截断稳定分布和对数正态模型的一些性质

科研菜鸟

2012 年 11 月 13 日

1　截断稳定分布

文献[6]给出的Koponen截断稳定分布的特征函数为：

When $0 < \alpha < 1$，

$$\ln\Phi(k) = C\Gamma(-\alpha)[q(\lambda+ik)^{\alpha} + p(\lambda-ik)^{\alpha} - \lambda^{\alpha}], \tag{1}$$

and when $1 < \alpha < 2$，

$$\ln\Phi(k) = C\Gamma(-\alpha)[q(\lambda+ik)^{\alpha} + p(\lambda-ik)^{\alpha} - \lambda^{\alpha} - i\alpha\lambda^{\alpha-1}(q-p)k], \tag{2}$$

其中，$q + p = 1$. 对比文献[4]的（1）式、（2）式和文献[6]的（2）式、（6）式，可知：$\beta = p - q$，$C = A_+ + A_-$.

$\lambda = 0$时的情况。 在这种情况下，(1)式和(2)式均转化为稳定分布的特征函数：

$$\begin{aligned}
\ln\Phi(k) &= C\Gamma(-\alpha)[q(ik)^{\alpha} + p(-ik)^{\alpha}] \\
&= C\Gamma(-\alpha)|k|^{\alpha}\left\{q\left[\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\frac{k}{|k|}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right. \\
&\quad \left. +p\left[\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - i\frac{k}{|k|}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\} \\
&= C\Gamma(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|k|^{\alpha}\left[1 + i(q-p)\frac{k}{|k|}\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] \\
&= C\Gamma(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|k|^{\alpha}\left[1 - i\beta\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\mathrm{sign}k)\right].
\end{aligned}$$

将上式与文献[7]的(1.6)式进行比较，可知：

$$C\Gamma(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = -\gamma^{\alpha} \tag{3}$$

$\lambda \neq 0$**时的情况。** 当$0<\alpha<1$时，有：

$$\begin{aligned}\ln\Phi(k) &= C\Gamma(-\alpha)\left\{(\lambda^2+k^2)^{\alpha/2}\left[q\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{\alpha}+p\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^{\alpha}\right]-\lambda^{\alpha}\right\} \\ &= C\Gamma(-\alpha)\left[(\lambda^2+k^2)^{\alpha/2}(\cos\alpha\theta+i(q-p)\sin\alpha\theta)-\lambda^{\alpha}\right],\end{aligned}$$

其中，$\theta=\arctan(k/\lambda)$. 进一步整理上式，有：

$$\ln\Phi(k)=C\Gamma(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left[\cos\alpha\theta\frac{(\lambda^2+k^2)^{\alpha/2}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}(1-i\beta\tan\theta\alpha)-\frac{\lambda^{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\right]. \tag{4}$$

利用Γ函数的一些性质[1]：

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \\ -\alpha\Gamma(-\alpha) &= \Gamma(1-\alpha),\end{aligned}$$

可知文献[4]中的变量（$t=1$时）：

$$c=\frac{(A_{+}+A_{-})\pi\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)}=-C\Gamma(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \tag{5}$$

令

$$c_0=\frac{\lambda^{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \tag{6}$$

将c，c_0代人（4）式，则：

$$\ln\Phi(k)=-c\left[\frac{(\lambda^2+k^2)^{\alpha/2}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\cos\alpha\theta(1-i\beta\tan\theta\alpha)-c_0\right]. \tag{7}$$

与文献[4]式（3）对比，可知此文献（3）式的错误有两方面：其一，该式第一项应为cc_0；其二，该式第二项最后一括号中应为$[1-i\beta\ldots$. 实际上，文献[6]已经指出了第一个错误，但未指出第二个错误，此外该文献以脚注形式指出该错误时，也引入了一个书写错误，即$(k^2+\lambda^2)$误为$(k^2+\alpha^2)$，应当注意。

根据（4）式，可知：

$$\ln\Phi(k)=\frac{\gamma^{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\lambda^{\alpha}-(\lambda^2+k^2)^{\alpha/2}\cos\alpha\theta(1-i\beta\tan\alpha\theta)\right]. \tag{8}$$

按照同样的方法，当$1<\alpha<2$时，

$$\ln\Phi(k)=\frac{\gamma^{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\left[\lambda^{\alpha}-(\lambda^2+k^2)^{\alpha/2}\cos\alpha\theta(1-i\beta\tan\alpha\theta)-i\alpha\beta\lambda^{\alpha-1}k\right]. \tag{9}$$

