关于时谐因子与波数开方的取值

有耗媒质时谐电磁场问题的处理经常会遇到时谐因子的选择和波数开方的问题。需要进行非常仔细的处理，一不小心就可能出错。经常的“仔细”会带来没必要的重复性工作。现在我把这个选择完整的选择过程记录于此，以备查询。

有耗媒质中，麦克斯韦方程：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \approx 0
\end{aligned}
$$

（1）

若取时谐因子 $i\omega t$ 则有：

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} = -i\omega\mu\mathbf{H} \\
&\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\mathbf{D} + \mathbf{J} = (i\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E} \\
&\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\
&\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

电流连续性方程

$$
\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3}
$$

由以上各式可推得频率域里矢量波方程：

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\
&\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中

$$
k^2 = -i\omega\mu(i\omega\varepsilon + \sigma) \approx -i\omega\mu\sigma \tag{5}
$$

那么有

$$k=\sqrt{-i\omega\mu\sigma}\Rightarrow\begin{cases}k_1=(1-i)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}\\ k_2=(-1+i)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-ik_1=-(1+i)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}\\ -ik_2=(1+i)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}\end{cases} \qquad (6)$$

在矢量波方程的通解中，如果以e^{-ikr}表示波的衰减项，则波数开方取k_1，否则取k_2。

对于大地电磁测深的二维正演问题，在上述条件下，假设 x 表示构造走向，TE 模式下正演的主控制微分方程为：

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z})-\left[-(i\omega\varepsilon+\sigma)\right]E_x=0 \qquad (7)$$

TM 模式下正演的主控制微分方程为：

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z})-i\omega\mu H_x=0 \qquad (8)$$

在有限元正演中，可统一写成：

$$\frac{\partial}{\partial y}(\alpha\frac{\partial F_x}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\alpha\frac{\partial F_x}{\partial z})-\beta H_x=0 \qquad (9)$$

这时，对于 TE 模式：

$$F_x=E_x,\qquad \alpha=-\frac{1}{i\omega\mu},\qquad \beta=-(i\omega\varepsilon+\sigma) \qquad (10)$$

对于 TM 模式：

$$F_x=H_x,\qquad \alpha=-\frac{1}{\sigma},\qquad \beta=i\omega\mu \qquad (11)$$