数学物理方程

苏州大学数学科学学院

引　言

- **《数学物理方程》**是数学领域偏微分方程方向的最基本的入门课程。
- **偏微分方程理论：**主要研究具有实际背景的偏微分方程或偏微分方程组。是数学的基础学科之一。

- **偏微分方程涉及十分广泛：**如物理、化学、生物、经济等自然科学、社会科学和工程技术领域，还与其它许多数学分支有紧密的联系；

- **近年来的热门课题：**将偏微分方程应用于计算机图像处理及金融领域；

- **从事偏微分方程理论及其应用研究的人数众多：**据说占所有从事数学及其应用研究的人数的一半以上。

一、本学期要学的主要内容

1、建立偏微分方程（PDE）

应用数学理论、方法及有关技巧，研究一些具有典型意义的物理现象，导出相应的数学模型——偏微分方程。

2、偏微分方程（PDE）理论初步

①、一些基本的方法和技巧：包括特征线法、分离变量法、**Green**函数法、**Fourier**变换法、能量不等式、极值原理以及基本解、广义函数等等。

②、讨论三类典型二阶方程定解问题的解的存在性、唯一性和稳定性：包括波动方程、热传导方程和位势方程。

③、二阶线性偏微分方程分类

二、《数学物理方程》课程的特点：

1、数学理论、解题方法与物理实际有机结合。

可以学到：如何根据物理现象建立偏微分方程模型及寻找求解方法，并用偏微分方程有关理论来解释物理现象。

2、需要综合应用多门数学学科知识

可以巩固、复习有关数学学科知识，提高综合运用这些知识的能力。如《数学分析》、《常微分方程》、《线性代数》等。

3、解题过程较繁、计算量较大

可以培养耐心、细致的计算能力，这也是数学专业学生必备的能力，是数学专业的基本功。

三、《数学物理方程》学习难点

1、涉及较多的物理知识；

2、大量应用多元微积分 、含参变量积分以及**Fourier**级数等有关的知识、技巧；

3、综合应用多门已学课程；

4、计算量较大。

关于教材

- 《数学物理方程讲义》；
- 前苏州大学校长姜礼尚等编；
- 曾获国家教委优秀教材奖；
- 第一版是姜礼尚先生在北大时与陈亚浙、刘西垣合编；
- 第二版是姜礼尚先生在苏大时改编；前苏大易法槐教授也加入了编者的行列；
- 第三版是姜礼尚先生在同济大学改编,即将出版。

- 姜礼尚先生被聘为苏州大学数学科学学院应用数学研究所所长。

- 欢迎考研的同学们报考应用数学偏微分方程方向的研究生！！！

参考书

- 《数学物理方程》，复旦大学数学系主编
- 《数学物理方法》，**Courant** 和 **Hilbert** 编

  （经典但较老）
- 《**Partial Differential Equation**》，**Fritz John**编　（经典教材）

一些基本概念

- **PDE**（偏微分方程 Partial Differential Equation）：

  含有多元未知函数的偏导数的方程；
- **ODE**（常微分方程 Ordanary Differential Equation)；
- **PDE的阶：**方程中出现的未知函数最高阶偏导数的阶；
- **线性PDE：**方程中的任一项或者与未知函数无关，或者是已知函数与未知函数或其某一偏导数的乘积。
- **非线性PDE：**不是线性的PDE统称为非线性PDE。