（8）和（9）式与文献[5]中的（34）和（35）式一致，只是第（35）式最后一项符号有误。

归一化后的参数关系。 根据特征函数的性质：

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n \Phi(k)}{dk^n}\Big|_{k=0}. \tag{10}$$

因此，

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= (-i) \frac{d\Phi(k)}{dk}\Big|_{k=0} = 0 \\ \langle x^2 \rangle &= -\frac{d^2 \Phi(k)}{dk^2}\Big|_{k=0} = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

当$0 < \alpha < 1$时，（11）式等价于：

$$\begin{aligned} \beta \lambda^{\alpha-1} &= 0 \\ C\Gamma(-\alpha)\alpha(\alpha-1)\lambda^{\alpha-2} &= 1. \end{aligned} \tag{12}$$

当$1 < \alpha < 2$时，（11）式等价于：

$$C\Gamma(-\alpha)\alpha(\alpha-1)\lambda^{\alpha-2} = 1. \tag{13}$$

自相似特征。 n个独立同分布的截断稳定随机变量的和分布，其中心分布在n不太大时近似满足稳定分布，即（see pages 19-20 of [7]）：

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X, \tag{14}$$

其中X_i, X是独立同分布的截断稳定随机变量。上式也可表示为：

$$f(x) = n^{1/\alpha} f_n(n^{1/\alpha} x), \tag{15}$$

其中，$f(x)$是X的概率密度函数，$f_n(x)$是$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$的概率密度函数。

（15）式的证明如下：

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq y) = P(n^{1/\alpha} X \leq y) = P(X \leq n^{-1/\alpha} y). \tag{16}$$

因此，等式两边求导，得：

$$f_n(y) = n^{-1/\alpha} f(n^{-1/\alpha} y). \tag{17}$$

令$x \equiv n^{-1/\alpha} y$，即为（15）式。

2 对数正态模型

对数正态模型的对称概率密度函数为[3]：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\bar{\sigma})}{2\lambda^2}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2}, \tag{18}$$

归一化后的参数关系。 该模型的n阶矩为：

$$\begin{aligned}\langle x^n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x\\ &= \bar{\sigma}^n\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^n\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]\\ &\quad \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)^n\exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\bar{\sigma})}{2\lambda^2}\right)\mathrm{d}\ln\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)\\ &= \bar{\sigma}^n P_n\exp(n^2\lambda^2/2), \end{aligned} \tag{19}$$

其中，P_n是正态分布的n阶矩。因此，对于归一化后的概率密度函数：

$$\langle x^2\rangle=\bar{\sigma}^2\exp(2\lambda^2)=1. \tag{20}$$

级串特征。 根据（18）式，可知：

$$X_\lambda \overset{d}{=} W_\lambda G, \tag{21}$$

其中，G是正态分布，W_λ 是满足对数正态分布随机变量，且与G无相关关系。上式的证明如下：

$$P(W_\lambda G\le x)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}\sigma\int_{-\infty}^{x/\sigma}\mathrm{d}g f_G(g) f_{W_\lambda}(\sigma) \tag{22}$$

对上式求导，可得：

$$f_{W_\lambda G}(x)=\int_0^{\infty} f_G\left(\frac{x}{\sigma}\right) f_{W_\lambda}(\sigma)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}, \tag{23}$$

其中：

$$\begin{aligned} f_G(g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{g^2}{2}\right)\\ f_{W_\lambda}(\sigma) &= \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda}\exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\bar{\sigma})}{2\lambda^2}\right)\end{aligned}$$

因此，对比（18）式，则：

$$f(x)\equiv f_{X_\lambda}(x)=f_{W_\lambda G}(x). \tag{24}$$

对数正态分布满足以下性质：

$$W_\lambda \stackrel{d}{=} W_{\lambda,\lambda'} W_{\lambda'}, \tag{25}$$

其中，$W_{\lambda,\lambda'}$和$W_{\lambda'}$是两个独立的对数正态分布随机变量，且：

$$\begin{aligned} \ln\bar{\sigma} &= \ln\bar{\sigma}_1 + \ln\bar{\sigma}_2 \\ \lambda^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \end{aligned}$$

