流体力学的基本知识（一）

科研菜鸟
leilphy@mail.iap.ac.cn
http://www.sanshiphy.blogspot.com

2008年7月31日

1 流场的运动学

1.1 描述流体运动的两种方法

有两种描述流体运动的方法：Eulerian表述和Lagrangian表述。

*Eulerian*表述：将流体看作一个在时空上连续变化的场，所有物理量都定义为空间$\mathbf{x}$和时间t的函数，例如速度场$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$。

*Lagrangian*表述：跟踪某一个流体粒子的运动，所关心的物理量是该粒子的质心位置$\mathbf{a}$和时间t的函数，例如粒子的速度$\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$。

相比于Lagrangian表述，Eulerian表述有很多优点：（1）在大多数理论分析中，采用Eulerian表述更加简单明了，特别地，Eulerian表述所关心的是场量，我们可以利用强大的场论工具对流场进行分析；（2）流体力学中的许多试验，诸如风洞试验和外场试验，往往比较容易观测到的是与流场有关的物理量。（3）工程上关心的多是与流场有关的物理量，如速度、压力或温度等物理量的时空分布，而不去关心一个流体粒子的运动细节。考虑到上述因素，在下面的章节中，除特别说明外，均选用Eulerian表述，来探讨流场的运动规律或者通过场函数来探讨流体粒子的运动规律。

1.2 流线

为了直观地描述流体的速度场，我们引入流线的概念。在某一时刻，如果流场中一条线上任何一点的切线方向都与该点的速度方向平行，这条线称为流线。流线的方程为：

$$\frac{dx}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{w(\mathbf{x}, t)}. \tag{1}$$

如果已知速度场，对上式求积分可以求出流线的具体表达式，注意式中的时间在求积分时应看作常数。

只有当流场平稳的时候，流线与流体粒子的运动轨迹才会重合。另外，流管也是经常使用的概念，它是指通过某一闭合曲线的所有流线组成的几何体。

1.3 随体导数

随体倒数建立了Eulerian表述和Lagrangian表述之间的联系。下面以速度场为例，给出随体导数的表达式。

如果速度场$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$已知，那么如何根据速度场求出流体粒子在某一时刻某一位置的加速度呢？设流体粒子在t时刻的位置为$\mathbf{x}$，$t+\delta t$时刻所在的位置为$\mathbf{x}+\mathbf{u}\delta t$。于是流体粒子的速度在时间$t$内的改变量为：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{u}\delta t, t+\delta t)-\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\delta t\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)+O(\delta t^2).$$

因此，粒子的加速度为：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}. \tag{2}$$

上述推导可推广到其它的物理量：已知采用Eulerian表述的物理量$\theta(\mathbf{x},t)$（这个量可以是标量，也可以是矢量），可以求出流体粒子相应的物理量

$$\left.\frac{\partial \Theta(\mathbf{a},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}}=\frac{\partial \theta}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\theta. \tag{3}$$

上式中对流体场$\theta(\mathbf{x},t)$的求导，定义为随体导数：

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla. \tag{4}$$

1.4 连续性方程

连续性方程又称质量守恒方程。考虑空间中某一块具有任意形状的区域，单位时间内流入这个区域的流体质量为：

$$f=-\int \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

式中的积分涵盖该区域的整个表面积，并且根据Green公式，

$$f=-\int \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\,dV.$$

另外，单位时间内该区域中流体质量的增加量等于

$$\frac{d}{dt}\int \rho\,dV.$$

上式中的积分是在整个区域中进行的。如果该区域内不存在任何流体源（比如任何排水管或水泵）的话，

$$f=\frac{d}{dt}\int \rho\,dV=-\int \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\,dV.$$

由于积分区域是任意选取的，去掉积分，我们就可得到连续性方程：

$$\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0. \tag{5}$$

1.5 不可压缩性

流体粒子在运动过程中，如果其密度不随压力的变化而变化的话，我们就说该流体是不可压缩的。

根据（4）和（5）式，可以用随体导数表示表示连续性方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

由于流体粒子的体积随时间的变化率是:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} &= \lim \frac{1}{\tau}\int \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS \\
&= \lim \frac{1}{\tau}\int \nabla\cdot\mathbf{u} dV \\
&= \nabla\cdot\mathbf{u},
\end{aligned} \tag{7}$$

因此（6）式的物理意义是：当流体粒子质量守恒的时候，流体粒子的体积变化率和密度变化率大小相等，但相差一负号，这是很显然的。当流体不可压缩的时候，$D\rho/Dt = 0$。根据（6）式，