- 本课程主要讨论三类二阶线性**PDE**。

例

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u+1$$ 是二阶线性PDE。

$$\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$ 是一阶非线性PDE。

第一章　方程的导出和定解条件

一、本章内容：

1.根据典型的问题导出数学物理方程——偏微分方程。

2.介绍变分原理。

3.介绍偏微分方程基本概念。

二、采用方法

1.用Newton定律、守恒律及其它实验定律方法导出偏微分方程及定解条件。

2.用变分原理推导Euler方程及定解问题。

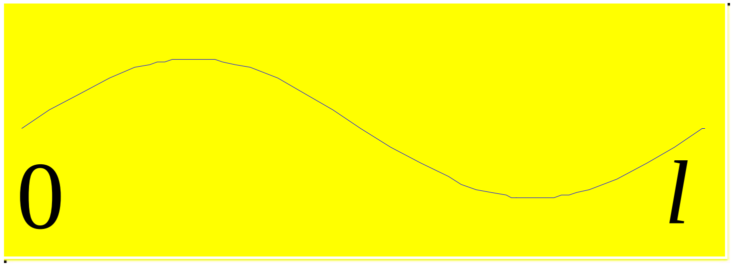
§1.守恒律

§1.1　动量守恒与弦振动方程

一、方程推导

1．问题提法

一长为 l 的柔软、均匀的细弦，拉紧后让它离开平衡位置，在垂直于弦线的外力的作用下，作微小的横振动，求在不同时刻弦线的形状。



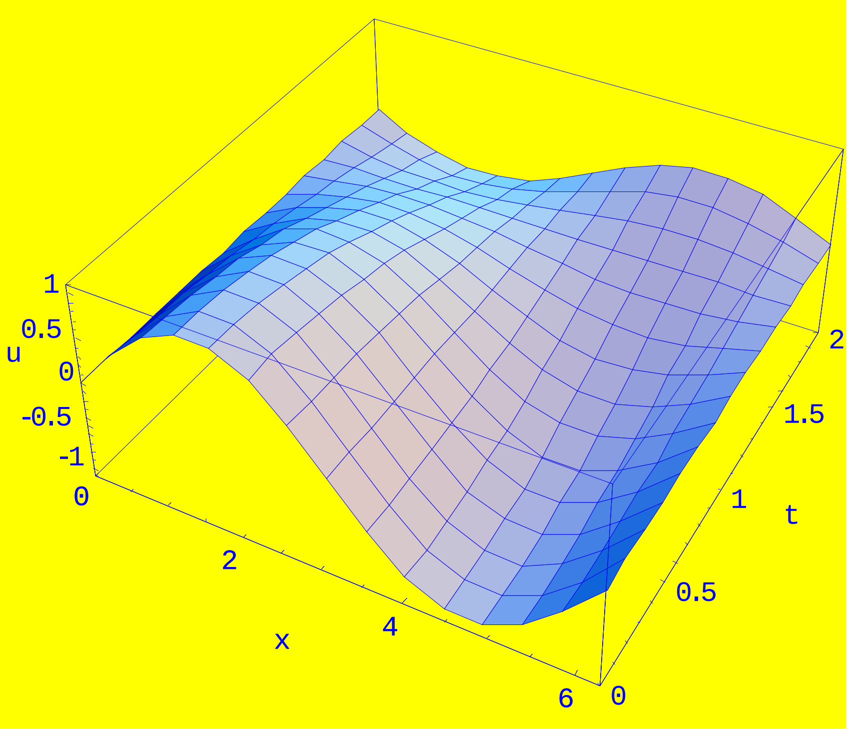
2． 数学提法

以弦平衡位置所在直线为 x 轴，弦运动平面内，过弦的一端作垂直于弦平衡位置的直线为 u 轴，建立直角坐标系。

问题的数学提法：

设 t 时刻，对应于x点处的位移为 $u(x,t)$ ，求函数

$u=u(x,t)$



3．分析、假设

①．波动原因：

对小段弦而言，弦受外力、张力共同作用引起位移、加速度变化，当把小段弦视作质点时，这小段弦服从Newton第二定律：F＝ma（外力的合力＝质量*加速度）。

②．术语及假设：

柔软—— 抗拉伸，不抗弯曲，从而拉力与弦线相切。

均匀—— 弦的线密度为常数，可设为ρ kg/m。

细弦—— 弦的直径与长度之比远远小于1，弦可视为理想的曲线。

外力—— 线密度可设为$f_0(N/m)$；方向：$f_0>0$向上，$f_0<0$向下。

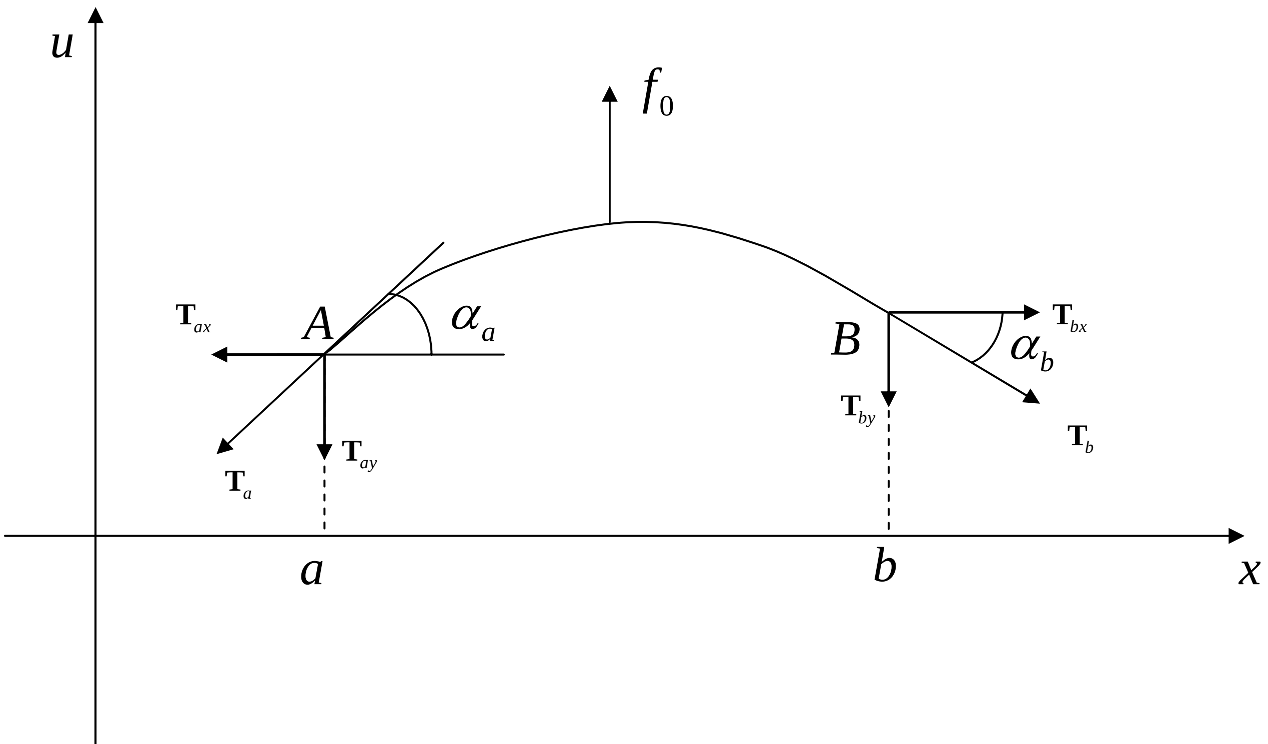
微小的振动 —$\left|\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| << 1$，故其高阶项可近似看着为0。

