关于 Bell 不等式（II）

管克英
（北京交通大学理学院， 北京，keying.guan@gmail.com）

摘要： 不使用隐参数，仅通过半经典模型即可导出 Bell 使用隐参数导出的平均关联及 Bell 不等式,对比 Bell 的推导过程显示出 Bell 的隐参数是不合理，不自然的，与量子力学因果解释无关。 半经典模型的结果是量子力学结果的很好近似，它揭示出量子纠缠理论所谓的超距现象只不过是经典角动量守恒律的量子力学表现，根本不是超距作用。

在博文《关于 Bell 不等式（I）》中，作者已论证 Bell 不等式(包括 CHSH 不等式)的推导实际上使用了电子纠缠对的态是两个电子自旋本征态直积的假设， 这种态不是量子纠缠理论要求的由直积态叠加的单态。

坚持量子纠缠理论的学者如果需要这些不等式适用于单态， 就必须对 Bell 不等式的推导做出修正。 虽然这是可能的，但本文不拟讨论修正的方法，而是关注 Bell 如何将其设想的隐参数不合理、不自然地强加给因果解释的过程。

本文第一节将介绍一个不使用隐参数， 仅用半经典模型推导出的平均关联公式， 它与 Bell 用隐参数得到的平均关联相同。这节还将指出，半经典模型的平均关联是量子力学给出的平均关联的很好近似， 该关联也揭示了量子纠缠理论中纠缠对的“超距作用现象”不过是经典守恒律的表现，根本不是超距作用。

本文第二节介绍 Bell 原文【1】的推导过程， 分析他如何根据自己对隐参数的理解给出观测值 $A(\vec{a},\lambda)$ 和 $B(\vec{b},\lambda)$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 轴以及参数 λ 的精确关系， 以及如何得到相应的平均关联。

通过两节的对照可以看出，Bell 的隐参数理论费解，不自然，也可看出，Bell 设想的隐参数理论是强加给量子力学因果解释的。

一. 自旋相反电子对的半经典模型

设想一个自旋相反电子对 (p_1,p_2) 的半经典模型。

假设两个电子在分别沿 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 轴的自旋关联测量前，电子 p_1 有确定自旋方向， 这里用单位矢量 $\vec{p}$ 表示其方向 （注：正统量子力学不承认没测量的电子有自己确定的自旋方向，但又承认存在一个极化矢量 $\vec{p}$，将在本文第二节进一步讨论）。 自然，电子 p_2 的自旋方向为 $-\vec{p}$。

用 θ_{ap} 表示 $\vec{p}$ 与 $\vec{a}$ 轴之间的夹角， 按照半经典的思考， 如果沿 $\vec{a}$ 轴重新测电子 p_1 的自旋，则其自旋方向会自然转到 $\vec{p}$ 在 $\vec{a}$ 轴的投影方向（注：正统的量子力学则认为测量后，电子的自旋既可能朝向该投影方向，也可能反向， 只是前者的概率大于 $\frac{1}{2}$）， 因

