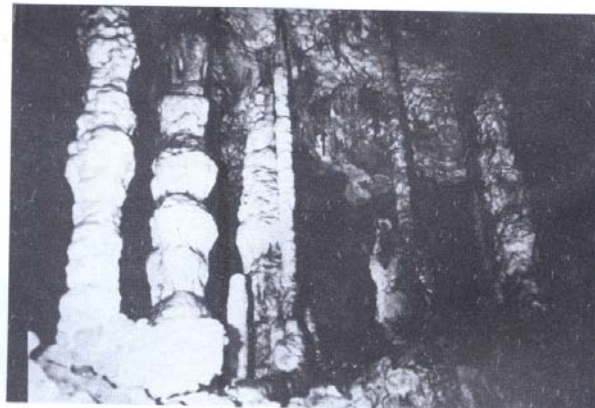
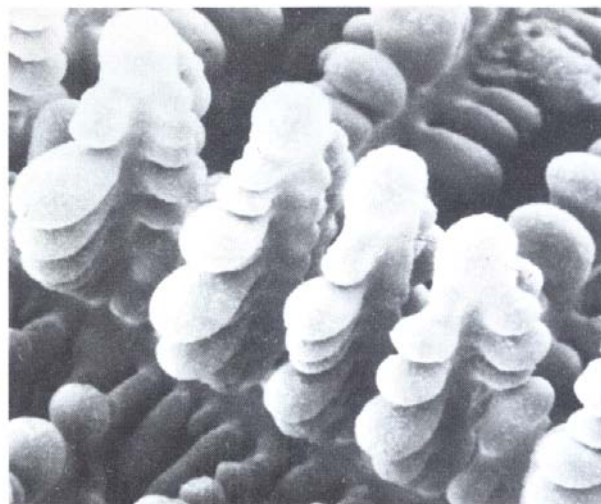


Figure 2-15.

(a) Electrolytically deposited copper, magnification $\times 1000$. Courtesy of Dr. Maria Kazinets, University of Beersheva, 1983.



(b) Directionally solidified iron dendrites from an iron-copper alloy after dissolving away the copper, magnification $\times 2600$. Courtesy of Dr. J. Morral, The University of Connecticut, 1984.

Figure 2-16.
 (a) Hungarian folk-song
 "Crunchy Cherries Are
 Ripening".



(b) Bartók: "Microcosmos,
 Unisono No. 6."

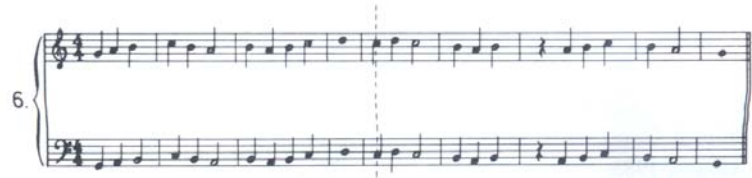


Figure 2-18.
 Edge-on view of a typical
 galaxy and other galaxies in
 gradually more tilted posi-
 tions [2-9]. Reproduced by
 kind permission of R. Jastrow.



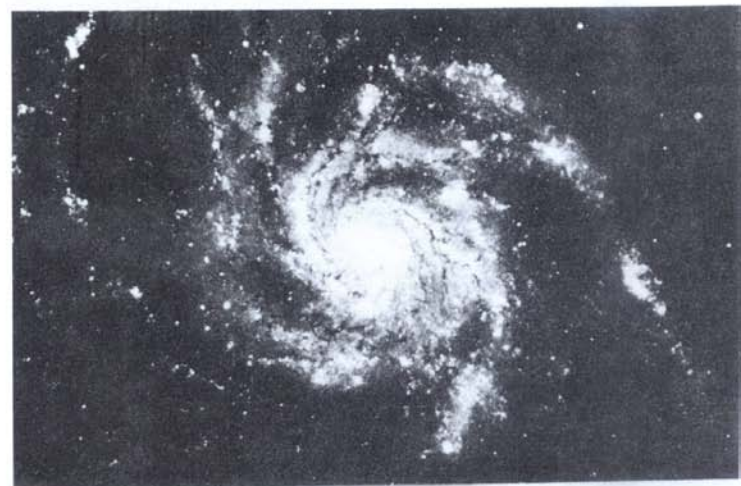
NGC 4565 Viewed edge-on



NGC 4216 Tilted 15 degrees



NGC 7331 Tilted 30 degrees



NGC 5457 Viewed face-on



Figure 2-19.
Double-headed eagles.
Photographs by the authors.