拉紧——弦的张力随时间的变化可忽略不计。

4.受力分析及各物理量计算公式

①．受力分析：

如图：小段弦受外力、张力共同作用



这里 $0 \le \alpha_a$、$\alpha_b \le \frac{\pi}{2}$

②．各量计算公式：

垂直方向合力大小（方向向上）：

$$f_0\Delta s+\mathbf{T}_a\cdot\mathbf{i}_u+\mathbf{T}_b\cdot\mathbf{i}_u = f_0\Delta s+\left|\mathbf{T}_a\right|\cos(\mathbf{T}_a,\mathbf{i}_u)+\left|\mathbf{T}_b\right|\cos(\mathbf{T}_b,\mathbf{i}_u)$$
$$= f_0\Delta s-\left|\mathbf{T}_a\right|\sin\alpha_a-\left|\mathbf{T}_b\right|\sin\alpha_b$$

其中 $\mathbf{i}_u$=(0,1)为指向u轴正向的单位向量，△s为弧长。

水平方向合力大小： $-\left|\mathbf{T}_a\right|\cos\alpha_a+\left|\mathbf{T}_b\right|\cos\alpha_b\ (=0$，横振动)

小段弦质量： $\rho\Delta s$

小段弦加速度： $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\left(\times\rho\Delta s = f_0\Delta s+\mathbf{T}_a\cdot\mathbf{i}_u+\mathbf{T}_b\cdot\mathbf{i}_u\right)$

③. 各量近似、简化:

根据微小振动条件 $\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| << 1$

因此由数学分析的近似关系:

$$\sin\alpha_a \approx \tan\alpha_a = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a},$$

$$\cos\alpha_a = \sqrt{1-\sin^2\alpha_a} \approx 1,$$

$$\sin\alpha_b \approx \tan\alpha_b = -\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=b}, \quad \cos\alpha_b \approx 1,$$

$$\Delta s = \int_a^b \sqrt{1+(u_x)^2}\,dx \approx b-a.$$

由横向的平衡条件得:

$$|\mathbf{T}_a|\cos\alpha_a = |\mathbf{T}_b|\cos\alpha_b \quad \Rightarrow |\mathbf{T}_a| \approx |\mathbf{T}_b| \equiv T_0.$$

5．方程导出

由Newton第二定律及前面的计算公式、近似公式可得：

$$
\begin{aligned}
f_0\Delta s-|\mathbf{T}_a|\sin\alpha_a-|\mathbf{T}_b|\sin\alpha_b &\approx f_0(b-a)-T_0\tan\alpha_a-T_0\tan\alpha_b\\
&= f_0(b-a)-T_0\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a}+T_0\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=b}\\
&= \rho\Delta s\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\\
&\approx \rho(b-a)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},
\end{aligned}
$$

于是得：

$$
\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=f_0+T_0\frac{\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=b}-\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a}}{b-a},
$$

令$b-a\to 0$得：

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=f_0+T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

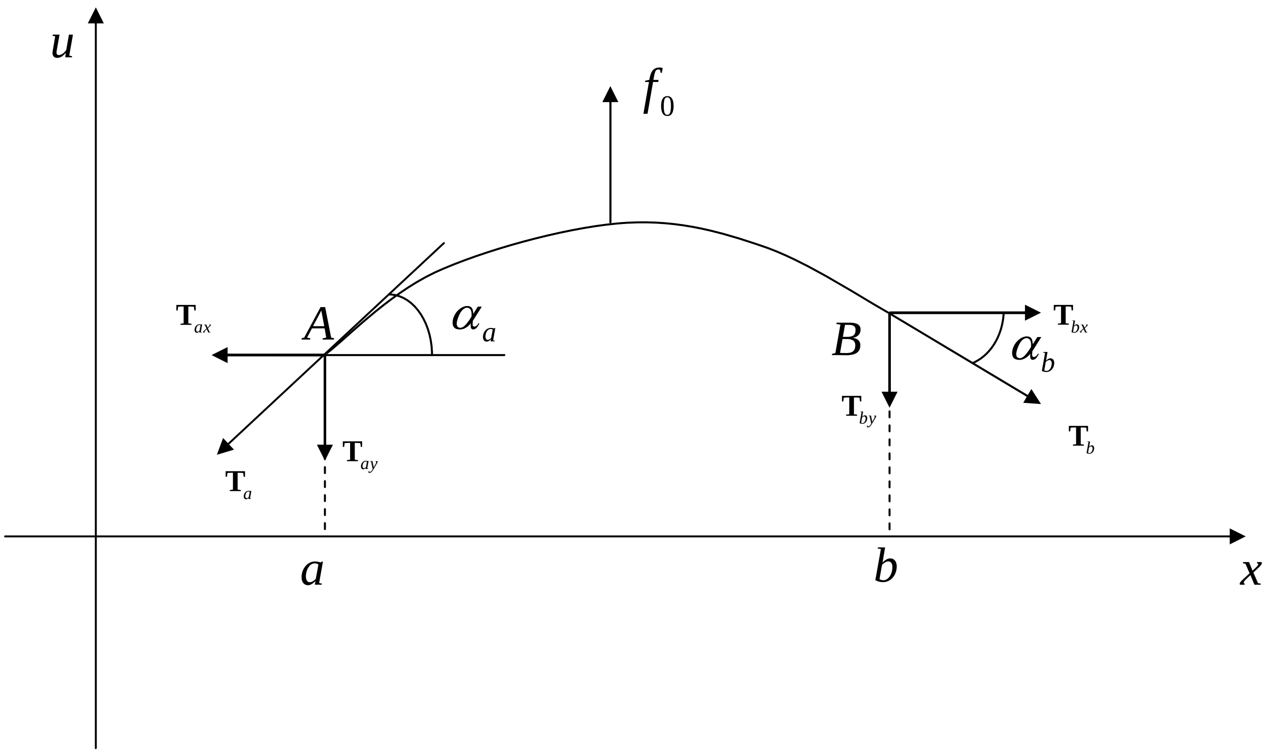
两边同除以 ρ,　　就得出弦振动方程：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t),$$