其中，$\bar{\sigma}_1$和$\bar{\sigma}_2$分别是$W_{\lambda,\lambda'}$ 和$W_{\lambda'}$的平均值，而λ_1和λ_2分别是$W_{\lambda,\lambda'}$ 和$W_{\lambda'}$的标准差。（25）式的证明如下：

$$P(W_{\lambda,\lambda'} W_{\lambda'} \le \sigma) = \int_0^\infty \mathrm{d}\sigma_1 \int_{-\infty}^{\sigma/\sigma_1} \mathrm{d}\sigma_2 f(\sigma_1, \sigma_2), \tag{26}$$

其中，$f(\sigma_1, \sigma_2)$是$W_{\lambda,\lambda'}$ 和$W_{\lambda'}$的联合PDF。由于$W_{\lambda,\lambda'}$ 和$W_{\lambda'}$之间相互独立，于是：

$$\begin{aligned} f(\sigma_1, \sigma_2) &= f_{W_{\lambda,\lambda'}}(\sigma_1) f_{W_{\lambda'}}(\sigma_2) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\lambda_1\lambda_2} \exp\left[\frac{-(\ln\sigma_1 - \ln\bar{\sigma}_1)^2}{2\lambda_1^2}\right] \exp\left[\frac{-(\ln\sigma_2 - \ln\bar{\sigma}_2)^2}{2\lambda_2^2}\right]. \end{aligned}$$

将上式代人（26）式，并对该式两边求导，可得：

$$\begin{aligned} f_{W_{\lambda,\lambda'} W_{\lambda'}}(\sigma) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma/\sigma_1) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma\lambda_1\lambda_2} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[\frac{-(\ln\sigma_1 - \ln\bar{\sigma}_1)^2}{2\lambda_1^2}\right] \times \\ &\quad \exp\left[\frac{-(\ln\sigma - \ln\sigma_1 - \ln\bar{\sigma}_2)^2}{2\lambda_2^2}\right] \mathrm{d}\ln\sigma_1 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \exp\left[\frac{-(\ln\sigma - \ln\bar{\sigma}_1 - \ln\bar{\sigma}_2)^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}\right]. \end{aligned}$$

上式第二步到第三步的详细推导，可参看文献[2]，page 92-93.

将（25）代人（21），可得对数正态模型的级串特征：

$$X_\lambda \stackrel{d}{=} W_{\lambda,\lambda'} X_{\lambda'}. \tag{27}$$

PROBABILITY OF FIRST RETURN. 基于（18），可知：

$$f(0) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\bar{\sigma})}{2\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2}. \tag{28}$$

令$x=\ln\sigma$，则：

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\ln\bar\sigma)^2}{2\lambda^2}-x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\lambda^2}\left[x-\lambda^2\left(\frac{\ln\bar\sigma}{\lambda^2}-1\right)\right]^2\right]\mathrm{d}x\times \\
&\quad \exp\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{\ln\sigma}{\lambda^2}-1\right)^2-\frac{\ln^2\bar\sigma}{2\lambda^2}\right] \\
&= \frac{\exp(\lambda^2/2)}{\sqrt{2\pi}\bar\sigma}
\end{aligned}
$$

根据（19）式，可知：

$$
\begin{aligned}
\langle|x|\rangle &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\bar\sigma\exp(\lambda^2/2) \\
\langle x^2\rangle &= \bar\sigma^2\exp(2\lambda^2).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\frac{\pi^2}{2}\frac{\langle|x|\rangle^3 f(0)}{\langle x^2\rangle}=1. \tag{29}
$$

参考文献

[1] 郭敦仁. 数学物理方法. 人民教育出版社, 北京, 1965.

[2] 陈希孺. 概率论与数理统计. 科学出版社, 北京, 2000.

[3] B. Castaing, Y. Gagne, and E.J. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. Physica D, 46:177, 1990.

[4] I. Koponen. Analytic approach to the problem of convergence of truncated lévy flights towards the Gaussian stochastic process. Phy. Rev. E, 52:1197–1199, 1995.

[5] L. Liu, F. Hu, and X.-L. Cheng. Probability density functions of turbulent velocity and temperature fluctuations in the unstable atmospheric surface layer. J. Geophys. Res., 116:D12117, 2011.

[6] H. Nakao. Multi-scaling properties of truncated Lévy flights. Phys. Lett. A, 266:282, 2000.

[7] J. P. Nolan. Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data. Birkhauser, Boston, 2012. In progress, Chapter 1 online at `http://academic2.american.edu/~jpnolan`.