(a) The Habsburg eagle (from Prague).



(b) The Romanov eagle (from Irkutsk).

Figure 2-20.
(a) The contour of yin yang – the principal motif of the South Korean coat of arms.

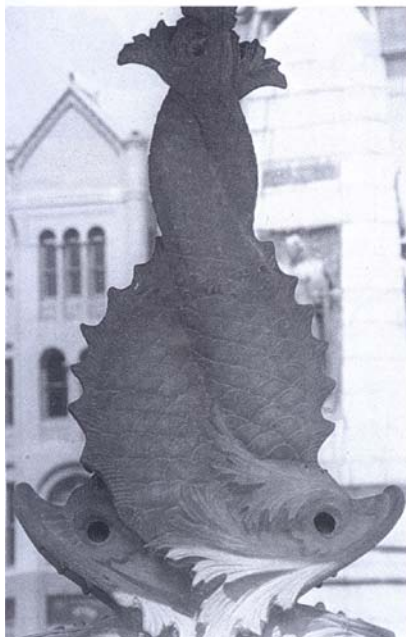


(b) The trademark of a Hungarian washing machine company HAJDUSÁGI IPARMŰVEK.



(c) Taiwanese stamp.

Figure 2-21.
(a) Two-fold rotational symmetry displayed by a Washington, D.C., sculpture of two interweaving fish. Photograph by the authors.



(b) Three-fold rotational symmetry displayed by a Prague sculpture of three interweaving fish. Photograph by the authors.



Figure 2-22.

- (a) Three-blade propeller.
- (b) Window decoration with three-fold rotational symmetry in an ancient Italian town. Photograph by the authors.

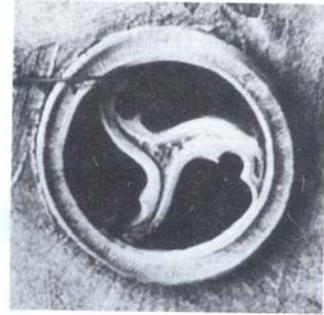
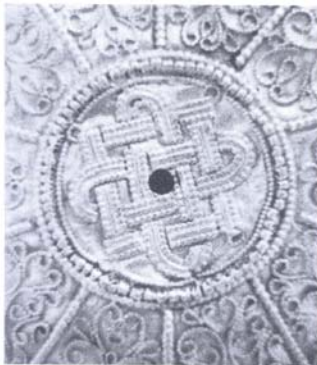
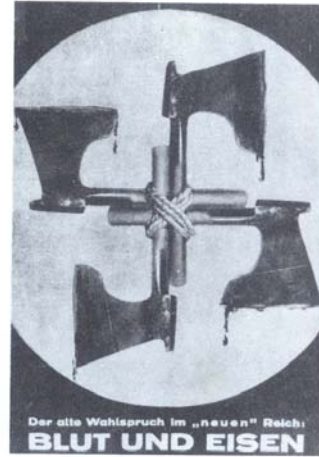


Figure 2-23.

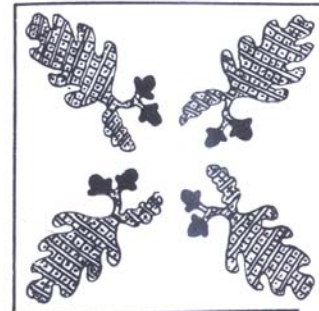
- (a) Children's toy pinwheel.
- (b) John Heartfield: "Blut und Eisen", 1934 [2-11]. Reproduced by permission from Verlag der Kunst, Dresden. All rights reserved.