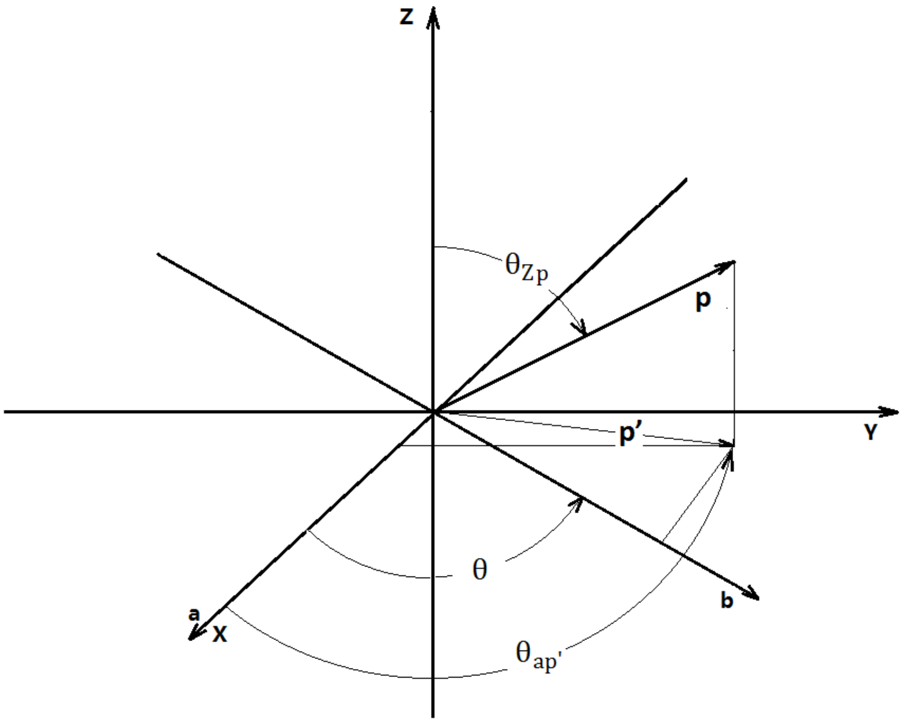
此对其关联测量的值应是

$$A(\vec{a},\vec{p}) = \text{sign}\,\vec{a}\cdot\vec{p} = \text{sign}\cos\theta_{ap} \tag{1}$$

不需要超距作用，假设对两个自旋相反电子的关联测量是相互独立的，也就是说，假设对电子 p_1 自旋测量后，电子 p_2 的自旋方向仍为 $-\vec{p}$（量子纠缠理论认为，由于超距作用其自旋方向已自动塌缩到 $-\vec{a}$ 方向）。这时，对电子 p_2 沿 $\vec{b}$ 轴的关联测量值就是

$$B(\vec{b},\vec{p}) = -\text{sign}\,\vec{b}\cdot\vec{p} = -\text{sign}\ \cos\theta_{bp} \tag{2}$$

现在用三维物理空间的直角坐标系 (X, Y, Z) 对这一模型进行更直观的描述（图一）。



图一

不失一般性， 设测量轴 $\vec{a}$ 与 X 轴同向重合， $\vec{b}$ 轴落在 XY 平面上（如图一）。 $\vec{p'}$ 表示 $\vec{p}$ 在 XY 平面上的投影。 θ_{Zp} 表示 Z 轴与 $\vec{p}$ 的夹角（$0 \le \theta_{Zp} \le \pi$）， θ 表示由 $\vec{a}$ 轴转到 $\vec{b}$ 轴的转角（转向如图一所示， $0 \le \theta < 2\pi$）， $\theta_{ap'}$ 表示由 $\vec{a}$ 轴转到 $\vec{p'}$ 的转角（$0 \le \theta_{ap'} < 2\pi$）, θ_{ap} 和 θ_{bp} 分别表示轴 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 与 $\vec{p}$ 的夹角。

不难看出:

$$\begin{cases} \cos\theta_{ap} = \sin\theta_{Zp}\cos\theta_{ap'} \\ \cos\theta_{bp} = \sin\theta_{Zp}\cos(\theta_{ap'}-\theta) \end{cases} \tag{3}$$

对给定的上述电子对 (p_1, p_2)，沿 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的自旋关联定义为

$$P(\vec{a},\vec{b},\vec{p}) = A(\vec{a},\vec{p})B(\vec{b},\vec{p}) \tag{4}$$

这一关联明显依赖原电子对的 $\vec{p}$ 取向。

由于自旋相反的电子对第一个电子的自旋方向 $\vec{p}$ 可以是空间任何方向，而且没有任何理由假设某方向有特殊性，即 $\vec{p}$ 取任一方向的机会都均等。容易看到，$\vec{p}$ 的任一取向与球面S^2上的点形成一一对应，该球面以坐标原点为中心，半径等于 1。

因此， 有理由按以下方式定义 $\vec{p}$ 取遍所有方向的自旋相反电子对关于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 两个方向的自旋平均关联

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\oiint A(\vec{a},\vec{p})\,B(\vec{b},\vec{p})d\sigma}{\oiint d\sigma} \tag{5}$$

其中右方的分子与分母都是对球面 S^2 的第一类曲面积分。将（3）代入（1） 和 （2），再代入（5），使用球面的面积元 $d\sigma = \sin\theta_{Zp}d\theta_{Zp}d\theta_{ap'}$ ， 并且注意当 $0 < \theta_{Zp} < \pi$ 时，$\sin\theta_{Zp} > 0$，(5)式可写成

