关于 Bell 不等式（Ⅰ）

管克英
（北京交通大学理学院，北京，Email：keying.guan@gmail.com）

摘要：指出，流行的关于 Bell 不等式的不同推导方法都蕴含了假设，即电子纠缠对的态是两个电子自旋本征态的直积态，而不是正统量子纠缠理论要求的由直积态叠加的单态。

众所周知，Bell 不等式（参考【1】）和后来的 CHSH 不等式（参考【2】）是现代一些主张量子力学纯几率解释（正统）学派否定以爱因斯坦、德布罗意、鲍姆和薛定谔为代表的量子力学因果解释学派的主要依据。也是部分学者主张有神秘超距作用的“量子纠缠”理论的重要依据。

作者自 2012 年初发表博文 Bell 态及量子隐形传态的内涵和关于 Bell 态及量子隐形传态以来， 注意到两个不等式在纠缠理论中的重要作用。为了慎重，反复查看有关资料，进一步了解这些不等式的准确含义，研究它们与量子力学的确切关系，发现藉 Bell 不等式否定以爱因斯坦、德布罗意、鲍姆和薛定谔为代表的量子力学因果解释是完全没有道理的。 将分两部分详细阐述这一结论，本文是第一部分。

一．Bell 不等式与量子力学的矛盾

Bell 和 CHSH 的原文（【1】和【2】）都是研究处于相互关联（纠缠）自旋为 $\frac{1}{2}$ 的微观粒子对 (p_1, p_2)，并假设两个粒子的自旋方向相反。为了与因果解释中的隐参数理论联系起来，还假设两个粒子的状态由（可以是多维的）隐参数λ 决定。 Bell 的论文用符号 $A(\vec{a},\lambda)$（CHSH 的论文用符号 $A(a,\lambda)$）表示对粒子 p_1 沿给定的轴 $\vec{a}$（或 a）测量自旋的结果，即如果测得自旋值为 $\frac{1}{2}$，则 $A(\vec{a},\lambda)=1$，如果自旋值为$-\frac{1}{2}$，则 $A(\vec{a},\lambda)=-1$；用 $B(\vec{b},\lambda)$（或 $B(b,\lambda)$）表示对粒子 p_2 沿给定的轴 $\vec{b}$（或 b）测量自旋的结果。这两个测量合在一起称为纠缠粒子对 (p_1, p_2) 沿轴 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的一次关联测量。

上述关联测量的结果依赖于参数λ 及 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 两轴的选择。 Bell 的另一个假设是该关联测量结果与测量 $A(\vec{a},\lambda)$ 和 $B(\vec{b},\lambda)$ 的先后顺序无关。

显然

$$A^2(\vec{a},\lambda)=B^2(\vec{b},\lambda)=1 \qquad (1)$$

由于两个粒子自旋相反，如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 两轴重合，则

$$A(\vec{a},\lambda)=-B(\vec{a},\lambda),\quad A(\vec{b},\lambda)=-B(\vec{b},\lambda) \tag{2}$$

用 $\rho(\lambda)$ 表示纠缠粒子对 (p_1,p_2)关于隐参数λ 的分布密度。由此可以定义这类纠缠对集合沿 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 两个轴的平均关联

$$P(\vec{a},\vec{b})=\int d\lambda\,\rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\quad（\text{或}P(a,b)=\int A(a,\lambda)B(b,\lambda)\rho(\lambda)d\lambda） \tag{3}$$

本文将用黑体字强调两个基本事实。

基本事实 1：在积分式（3）中乘积的两个因子 $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{a}},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $\mathbf{B}(\vec{\mathbf{b}},\boldsymbol{\lambda})$，对同一个参数，必须用同一纠缠对（$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$）两个粒子的关联测量。

实际的关联测量必须如此。 否则，如果测量 $A(\vec{a},\lambda)$ 和 $B(\vec{b},\lambda)$ 用的两个粒子来自不同纠缠对，关联测量则毫无意义。

以下等式显然成立：

$$P(\vec{a},\vec{a})=-1,\quad P(\vec{a},-\vec{a})=1$$

物理上也可预料，如果 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 则 $P(\vec{a},\vec{b})=0$。

具体的 Bell 不等式是

$$\left|P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c})\right|\le 1+P(\vec{b},\vec{c}) \tag{4}$$

CHSH 不等式是

$$|P(a,b)-P(a,c)|\le 2-P(b',b)-P(b',c) \tag{5}$$

两个不等式都涉及到除了沿 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 两轴的关联测量外， 还有沿 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 两轴的关联测量，沿 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 两轴的关联测量， CHSH 不等式还涉及到沿 $\vec{b'}$ 与 $\vec{b}$ 两轴的关联测量，以及沿 $\vec{b'}$ 与 $\vec{c}$ 两个轴的关联测量。