(c) Rosette on the regalia of the first Hungarian king.



(d) American Indian (Southern Appalachian) decoration [2-12].



(e) Friendship quilt displaying oak leaf wreath [2-13].

Figure 2-24.

- (a) Jellyfish with four-fold rotational symmetry; *Aurelia insulinda*, after [2-6].
- (b) Flower with four-fold rotational symmetry; *Vinca minor*, photograph by the authors.

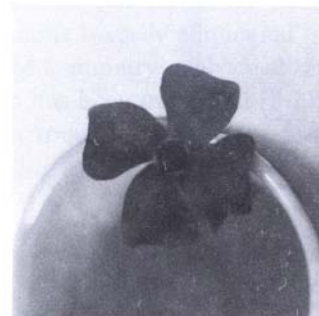
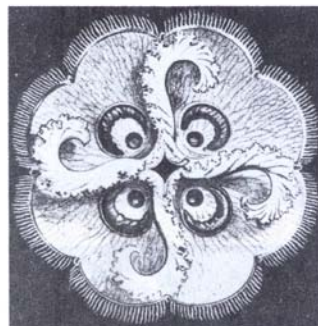


Figure 2-25.

Flowers in a stone-carving on old ruins along Via Appia Antica in Rome. The left one has only (four-fold) rotational symmetry while the right one has a combination of a rotation axis and its intersecting symmetry planes. Photograph by the authors.

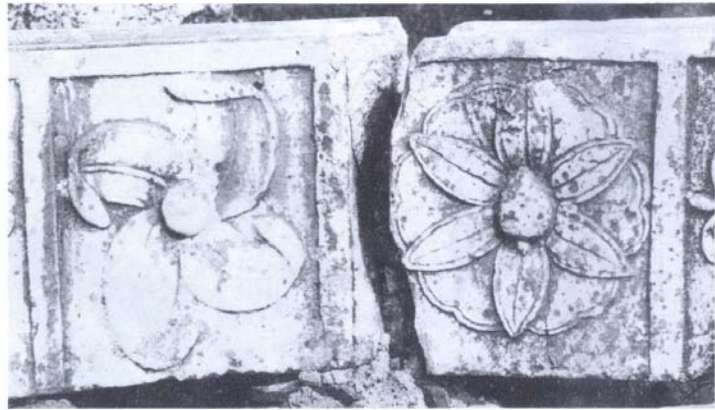
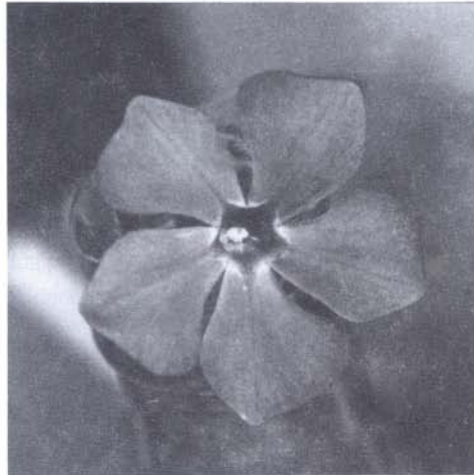


Figure 2-26.

Flowers with exclusively five-fold rotational symmetry. (a) *Vinca minor* from Hungary. Photograph by the authors.



(b) Frangipani (*Plumeria apocynacea*) from Hawaii. Photograph courtesy of John Tucker, Willimantic Photo Club, 1984.

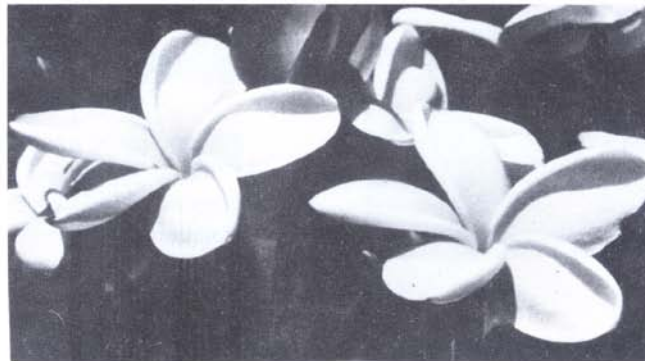


Figure 2-27.