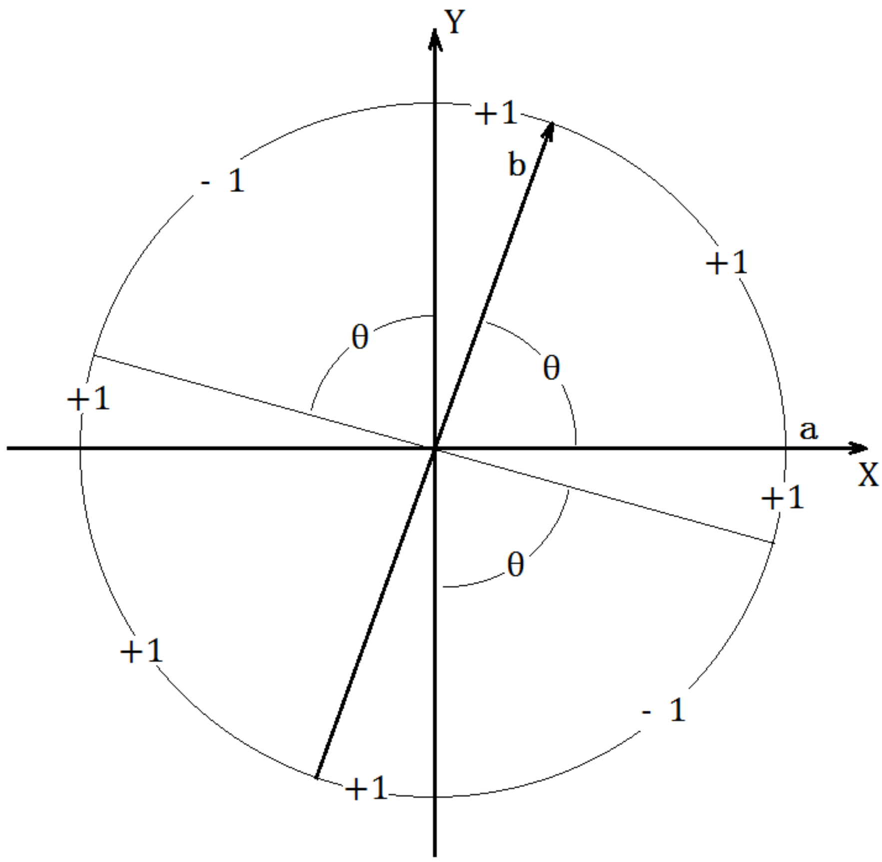
$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{\int_0^{\pi}\sin\theta_{Zp}d\theta_{Zp}\int_0^{2\pi}(\text{sign}\cos\theta_{ap'})\,[\text{sign}\cos(\theta_{ap'}-\theta)]d\theta_{ap'}}{\int_0^{\pi}\sin\theta_{Zp}d\theta_{Zp}\int_0^{2\pi}d\theta_{ap'}} \tag{6}$$

（6）可进一步化简为

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{\int_0^{2\pi}(\text{sign}\cos\theta_{ap'})\,[\text{sign}\cos(\theta_{ap'}-\theta)]d\theta_{ap'}}{2\pi} \tag{7}$$

为计算（7）， 先设 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$。 在 XY 平面图 （图二）上显示当旋转角度 $\theta_{ap'}$ 由 0 变到 2π 时，乘积（$\text{sign}\cos\theta_{ap'}$）$[\text{sign}\cos(\theta_{ap'}-\theta)]$ （图中用 +1，-1 表示）在单位圆周上不同弧段变化的情况。由此可得出，

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\left[\frac{(2\pi-2\theta)-2\theta}{2\pi}\right] = \frac{2\theta-\pi}{\pi}$$



图二

当 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$、$\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 时，可以用类似的方法给出相应的 $P(\vec{a},\vec{b})$ 值 （这里不再赘述）。 最后得到

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \begin{cases} \frac{2\theta-\pi}{\pi} & \text{if } 0 \leq \theta \leq \pi \\ \frac{2(2\pi-\theta)-\pi}{\pi} & \text{if } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \tag{8}$$

如果不按图一将 θ 理解为由 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的转角，而是理解成矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，就有 $0 \leq \theta \leq \pi$，（8）式可简化成

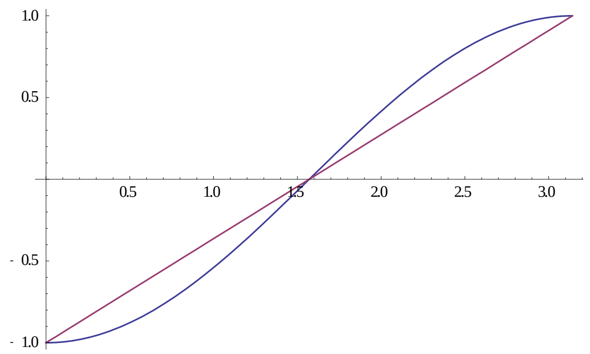
$$P(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2\theta-\pi}{\pi} \tag{8'}$$