Bell 及 CHSH 原文对这两个不等式的推导都是根据平均关联的定义（3）进行的。推导仅几个简单步骤，有一点积分知识即可看懂。下一节将讨论推导中的具体问题。

量子力学对平均关联的推导较复杂，涉及到纠缠电子对的单态、自旋算符等复杂概念的表示。 若理清这些复杂概念及相应的运算规则， 则可通过并不复杂的计算，得出量子力学观点的平均关联（参考文献【3】33 页）

$$P_Q(\vec{a},\vec{b})=-\cos\theta_{ab},\,P_Q(\vec{a},\vec{c})=-\cos\theta_{ac},\,P_Q(\vec{b},\vec{c})=-\cos\theta_{bc} \tag{6}$$

其中 P_Q 的下标 Q 表示关联是按量子力学观点得出的， θ_{ab}、θ_{ac} 和 θ_{bc} 分别表示 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$、$\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 以及 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角。

如果这三个不同的轴在同一个平面内， 而且 $\theta_{ab}=\frac{\pi}{3}, \theta_{bc}=\frac{\pi}{3}$, 那么必然有 $\theta_{ac}=\frac{2\pi}{3}$。此时，

$$\left|P_Q(\vec{a},\vec{b})-P_Q(\vec{a},\vec{c})\right|>1+P_Q(\vec{b},\vec{c}) \tag{7}$$

显然（7）式与（4）式相互矛盾。由于在这种条件下，实际的测试结果符合（7），因此一些物理学家认为量子力学的隐参数理论是错误的。

二．Bell 不等式与量子力学中关于纠缠对的不同要求

自 Bell 不等式提出以后，关于其意义的争议一直不断。 既然 Bell 不等式与量子力学的关联都经过了严格的数学推导， 那么这种矛盾一定是由于对同一类物理现象两种理论分别使用了不同的概念。那么，两者是在哪些概念上存在不同呢？

仔细推敲 Bell（或 CHSH)的原文对不等式的推导，可以发现：**为了将 $\mathbf{P}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})$、$\mathbf{P}(\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})$ 及 $\mathbf{P}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{c}})$ 的积分式联系起来， Bell 暗含地使用了**

假设：所讨论的电子纠缠对的态必须是两个自旋相反电子本征态的直积态，而不是量子力学中纠缠对的（由两个直积态叠加而成的）自旋单态。

下面将以 Bell 原文中的推导详细说明这一点。为此，先指出以下

基本事实 2： Bell 不等式（4）涉及到，除了沿 $\vec{\mathbf{a}}$ 与 $\vec{\mathbf{b}}$ 两轴的关联测量外，还有沿 $\vec{\mathbf{a}}$ 与 $\vec{\mathbf{c}}$ 两轴的关联测量，以及沿 $\vec{\mathbf{b}}$ 与 $\vec{\mathbf{c}}$ 两轴的关联测量。 实际测量上述任何一个平均关联时，都要专门使用一个依赖各个参数的纠缠对集合，由于给定的纠缠对只能做一次相关测量， 任何两个不同的平均关联测量必须使用两个完全不相交的纠缠对集合。除此还需保证在这些不同集合中，纠缠对有相同的分布密度 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda})$。

由于在同一个参数下，有相同纠缠的粒子对必须足够多（理论上应无穷多）， 使得不等式中出现的所有平均关联测量都可独立地实施。

利用公式（2），在 Bell 不等式的证明中使用了以下等式，

$$P(\vec{a},\vec{b})\ (=\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda))=-\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda) \tag{8.1}$$

$$P(\vec{a},\vec{c})\ (=\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{c},\lambda))=-\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{c},\lambda) \tag{8.2}$$

$$P(\vec{b},\vec{c})\ (=\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{b},\lambda) B(\vec{c},\lambda))=-\int d\lambda\, \rho(\lambda) A(\vec{b},\lambda) A(\vec{c},\lambda) \tag{8.3}$$

需要注意的是，积分中乘积的两个因子对应的必须是同一对纠缠粒子的关联测量值。

Bell 推导中的关键部分是

$$
\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b})-P(\vec{a},\vec{c}) &= -\int d\lambda\rho(\lambda)\,[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)-A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)] \\
&\left(= -\int d\lambda\rho(\lambda)\,[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)-A(\vec{b},\lambda)A(\vec{b},\lambda)(A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)]\right) \\
&= \int d\lambda\,\rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)[A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)-1]
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

上式括号中一行是为说明方便由本文作者补充的中间步骤，它利用了等式（1）。

研究（9）式第一行等号的右方。将 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)$ 和 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)$ 在同一参数下连在一起，容易被认为物理上不可能的对同一对纠缠粒子的两个不同关联测量， 幸好它们是用减号联系起来的两个不同积分， 只要记住两个乘积所对应的电子对是不同的即可。

（9）式的最后一行是提取公因子 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)$ 得到的。 显然， 该公因子必须是第一个（关于 $P(\vec{a},\vec{b})$）积分式中同一对纠缠粒子对于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 两轴关联测量值的乘积，这意味着中间一行 $A(\vec{b},\lambda)A(\vec{b},\lambda)$ 中的 $A(\vec{b},\lambda)$ 必须同于公因子中的 $A(\vec{b},\lambda)$。