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{8}$$

这就是**无源不可压缩流体的速度场所应满足的方程**。

严格地说，现实世界中所有的流体都是可压缩的。但是当流体满足下述条件的时候，可以近似看作是不可压缩的[1]：

1、如果流体是平稳的，流体的速度$|\mathbf{u}| \ll c$，其中c是声速；

2、如果流体是不平稳的，除了条件（1）满足外，还要求$\tau \gg l/c$，其中τ和l是流体的速度发生明显改变的特征时间和距离。

1.6 流函数

如果流体是不可压缩的或者是可压缩的平稳流，并且流体是二维的或者是轴对称的[2]，那么我们可以引入流函数，从而将两个速度分量的求解转化为对一个标量函数的求解。

首先，讨论二维不可压缩流体的流函数及其性质。对于不可压缩的二维流体，连续性方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

因此，存在标量函数ψ，其全微分为$d\psi = udy - vdx$。因此，

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{9}$$

标量函数$\psi(x, y)$称为流函数。

二维不可压缩流体的流函数具有以下性质：

[1] Landau and Lifshitz, Fluid Mechanics, second edition, p.21

[2] 二维流体的速度场在直角坐标系下可以表示为$(u(x,y), v(x,y), 0)$；轴对称的流体在柱坐标(z, r, ϕ) 下，其速度场可以表示为$(u_z(z,r), u_r(z,r), u_\phi(z,r))$。

1、设P和Q是xy平面内任意两点，ψ_P和ψ_Q是这两点的流函数，于是：

$$\psi_P - \psi_Q = \int_Q^P (udy - vdx)$$

只要积分路径上每一点都满足不可压缩的条件。另外可以证明，通过积分路径的面积通量为：

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_Q^P = \int_Q^P \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dl = \int_Q^P (udy - vdx)$$

其中，$\mathbf{n}$是垂直于线元的单位矢量，并且从O往P看，$\mathbf{n}$指向线元的右侧。因此，

$$\psi_P - \psi_Q = \left.\frac{dS}{dt}\right|_Q^P. \tag{10}$$

这说明，**曲线两端点的流函数之差等于单位时间通过这条曲线的面积，只要这条曲线上每一点都满足不可压缩条件**。

2、从Q出发沿不同的路径到P，如果这两条路径上的每点满足不可压缩条件，那么这两条路径围起来的区域中面积的增加率为：

$$\frac{dS_{QP}}{dt} = \int_{Q1}^{P1} (udy - vdx) - \int_{Q2}^{P2} (udy - vdx).$$

如果这个区域中的流体是不可压缩的，那么$dS_{QP}/dt = 0$，因此：

$$\int_{Q1}^{P1} (udy - vdx) = \int_{Q2}^{P2} (udy - vdx).$$

相反地，如果区域中有部分不可压缩的流体，上述等式不成立，这样就会导致$\psi_P - \psi_Q$有两个不同的值，这种情况下的流函数不再是单值函数。因此，**如果流体中每一点都是不可压缩的话，流函数是单值函数**。

3、因为没有任何通过流线的面积通量，所以**流线上流函数处处相等**。这个结论也可以根据（10）式和流线方程得到。

其次，讨论轴对称不可压缩流体的流函数及其性质。对于轴对称不可压缩流体，其连续性方程为：

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0.$$

根据二维流体的讨论，相应地我们可以定义流函数$\psi(r,z)$，它与速度场的关系是：

$$u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

在二维流体中，流函数包含了整个速度场的信息。而在轴对称流体中，根据流函数不能求出u_ϕ的值。

轴对称不可压缩流体的性质为：

1、设P和Q是轴平面内任意两点，于是只要积分路径上每点都不可压缩：

$$\psi_P - \psi_Q = \int_Q^P r(u_z dr - u_r dz).$$

另外，如果将PQ曲线沿对称轴z旋转一圈构成闭合曲面，那么流过这个闭合曲面的体积流为

$$\frac{dV}{dt} = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 2\pi \int_Q^P r(u_z dr - u_r dz).$$

因此，以轴平面上两点之间曲线为母线，绕对称轴旋转一周形成闭合曲面，那么在这两点上的流函数之差等于通过闭合曲面的体积通量除以2π。

2、相应于二维流场，如果流体处处不可压缩，流函数为单值函数。

3、如果轴对称速度场没有ϕ方向分量，此时流线上流函数处处相等，这是因为没有体积通量通过流管的外壁。

1.7 流体粒子速度的分解

流体粒子的运动可以分解为平动、形变和刚体转动，分析如下：

设流体中某一点O的速度为$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$，其附近另一点的速度为$\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t)$，$\mathbf{r}$是这一点到O点的矢径。通过Taylor展开，并保留一阶小量，我们有：

$$u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) = u_i(\mathbf{x}, t) + \delta u_i = u_i(\mathbf{x}, t) + r_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