（8’）与 Bell 原文用复杂的隐参数方法得到的平均关联相同，同样满足 Bell 不等式。

量子力学中自旋相反电子对关于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 两个方向的自旋平均关联公式是

$$P_Q(\vec{a},\vec{b}) = -\cos\theta \tag{9}$$

图三显示了两种关联的差异，其中紫色斜线是由（8′）式给出的，蓝色的曲线是由（9）式给出的。如果不过分挑剔，可以说半经典方法得到的（8′）式是量子力学得到的 (9)式的很好近似。



图三

二者在 $\theta = 0$、$\frac{\pi}{2}$ 或 π 时完全相同。特别，在 $\theta = 0$ 或 π 时，主张量子纠缠理论的一些学者将 $P_Q(\vec{a},\vec{a}) = -1$，$P_Q(\vec{a},-\vec{a}) = +1$ 解释成纠缠对电子存在超距联系，因为按他们的理解， 该结果意味着当将第一个电子沿 $\vec{a}$ 轴测量自旋后， 与之纠缠的第二个电子的自旋，受超距作用，立即沿 $\vec{a}$ 轴塌缩到与第一个电子相反的方向。

另一方面，根据半经典的平均关联的推导， 根本不需要有这种超距作用，也同样有 $P(\vec{a},\vec{a}) = -1$，$P(\vec{a},-\vec{a}) = +1$。

因此有充分理由说，自然界根本不存在神秘超距作用，$P_Q(\vec{a},\vec{a}) = -1$，$P_Q(\vec{a},-\vec{a}) = +1$ 只是经典自旋守恒的表现。

在 θ 取其它值时，二者存在差别是可以理解的，因为对于电子等微观粒子，它们的性质完全不同于经典粒子。

其实，量子力学的关联实验也在绝大多数情况下证实了半经典平均关联 （8′）满足的 Bell 不等式是正确的。在某些条件，如在 $\theta_{ab} = \frac{\pi}{3}$，$\theta_{bc} = \frac{\pi}{3}$ 以及 $\theta_{ac} = \frac{2\pi}{3}$ 条件下，Bell 不等式会受到破坏。读者可以用（8′）式检验，这些条件恰恰对应着 Bell 不等式等号成立的特殊情况。此时不等式被破坏是可预料的。

应该注意到，Einstein 和量子力学因果解释学派的带头人都是量子力学的创始人，正是他们提出了量子的 “波粒二重性”，建立了将波与粒子二重性联系起来的德布罗意公式，提出了量子力学的基本运动方程， 没有任何理由设想他们会认为由半经典思考得到的平均关联（8′）是处处正确的。

如果真有量子力学的隐参数理论的话，隐参数理论绝不会重复前面的半经典模型，而是通过隐参数着重描写为什么量子力学的平均关联是（9）。

下一节将指出，Bell 的原文是怎样通过其设想的“隐参数”将平均关联（8′）及 Bell 不等式强加给量子力学因果解释学派的。

二．Bell 原文中给出的平均关联

由于以前没有因果解释学派的学者给出过隐参数的具体形式，所以 Bell 原文的开始部分也没有设定隐参数 λ 的维数。但为了使其设想的测量值 $A(\vec{a},\lambda)$，$B(\vec{b},\lambda)$ 等在隐参数理论中确实可以存在，他必须给出一种设想的用隐参数表达的 $A(\vec{a},\lambda)$，$B(\vec{b},\lambda)$ 理论值。

为此， Bell 使用单位矢量 $\vec{\lambda}$ 描写单个电子的隐参数，并使用有点积符号表达的对隐参数的限制(该文 404)

$$\vec{\lambda}\cdot\vec{p} > 0$$

其中 $\vec{p}$ 是粒子（电子）的单位极化矢量。电子的极化矢量的概念仅在少量有相当深度的教科书中找到解释（如【2】,【3】)， 按照【2】，它是指，当如果可以使用带有自旋的电子波函数描写电子的纯态时，那就必然存在一个特定方向，沿该方向电子的自旋态取值为 $+\frac{1}{2}$，该方向就是极化方向。

（注：应该说极化矢量的概念实际上不是针对单个电子，它是理想的电子系综下的统计物理量。 文【3】进一步指出，对于电子处于自旋取向完全无规的混合态时，沿任何方向都有 $\vec{p}=0$， 这时就谈不上极化矢量。本文不拟深入讨论相关的问题，假设电子处于纯态，按照【2】 $\vec{p}$ 是有意义的。）