最关键的问题是， 公因子 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)$ 中的 $A(\vec{a},\lambda)$ 也来自 $P(\vec{a},\vec{c})$ 积分中的 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)$。这就要求在同一参数$\lambda$ 下，公因子中的 $A(\vec{a},\lambda)$ 与 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)$ 中的 $A(\vec{a},\lambda)$ 是同一个值，要么同是 +1， 要么同是 -1。 按**基本事实 2**， 用于 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)$ 测量的纠缠对与用于 $A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)$ 测量的纠缠对一定是同一个参数下的不同的对。

因此， Bell 不等式的证明蕴含了以下假设：在同一参数$\boldsymbol{\lambda}$ 下，对所有的纠缠对 $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{a}},\boldsymbol{\lambda})$ 必须是同一个值。类似， 其它各测量值， 如 $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{b}},\boldsymbol{\lambda})$、$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{c}},\boldsymbol{\lambda})$、$\mathbf{B}(\vec{\mathbf{a}},\boldsymbol{\lambda})$、$\mathbf{B}(\vec{\mathbf{b}},\boldsymbol{\lambda})$ 和 $\mathbf{B}(\vec{\mathbf{c}},\boldsymbol{\lambda})$ 等，也都必须是定植，不依赖具体的纠缠对。

同样的问题也出现在 CHSH 不等式的证明中，不再赘述。

由上述 Bell 不等式所蕴含的假设可以看出，这些不等式都要求对给定的参数λ 及给定的轴，所有的电子“纠缠态”必需同属一对自旋相反的电子 p_1 和 p_2 的两类直积态之一，即或者同属

$$|\uparrow>_{p_1} \otimes |\downarrow>_{p_2} \qquad (10.1)$$

或者同属

$$|\downarrow>_{p_1} \otimes |\uparrow>_{p_2} \qquad (10.2)$$

其中 $|\uparrow>_{p_i}$ 表示电子 p_i（i=1,2）的自旋方向与测量轴的方向相同，$|\downarrow>_{p_i}$ 表示电子 p_i的自旋方向与测量轴的方向相反。

然而量子力学所讨论的电子纠缠对的态是由（10.1）和（10.2）两个直积态叠加的单态，

$$|\psi^- >_{p_1p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow>_{p_1} \otimes |\downarrow>_{p_2} - |\downarrow>_{p_1} \otimes |\uparrow>_{p_2}) \tag{11}$$

它显然不是 Bell 不等式所讨论的纠缠对的态，因为对任何给定隐参数λ 和给定的轴 $\vec{a}$，对同一纠缠单态的多个不同电子纠缠对的第一个电子 p_1 测量 $A(\vec{a},\lambda)$ 时， 一定会得到两个不同的值 +1 和 -1，而且两个值出现的概率相同。这不符合 Bell 不等式所蕴含的假设。

在一些科普读物（例如【4】）中常见到关于 Bell 不等式的一类不需要积分的推导。 这类推导将电子纠缠对中的第一个粒子沿三个轴 X、Y 和 Z 测量 Ax、Ay 和 Az 的所有可能情况分成八类：

	Ax	Ay	Az	Bx	By	Bz	出现概率
第一类	+	+	+	−	−	−	N1
第二类	+	+	−	−	−	+	N2
第三类	+	−	+	−	+	−	N3
第四类	+	−	−	−	+	+	N4
第五类	−	+	+	+	−	−	N5
第六类	−	+	−	+	−	+	N6
第七类	−	−	+	+	+	−	N7
第八类	−	−	−	+	+	+	N8

其中 Bx、By 和 Bz 的符号根据第二个粒子自旋方向与第一个相反的要求自动生成。

这类推导不仅假设每类对应一个隐参数集合的子集，同时假设

$$N1 + N2 + \cdots + N8 = 1 \tag{12}$$

这实际上蕴含着所分的八类是互不相容事件，即各自对应的隐参数子集互不相交。 这也意味着对同一个参数λ 的所有纠缠对，如果有一对的 Ax 是 +1，则其它对的 Ax 也必须是 +1，不能出现 -1。显然，这样的纠缠对不可能是量子力学中的单态（11），只能是两个直积态（10）中的一个。

总之，几种 Bell（CHSH）不等式的推导都需要假设“纠缠对”是直积态，不是量子力学的叠加态。

作者将在文《Bell 不等式（II)》中更深入地讨论相关问题。

参考文献：

【1】 John S. Bell，On the Einstain Podolsky Rosen Paradox, Physics, I, 195-200 (1964)

【2】 John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony and Richard A. Holt, Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theory, Phys. Rev. Lett, 23（1969）, 880
【3】 曾谨言，量子力学，卷 II，北京，科学出版社，2007
【4】 曹天元，《上帝掷骰子吗--量子物理史话》，辽宁教育出版社， 2008-9