将二阶张量$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$分解为对称和反对称张量:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) = e_{ij} + \xi_{ij}.$$

其中，对称部分用e_{ij}表示，反对称部分用ξ_{ij}表示。于是速度增量可以分解为：

$$\delta u_i = \delta u_i^s + \delta u_i^a,$$

其中

$$\delta u_i^s = r_j e_{ij} \quad \delta u_i^a = r_j \xi_{ij}.$$

先来考察对称速度增量的物理意义。先将对称增量写成下面的形式：

$$\delta u_i^s = r_j e_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_i},$$

其中，

$$\Phi = \frac{1}{2} r_k r_l e_{kl}.$$

然后旋转坐标系，使得坐标轴与二阶张量e_{ij}的主轴重合。在新坐标系下，

$$\Phi = \frac{1}{2} r_i'^2 e_{ii}' = \frac{1}{2}(a r_1'^2 + b r_2'^2 + c r_3'^2).$$

并且，二阶张量的迹是标量，在坐标变换时是不变量：

$$e_{ii}' = e_{ii} = a + b + c.$$

因此，在新坐标系下，速度的增量为

$$\delta \mathbf{u'} = (a r_1', b r_2', c r_3'). \tag{11}$$

根据（11）式，可以看出:

1、平行于主轴的直线，只会沿主轴被拉伸或压缩。在每个主轴方向，其形变速率（单位时间内的形变量除以形变前的长度）为分别a、b和c。对于其它方向的直线，除受到拉升或压缩外，一般还会向形变速率快的方向旋转。如果$a=b=c\equiv k$，那么在任何方向的直线都会沿着自身的方向以相同的速率k伸缩。因此，二阶张量e_{ij}被称为形变率张量，其在主轴坐标系下的对角元，决定了与主轴平行的直线的形变速率。

2、设想有一个球形的流体粒子，受（11）式支配，发生形变，变成一个椭球体，椭球体的主轴即为e_{ij}的主轴方向。在形变过程中，主轴方向的直线会沿着主轴拉升或压缩，而偏离主轴的直线其在主轴平面上的投影会向椭圆的长轴方向移动，这就好像气球在短轴方向受到挤压，球面上的点向长轴靠拢。

3、对于不可压缩流体，$\nabla\cdot\mathbf{u}=0$，因此不可压缩流体粒子在形变过程中体积不变，并且$e_{ii}=0$。而对于可压缩流体，我们可以将形变率张量分为两部分：

$$e_{ij}=e_{ij}^{i}+e_{ij}^{v}=\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}+\left(e_{ij}-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right).$$

很明显，e_{ij}^{i}表示各向同性的伸缩，e_{ij}^{i}的迹$\triangle=e_{ii}=\nabla\cdot\mathbf{u}$，表示流体粒子在形变中体积的变化率或称为局域体积变化率，参见（7）式。e_{ij}^{v}的迹等于0，表示等体积的形变。

综上述，$\delta\mathbf{u}^{s}$**会引起流体粒的形变。对于不可压缩流体，流体粒子的体积在形变中保持恒定。而对于可压缩流体，形变可看作是各向同性形变和等体积形变的叠加，前一种形变会改变粒子的体积。**

再来考察反对称速度增量的物理意义。反对称张量有三个独立的变量，一般可以写成下面的形式：

$$\xi_{ij}=-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}w_{k}.$$

因此，反对称速度增量为：

$$\delta u_{i}^{a}=\frac{1}{2}\epsilon_{ikj}w_{k}r_{j},$$

写成矢量形式：

$$\delta\mathbf{u}^{a}=\frac{1}{2}\mathbf{w}\times\mathbf{r}. \tag{12}$$

根据（12）式，可以看出：

1、刚体的运动可以分为平动和转动，其中转动的线速度：

$$\mathbf{u}=\mathbf{w}_{r}\times\mathbf{r}, \tag{13}$$

其中，$\mathbf{w}_{r}=\nabla\times\mathbf{u}$是刚体的角速度。将（12）式与（13）式进行对比可知：如果扣除形变，流体粒子可看作刚体，反对称张量就是刚性流体粒子绕O点转动的线速度。相应地，流体粒子的角速度为$\dfrac{1}{2}\mathbf{w}=\dfrac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{r}}\times\delta\mathbf{u}^{a})$，其中$\mathbf{w}$称为局域涡旋*(vorticity)*，所谓局域，指的是涡旋与空间坐标有关，整个流体并不像刚体那样有相同的涡旋。$\nabla_{\mathbf{r}}$表示对矢径求导。