其中$a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$,　　$f(x,t)=\dfrac{f_0(x,t)}{\rho}$.

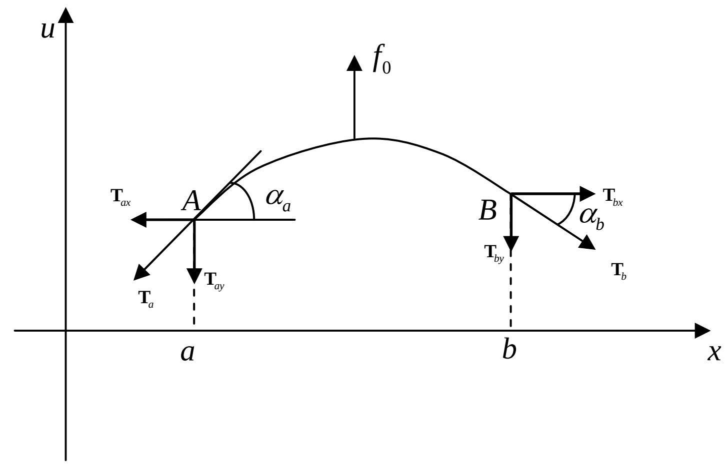
注意：由前面的推导，边界张力的垂直分量为：

$$\mathbf{T}_a \cdot \mathbf{i}_u = -T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=a}, \quad \mathbf{T}_b \cdot \mathbf{i}_u = T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=b}.$$



总结：　弦振动方程：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t),$$



其中 $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $\quad f(x,t) = \frac{f_0(x,t)}{\rho}$.

$$\begin{cases} \rho \text{ 是弦的线密度，} T_0 \text{ 是弦的张力的大小，} \\ f_0 \text{ 是外力的线密度，} \rho \text{ 和 } T_0 \text{ 是正数，} \\ f_0 > 0 \text{ 外力方向向上，} \quad f_0 < 0 \text{ 外力方向向下。} \end{cases}$$

左端点张力的垂直分量为：$\mathbf{T}_a \cdot \mathbf{i}_u = -T_0 \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=a}$，

右端点张力的垂直分量为：$\mathbf{T}_b \cdot \mathbf{i}_u = T_0 \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=b}$.

二、定解条件

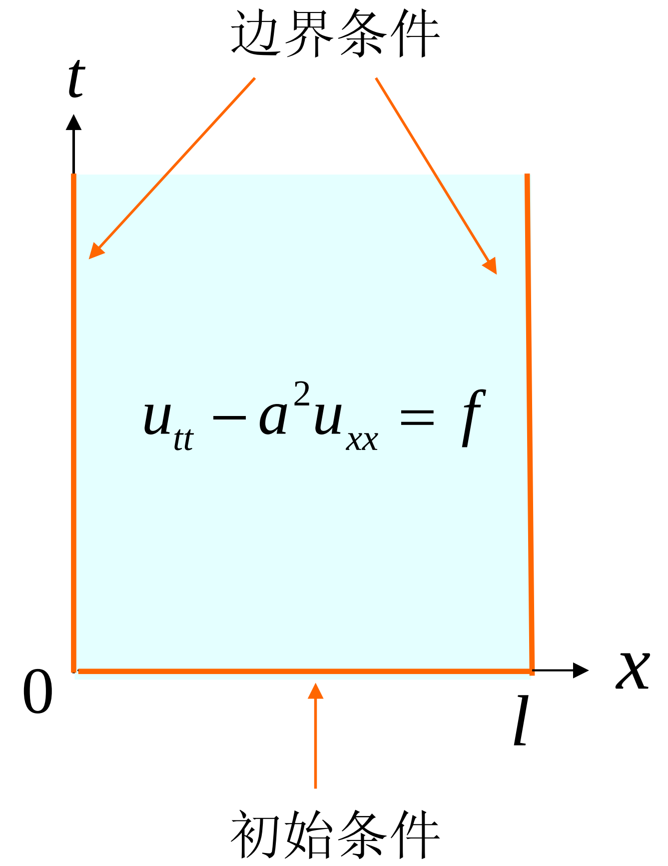
1．初始条件：

①．已知初始位移：

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

②．已知初始速度：

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l,$$



2．边界条件：

①．第一类边界条件：（已知边界位移）

$$u\big|_{x=0} = g_1(t), \quad t \ge 0,, \qquad u\big|_{x=l} = g_2(t), \quad t \ge 0.$$

