坐标变换（2007.12.20）

科研菜鸟

http://sanshiphy.blogspot.com

设实验室坐标系为xyz坐标系，且在该坐标系下所测风速的三个分量为uvw. 现将实验室坐标系的x轴旋转到顺风方向，得到新的坐标系XYZ，其中X轴在顺风方向. XYZ坐标系与xyz坐标系之间的一般变换关系，可按以下步骤求得：先将xyz 旋转到某一特殊的位置，得到一个新的坐标系$X'Y'Z'$，并求出$X'Y'Z'$与xyz之间的变换关系$\mathcal{O}_1$. 然后再将$X'Y'Z'$沿X'轴任意旋转，得到坐标系XYZ，并求出$X'Y'Z'$与XYZ之间的变换关系$\mathcal{O}_2$. 最终，我们可以得到XYZ与xyz之间的一般变换关系为$\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1$.

下面分三步介绍$\mathcal{O}$的推导过程:

（一）z轴不变，将x轴旋转至顺风方向在xy平面的投影位置，即X轴在xy平面的投影位置，如图1(a)所示. 设旋转后的新坐标系为$x'y'z'$，x'与x之间的夹角为θ，于是有：

$$
\begin{aligned}
u' &= u\cos\theta + v\sin\theta \\
v' &= v\cos\theta - u\sin\theta \\
w' &= w
\end{aligned}
$$

由于，

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}} \\
\sin\theta &= \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}}.
\end{aligned}
$$

于是，

$$u' = \frac{u\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}} + \frac{v\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}} \tag{1}$$

$$v' = \frac{v\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}} - \frac{u\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}} \tag{2}$$

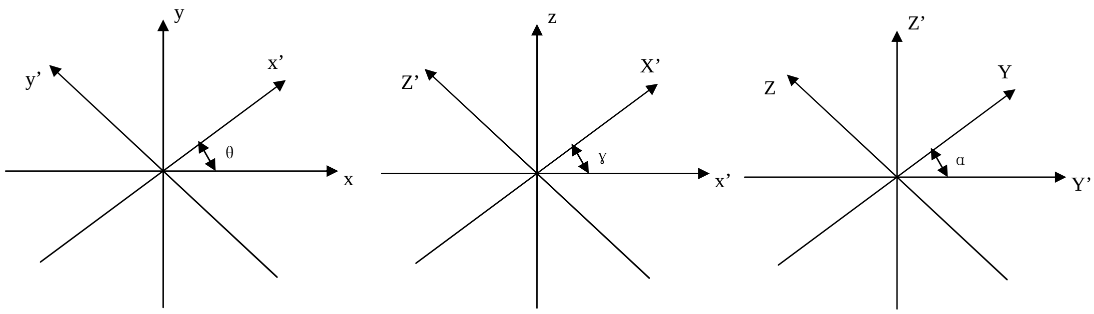
$$w' = w \tag{3}$$

（二）y'轴不变，将x'旋转到顺风方向，即X轴方向，如图1(b)所示. 设旋转后的新坐标系为$X'Y'Z'$，X'与x 之间的夹角为γ，于是有：

$$
\begin{aligned}
U' &= u'\cos\gamma + w\sin\gamma \\
V' &= v' \\
W' &= w\cos\gamma - u'\sin\gamma.
\end{aligned}
$$

由于，

$$
\begin{aligned}
\cos\gamma &= \frac{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2}} \\
\sin\gamma &= \frac{\bar{w}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2}}.
\end{aligned}
$$



(a) (b) (c)

图1

于是，$\mathcal{O}_1$为:

$$\begin{aligned} U' &= \frac{u\bar{u}}{U_1} + \frac{v\bar{v}}{U_1} + \frac{w\bar{w}}{U_1} \qquad (4) \\ V' &= \frac{v\bar{u}}{U_0} - \frac{u\bar{v}}{U_0} \qquad (5) \\ W' &= \frac{wU_0}{U_1} - \frac{(u\bar{u}+v\bar{v})\bar{w}}{U_0U_1}, \qquad (6) \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned} U_0 &= \sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2} \\ U_1 &= \sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2}. \end{aligned}$$

（三）X'轴不变，将Y'轴沿顺时针旋转任一角度α，得到新坐标系XYZ，如图1(c)所示，于是有：

$$\begin{aligned} U &= U' \\ V &= V'\cos\alpha + W'\sin\alpha \\ W &= W'\cos\alpha - V'\sin\alpha. \end{aligned}$$

最终我们可以得到$\mathcal{O} = \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1$：

$$\begin{aligned} U &= \frac{u\bar{u}+v\bar{v}+w\bar{w}}{U_1} \qquad (7) \\ V &= (\frac{v\bar{u}-u\bar{v}}{U_0})\cos\alpha + [\frac{w{U_0}^2-(u\bar{u}+v\bar{v})\bar{w}}{U_0U_1}]\sin\alpha \qquad (8) \\ W &= [\frac{w{U_0}^2-(u\bar{u}+v\bar{v})\bar{w}}{U_0U_1}]\cos\alpha - (\frac{v\bar{u}-u\bar{v}}{U_0})\sin\alpha. \qquad (9) \end{aligned}$$

根据上式，很容易验证：

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_1 \\ \bar{V} &= 0 \\ \bar{W} &= 0. \end{aligned}$$