2、因为$\xi_{ij}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}-\dfrac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}})$，故而

$$\mathbf{w}=\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{u},$$

其中$\nabla_{\mathbf{x}}$表示对坐标求导，于是：

$$\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \delta\mathbf{u}^a \equiv \mathbf{w}. \tag{14}$$

上式有什么物理含义呢？根据Stokes公式，在很小的一块圆形面积内，

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{2}[\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{n} \approx \frac{1}{2\pi a^2}\int[\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{2\pi a^2}\oint \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}.$$

其中，a表示这块圆面的半径，$\mathbf{n}$表示圆面的法向单位矢量。上面的等式中最左边$\frac{1}{2}\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}$表示反对称速度增量沿圆面边界的**切向速度**（该切向速度在边界上处处相等）除以半径a，等式最右边$\frac{1}{2\pi a^2}\oint \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$表示沿着圆面边界的**平均切向速度**除以半径$a$。因此，（14）式表示：扣除掉平动和变形后，流体粒子刚性转动的线速度（也即是反对称速度增量），沿其内部某一圆环的切向分量等于流体粒子的真实速度（未分解前的速度）沿同一圆环的切向分量的平均值。为什么会这样呢？我们考察一下平动和变形就知道：平动的切向分量沿着平动方向几乎处处反对称（所谓反对称，就是绕动方向相反，一个沿逆时针，另一个沿顺时针，但两者大小相等。"几乎"表明最高点和最低点是例外，两者切向速度对称，但这两点的贡献平均后为零），因而对平均切向速度没有贡献。另外，变形的切向分量沿着主轴方向反对称，也对平均切向速度没有贡献。最后只剩下反对称速度增量或者说是流体粒子的刚性线速度对平均切向速度有贡献。

综上述，**反对称速度增量表示流体粒子刚性转动的线速度**，并且通过（14）式可以利用速度场直接求出角速度或涡度的分布。这个等式的物理意义是：由于平动和变形运动的切向分量反对称，流体粒子粒子刚性转动的线速度沿其内部某一圆环的切向分量和真实速度沿同一圆环的切向分量的平均值相等。

例子：剪切运动中流体粒子速度的分解

流体流动的方向设与坐标轴x_1平行，与流动方向垂直的坐标轴设为x_2，于是剪切运动的速度场为：

$$\mathbf{u} = [u_1(x_2), 0, 0].$$

于是：

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \text{当} i \neq j = 1, 2 \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(0, 0, -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

先分析刚体旋转运动。从$\mathbf{w}$的表达式可以看出这是绕x_3瞬时针方向的刚体旋转运动。另外，可以求出刚体旋转的线速度为：

$$\delta\mathbf{u}^a = \frac{1}{2}\mathbf{w}\times\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2}r_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, -\frac{1}{2}r_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, 0\right).$$

再分析形变运动。由于$e_{ii} = 0$，因此只有等体积形变。另外，可以求出e_{ij}的主轴方向的单位矢量：$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$和$(0,0,1)$，以及主值：$\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, -\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, 0$。在主轴坐标系下，形变速度增量为：

$$\delta\mathbf{u}^s = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}r'_1, -\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}r'_2, 0\right).$$

从上式可以看出，剪切运动的形变具有以下特征：

1、沿两个坐标轴方向分别存在压缩和拉伸形变，并且压缩率和拉伸率相等；

2、沿另一个坐标轴方向没有形变。

根据这些特征，我们可以将流体粒子的形变运动分解为各项同性形变、剪切运动和刚性旋转运动。证明如下：流体粒子的形变可以分为各向同性形变$\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}$和等体积形变$\left(e_ij-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)$。其中，等体积形变运动在主轴坐标系下的速度增量为：

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u} &= \left[r_1'\left(a-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right),r_2'\left(b-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right),r_3'\left(c-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)\right]\\ &= \left[r_1'\left(a-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right),0,-r_3'\left(a-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)\right]\\ &\quad+\left[0,r_2'\left(b-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right),-r_3'\left(b-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)\right].\end{aligned}$$

上式中第一项加上局域涡度为$\pm\left(a-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)$的刚性转动就是剪切运动，第二项加上局域涡度为$\pm\left(b-\frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}\right)$的刚性转动就是另一个剪切运动，所以等体积形变又可以分解为两个剪切运动和两个刚性转动，证毕。