当 $g_i(t) \equiv 0$ ($i = 1$ 或 2) 时，称该端为固定端。

②．第二类边界条件：（已知边界张力垂直分量）

$$-u_x\big|_{x=0} = g_1(t), \quad t \geq 0, \qquad\qquad u_x\big|_{x=l} = g_2(t), \quad t \geq 0.$$

当 $g_i(t) \equiv 0\ (i = 1$ 或 $2)$ 时，称该端为自由端。

③．第三类边界条件：（边界有弹性支撑情形）

$$(-u_x + \alpha u)\big|_{x=0} = g_1(t), \quad t \geq 0,,$$

$$(u_x + \beta u)\big|_{x=l} = g_2(t), \quad t \geq 0.$$

其中， $\alpha > 0$、$\beta > 0.$

三、定解问题提法（PDE术语）：

1、定解条件（从方程中确定解的条件）：

初始条件、边界条件的统称。

注意：定解条件是不能随意施加的！

2、定解问题：

方程＋定解条件。

3、弦振动方程的定解问题：

弦振动方程＋两个初始条件＋边界条件之一

也称为弦振动方程的混合问题。

弦振动方程的第一边值(Dirchlet)问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\
u(0,t) = g_1(t), & t \ge 0, \\
u(l,t) = g_2(t), & t \ge 0.
\end{cases}
$$

弦振动方程的第二边值(Neumann)问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\
-\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = g_1(t), & t \ge 0, \\
\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = g_2(t), & t \ge 0.
\end{cases}
$$

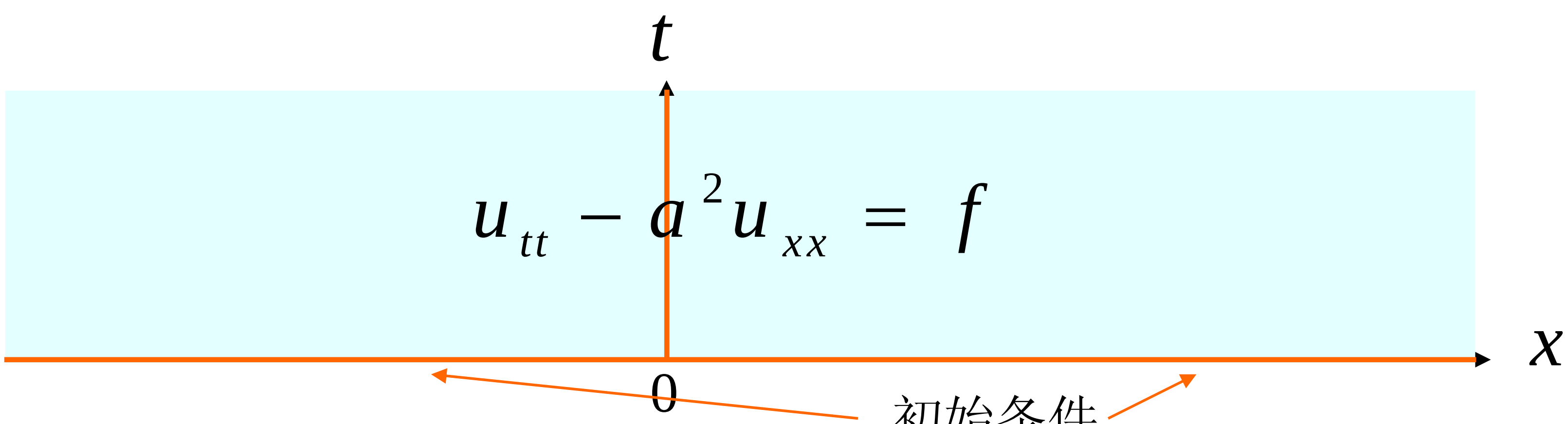
弦振动方程的第三边值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \\
\left. \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \right|_{x=0} = g_1(t), & t \ge 0, \\
\left. \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta u \right) \right|_{x=l} = g_2(t), & t \ge 0.
\end{cases}
$$

4、Cauchy问题（或初值问题）：

对于弦线中某一段，如果在所考虑的时间内，弦端点的影响可以忽略不计时，可以认为弦长为无穷，这时问题化为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & -\infty \le x \le \infty, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty \le x \le \infty.
\end{cases}
$$



五、附注

1、弦振动方程具有典型性，许多有关振动问题同样可以用此方程来刻画。由于振动的一个共同特征是产生波的传播，因此，此方程也称为一维波动方程。

2、弦振动方程的混合问题的边界条件也可以是三类边界条件中的不同两种。

3、高维波动方程与一维波动方程类似：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (a>0)$$

这里 $\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 为Laplace算子，n为维数，

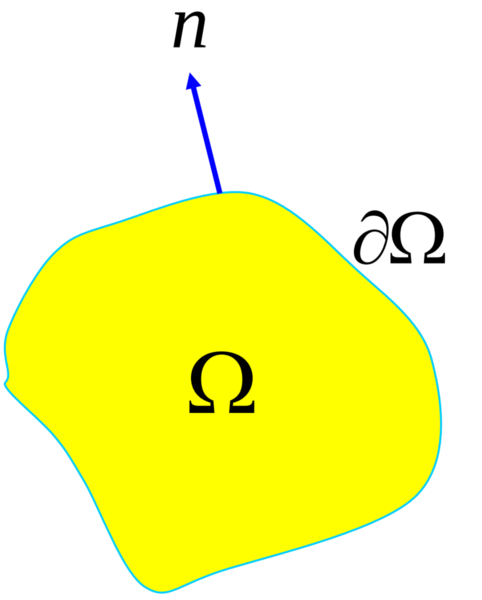
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$n$维空间中的点。