(a) Star of David. New York, NY, 5 Avenue and W 65 Street. Photograph by the authors.
(b) Six-blade windmill.

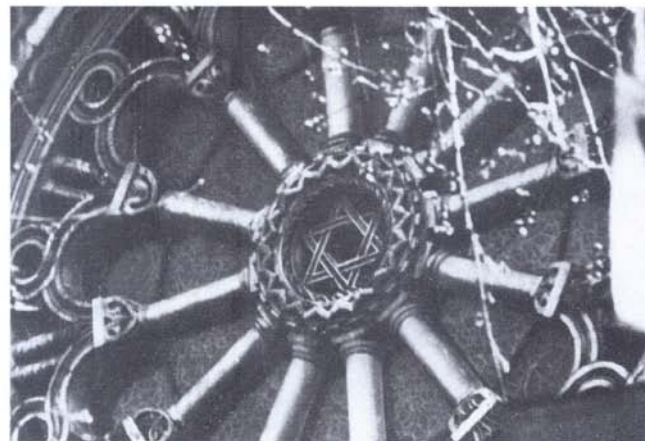


Figure 2-30.
 Decorations with rotational
 symmetry only, from Pueblo
 Indian pottery design [2-14].
 Courtesy and copyright 1977
 by the President and Fellows
 of Harvard College. The origi-
 nal designs were drawn by
 Sarah Whitney Powell and
 Barbara Westman.

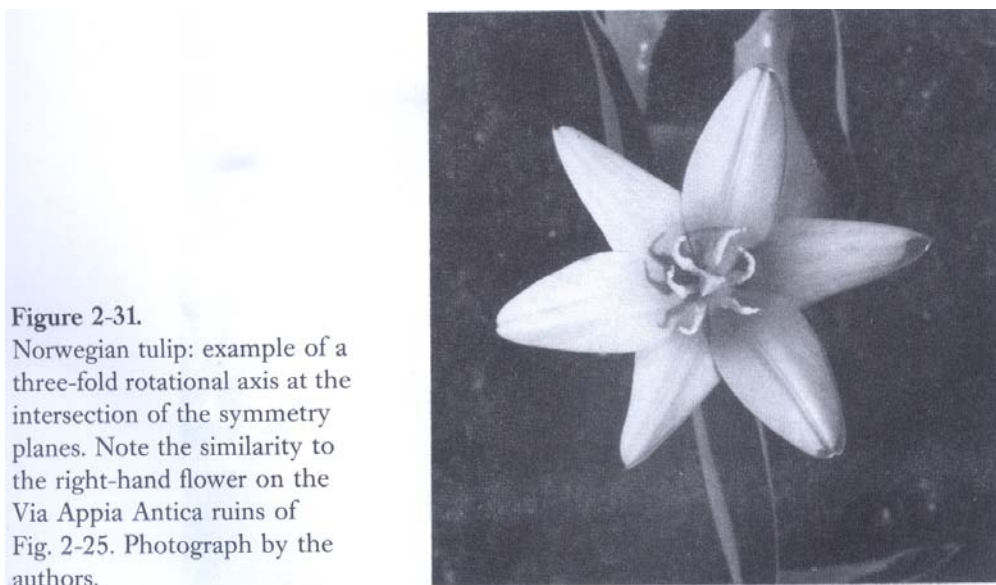


Figure 2-31.
 Norwegian tulip: example of a
 three-fold rotational axis at the
 intersection of the symmetry
 planes. Note the similarity to
 the right-hand flower on the
 Via Appia Antica ruins of
 Fig. 2-25. Photograph by the
 authors.

Figure 2-32.
 Starfish and other primitive organisms possessing a five-fold rotational symmetry axis. The axis may or may not have symmetry planes intersecting it; Häckel [2-15].