由于，数学上定义点积时， 至少要求点积对参与点积的两矢量是对称的。 这意味着 $\vec{\lambda}$ 的维数必须与 $\vec{p}$ 的维数（3 维）相同，否则不能定义点积。 为什么 $\vec{\lambda}$ 是 3 维而不是大于三维的，Bell 没有明确说明。为此，作者请教过不少专家，至今没有找到令人满意的答复。

该文还引用了一个设想的单位矢量 $\vec{a'}$ 及有关的表达式（404 页（4）式）

$$\mathrm{sign}\,\vec{\lambda}\cdot\vec{a'} \tag{10}$$

用其表示电子自旋算符 $\vec{\sigma}$ 在 $\vec{a}$ 轴分量的测量结果。Bell 要求 $\vec{a'}$ 以下面方式由 $\vec{a}$ 与 $\vec{p}$ 确定（原文（4）式），

$$1-\frac{2\theta'}{\pi}=\cos\theta \tag{11}$$

其中 θ' 是 $\vec{a'}$ 与 $\vec{p}$ 的夹角，θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{p}$ 的夹角。

上述的要求或约定满足后， Bell 宣布可以得到一个所希望的关于 $\vec{\sigma}\cdot\vec{a}$ 的平均值（原文没有给出该平均值的推导过程），

$$< \vec{\sigma}\cdot\vec{a} > = \cos\theta \tag{12}$$

通过上述准备， Bell 提出了一种用其隐参数表示的 $A(\vec{a},\lambda)$，$B(\vec{b},\lambda)$ 理论值 （405 页的公式（9））

$$\left.\begin{aligned} A\left(\vec{a},\vec{\lambda}\right) &= \operatorname{sign}\vec{a}\cdot\vec{\lambda} \\ B(a,b) &= -\operatorname{sign}\vec{b}\cdot\vec{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中第二行 $B(a,b)$ 是原文的明显笔误（应是 $B\left(\vec{b},\vec{\lambda}\right)$）。

Bell 以（13）为基础，导出（猜测是仿照（12）的推导，但原文也没给出推导过程）“隐参数理论”的平均关联公式

$$P\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -1 + \frac{2\theta}{\pi} \tag{14}$$

其中 θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

注意（11）式的左方与用半经典思考得出的（8′）式右方有相似之处，Bell 为何能给出条件（11）无从得知。 设想他也通过与本文类似的思考先得到（8′）， 由此联想提出 (11)，这似乎是个合理的解释。

然而，历史上未曾有任何主张量子力学因果解释的学者提出隐参数必须是三维的， 也没有任何学者会认为微观量子的行为与宏观的测量无关，认为测量值 $A(\vec{a},\lambda)$，$B(\vec{b},\lambda)$ 仅由与测量无关而且莫名其妙的三维隐参数 $\vec{\lambda}$ 按（13）式精确决定。

按照普通人的正常思维，一般也会认为如果影响量子在测量时表现的隐参数存在，这类隐参数也一定非常复杂，与测量仪器的结构，测量方法，测量过程以及其它环境因素都有关系，绝不会是三维的。

事实上，（13）式与（14）式都不是主张因果解释的学者提出的。

因此， 用隐参数表示 $A(\vec{a},\lambda)$，$B(\vec{b},\lambda)$ 的理论值（13）以及平均关联公式（14）是 Bell 强加给 Einstein 和量子力学因果解释学派的。

三. 一些思考

其实，如果不是为了挑战 Einstein 等， Bell 直接将电子对中第一个电子的极化矢量 $\vec{p}$ 代替苦心引入的三维隐参数 $\vec{\lambda}$， 即可按半经典的模型简单直接地得到平均关联（14）及其满足的 Bell 不等式。 而理论与实验都证实这样的结果是量子力学的很好近似， 这本应该是 Bell 的重大贡献。

令人遗憾的是，他恰是为了挑战量子力学的因果解释，通过不合理、不自然的方式强加给对方一个隐参数，并通过复杂推导得到上述公式。这实际上并不能证明因果解释不正确，却使得这些公式的积极意义变得暗淡， 甚至被不恰当地利用。

有关 Bell 不等式以及关于量子纠缠对是否有超距作用的争论还涉及到量子力学一些更深入的问题，这些将另文讨论。

参考文献

【1】 John S. Bell，On the Einstain Podolsky Rosen Paradox, Physics, I, 195-200 (1964)

【2】 L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory, 3-rd ed., Pergamon Press, 1977.

【3】 曾谨言，量子力学，卷 II，北京，科学出版社，2007

为读者方便，另附上 Bell 的原文。