通常我们称该方程称为波动方程。

波动方程的混合问题：

波动方程的第一边值(Dirchlet)问题：

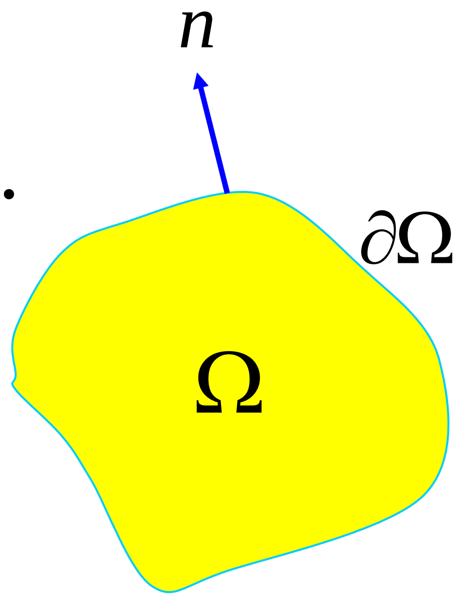
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\
u(x,t) = g(x,t), & x \in \partial\Omega, t \geq 0.
\end{cases}
$$



这里n为$\partial\Omega$的单位外法向。

波动方程的第二边值(Neumann)问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n} = g(x,t), & x \in \partial\Omega, t \geq 0. \end{cases}$$

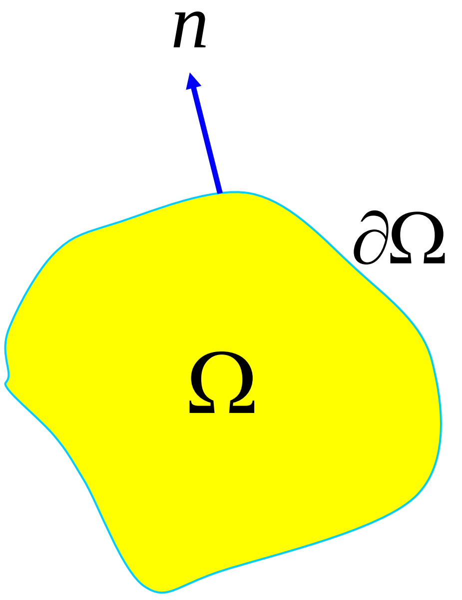


这里n为$\partial\Omega$的单位外法向。

波动方程的第三边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right)(x,t) = g(x,t), & x \in \partial\Omega, t \geq 0. \end{cases}$$

这里n为$\partial\Omega$的单位外法向。



波动方程的初值问题(Cauchy问题)：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbf{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

4、平衡状态问题

当物体在外力作用下处于平衡状态时，物体的位移不再随时间变化，此时，位移满足：

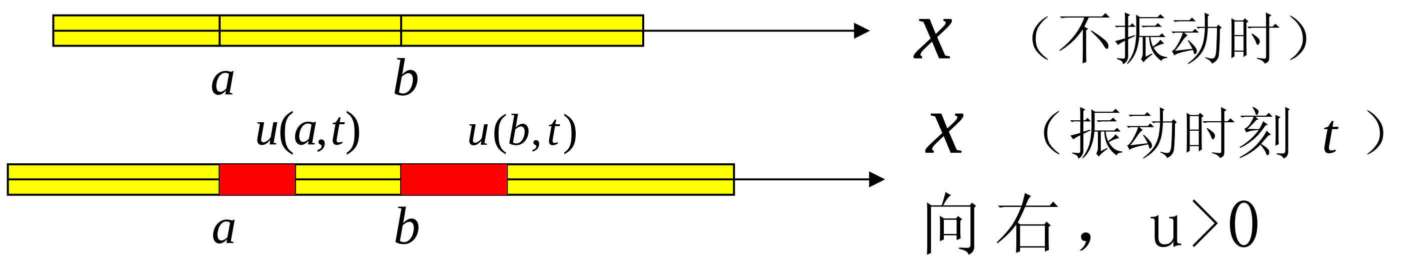
$$-a^2 \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

该方程称为Poisson方程。

注：均匀弹性杆的微小纵振动

——均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动

设杆长方向为 x 轴，$u(x,t)$为 x 处的截面在时刻 t 沿杆长方向的位移，如下图

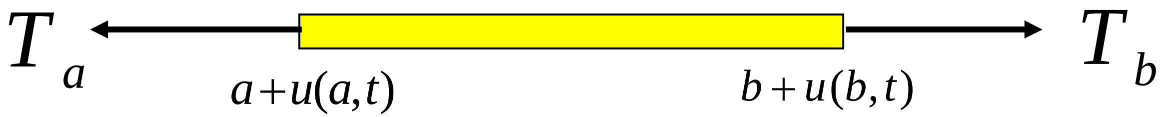


振动中弦上点的张力大小由胡克定理确定：T＝ESε

其中，S－截面积、E－弹性系数（杨氏模量）、

$\varepsilon = \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|$－杆在该点的相对伸长量。