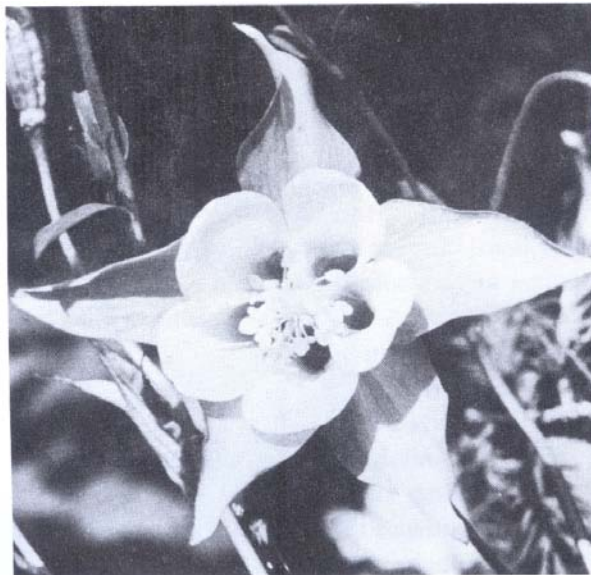
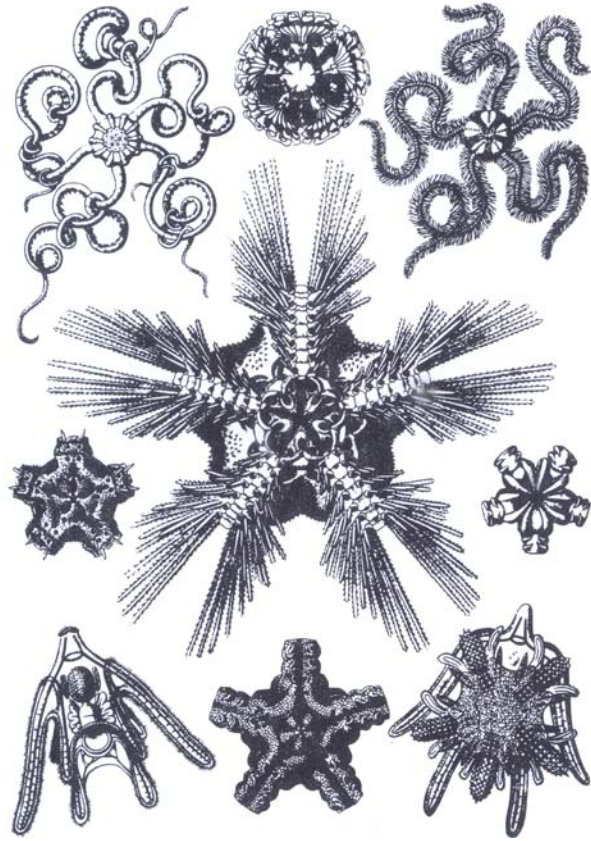


Figure 2-33.
 Flower displaying $5 \cdot m$ symmetry. Photograph by the authors.

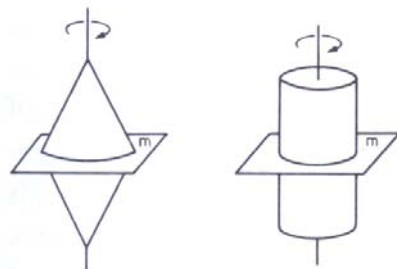
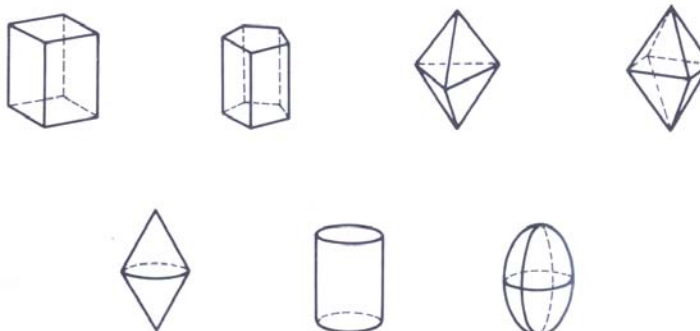


Figure 2-34.
 Rotating bicone and cylinder possessing $\infty : m$ symmetry.

Figure 2-35.
Prisms, bipyramids, bicone, cylinder, ellipsoid; examples of $m \cdot n : m$ symmetry.

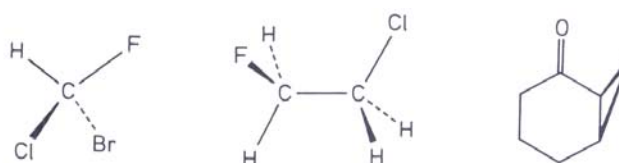


C_1

There are no symmetry elements (except the one-fold rotation axis, or identity, of course). Some examples are shown in Fig. 3-8.

Figure 3-8.

C_1 symmetry: no symmetry elements except the one-fold rotation axis (C_1 symmetry is asymmetry).



C_2

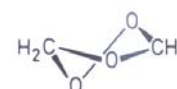
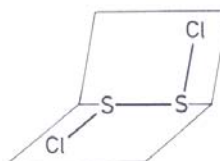
One two-fold rotation axis. Examples: Fig. 3-9a.

C_3, C_4, C_5, C_6

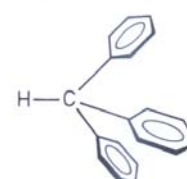
One three-fold, four-fold, five-fold, six-fold rotation axis, respectively. Examples: Fig. 3-9b-e.

Figure 3-9.

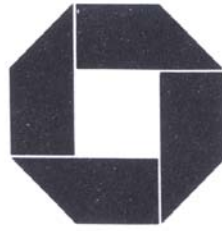
(a) C_2 . Logos: Security First National Bank, California (left) and United Banks of Colorado. Source of logos [3-7(a)].



(b) C_3 . Logos: Pittsburgh National Bank (left) and Woolmark [3-7(a)].



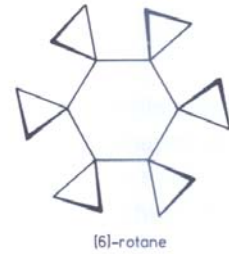
(c) C_4 . Logo: Chase Manhattan Bank [3-7(a)].



(d) C_5 . Logo: First American National Bank, Tennessee [3-7(a)].



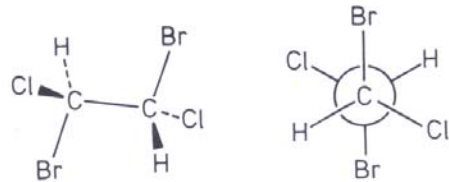
(e) C_6 . Logo: Crocker Bank [3-7(a)].



C_i

Center of symmetry. Examples: Fig. 3-10.

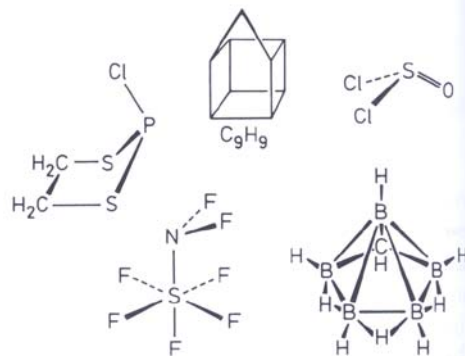
Figure 3-10.
 C_i



C_s

One symmetry plane. Examples: Fig. 3-11.

Figure 3-11.
 C_s . The picture shows the tail of a whale, off Plymouth, MA. Photograph by the authors.

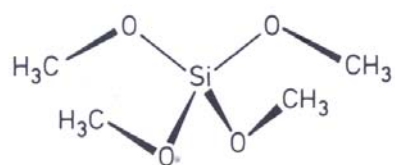


S_4 One four-fold mirror-rotation axis. Example: Fig. 3-12a.

S_6 One six-fold mirror-rotation axis, which is, of course, equivalent to one three-fold rotation axis plus center of symmetry. Example: Fig. 3-12b.

Figure 3-12.

a) S_4 .



(b) S_6 .