因此，区间 $[a+u(a,t),b+u(b,t)]$ 两端所受的张力为：



$$T_a = -ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}, \quad T_b = ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b}$$

再由Newton第二定律，可推得 $u(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

其中， $a^2 = \frac{\mathrm{E}}{\rho}$， $f = \frac{f_0}{S\rho}$，

ρ 为杆的密度， f_0 为外力线密度。

本节练习：

- Page 28, 1
- Page 29, 2

§1.2　能量守恒与热传导方程

一、 问题：

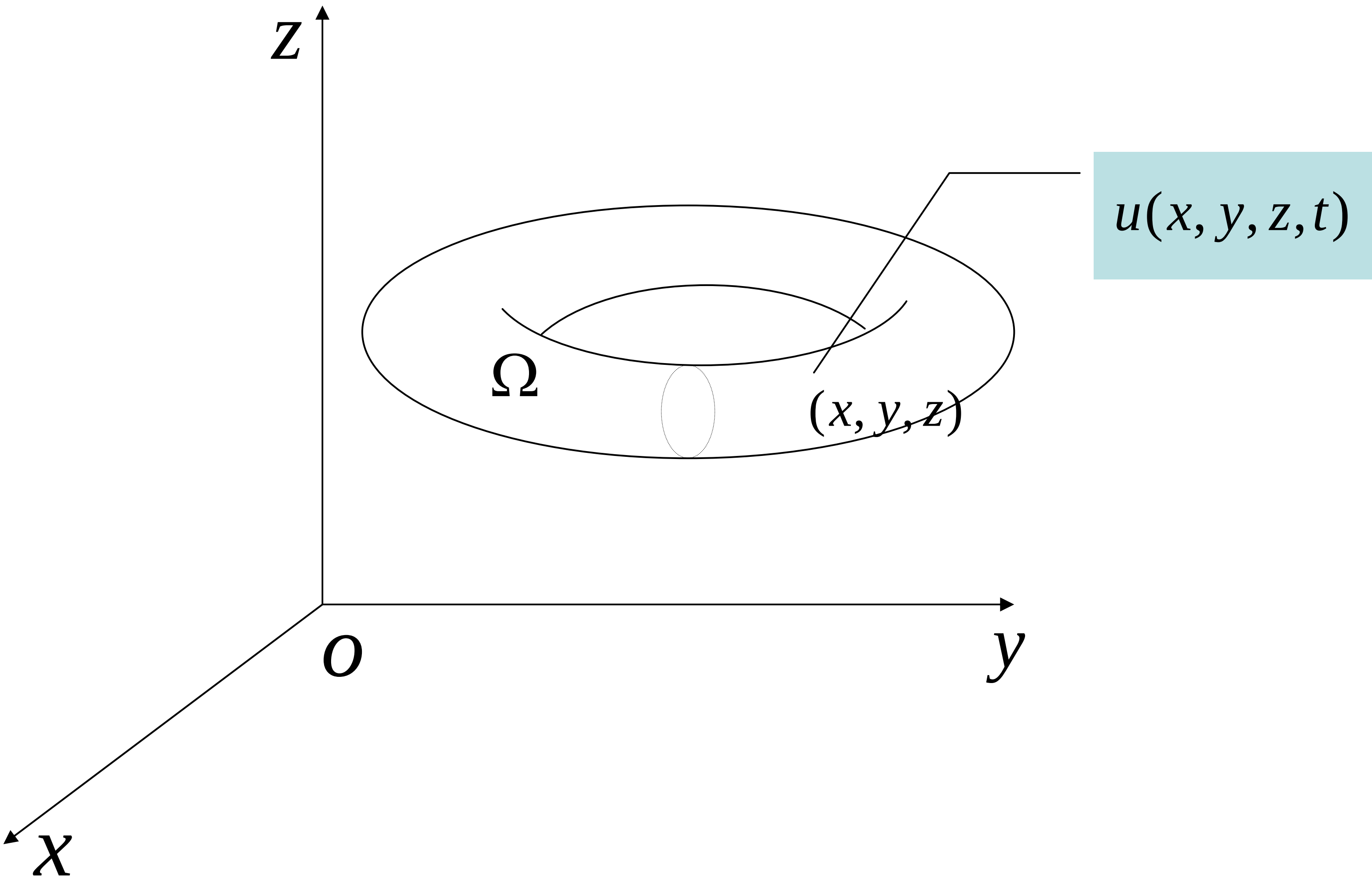
在三维空间中，考虑一均匀、各向同性的物体，假定它内部有热源，并且与周围介质有热交换，研究物体内部温度的分布和变化。

二、问题的数学提法及假设：

建立直角坐标系，设物体所处区域为空间区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$，

物体在 t 时刻，对应于 $(x,y,z)\in\Omega$ 点的温度为 $u(x,y,z,t)$

求 $u(x,y,z,t)$.



z
$u(x, y, z, t)$
Ω
(x, y, z)
o
y
x

基本假设：

均匀——物体的密度为常数 ρ, 单位kg/m^3。

各向同性——物体的比热为常数c, 单位$J/k\cdot kg$.

内部有热源——假设物体的热源强度为 $f_0 = f_0(x,y,z,t)$, 单位$J/kg\cdot s$, 表示在单位时间，单位质量的物体所产生的热量。

引入物理量：

热流密度： $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,y,z,t)$, 单位$J/m^2\cdot s$,

——表示在单位时间，流经与$\mathbf{q}$ 垂直的单位面积的热量为 $|\mathbf{q}|$，方向同热流方向一致。

三、方程推导

1.热传导过程分析：

物体的温度分布和变化的原因是物体内各部分温度不同，引起热量的传递，此传递过程遵循能量守恒定律。

2.能量守恒定律：

物体内部热量的增量，等于通过物体的边界流入的热量与物体内部热源产生的热量总和。

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{热　量}\\ t=t_2\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{热　量}\\ t=t_1\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{通过物体边界流入}\\ \text{热量}\ \ t_1\le t\le t_2\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{热源生成的热量}\\ t_1\le t\le t_2\end{array}}$$

3.各量计算：

我们考虑Ω中的任一小块物体D，其边界为∂D，在任一小段时间$[t_1, t_2]$内，各量计算公式。

①热量计算：

比热为常数c, 质量为m, 温度为T 的物体的热量计算公式$Q = cmT$

对于非常值温度在 t 时刻有：$Q = \iiint\limits_D cu(x, y, z, t)\rho dv$

②热源产生热量计算：

由热源强度定义，质量为m 的物体在$[t_1, t_2]$时间内放出热量为 $f_0 m(t_2 - t_1)$

对于一般情形有： $$Q = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint\limits_D f_0(x, y, z, t)\rho dv \right] dt$$

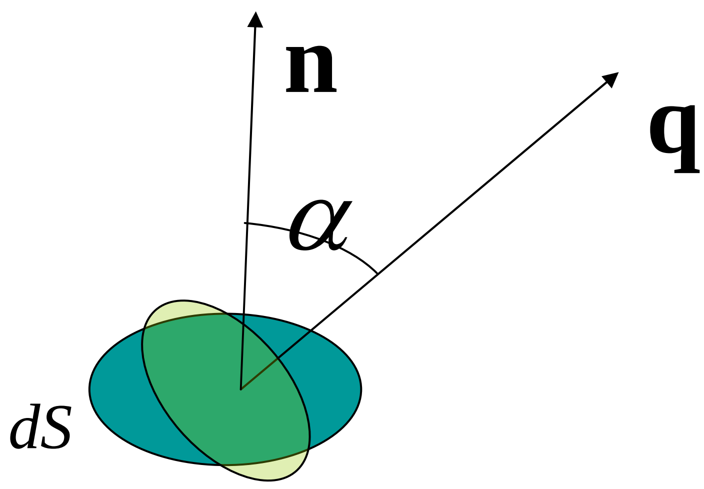
③流经 D 边界 ∂D 的热量计算：

如图，对于小块曲面 dS 在小段时间 Δt 内，假设热流密度及曲面单位法向分别为 $\mathbf{q}$ 及 $\mathbf{n}$，二向量的夹角为 α。

小块曲面与 $\mathbf{q}$ 垂直的实际有效面积为 $dS\cos(\mathbf{n},\mathbf{q})$

由热流密度定义，在 Δt 时间内，通过 dS 流入 $\mathbf{n}$ 所指一侧的热量为：

$$Q = dS\cos(\mathbf{n},\mathbf{q}) \cdot |\mathbf{q}| \cdot \Delta t$$



将小块曲面及小段时间进行叠加可得：在 $[t_1,t_2]$ 时间内，通过 ∂D 流出 D 的热量为

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_{\partial D}\cos(\mathbf{n},\mathbf{q}) \cdot |\mathbf{q}|\, dS\right)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_{\partial D}\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\, dS\right)dt,$$

4.建立方程

对小块物体 D 在小段时间 $[t_1, t_2]$ 内利用热平衡方程可得：

$$\iiint_D cu(x,y,z,t_2)\rho dv - \iiint_D cu(x,y,z,t_1)\rho dv$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_{\partial D} \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} dS\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_D f_0(x,y,z,t)\rho dv\right]dt,$$

利用Fourier定律：在一定条件下，热流向量与温度梯度成正比，而方向相反，即：

$$\mathbf{q} = -k\nabla u(x,y,z,t),$$

这里 k 为导热系数，一表示热流方向是从温度高处向温度低处流。

因此

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = -k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial \mathbf{n}}.$$

于是得到：

$$\iiint\limits_{D} c(u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1))\rho dxdydz$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iint\limits_{\partial D} k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_{D} f_0(x,y,z,t)\rho dv\right]dt,$$

当 u 有关于 x,y,z 连续二阶导数时，利用Gauss公式：

$$\iint\limits_{\partial D} k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS=\iint\limits_{\partial D} k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\mathbf{n},\mathbf{i})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\mathbf{n},\mathbf{j})+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\mathbf{n},\mathbf{k})\right)dS$$

$$=\iiint\limits_{D}\nabla\cdot(k\nabla u)dxdydz,$$

可以得到：

$$\iiint_D c(u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1))\rho dxdydz$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_D \nabla\cdot(k\nabla u)dxdydz\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_D f_0(x,y,z,t)\rho dxdydz\right]dt$$

进一步，当 u 有关于 t 有连续一阶导数时，可得：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_D \frac{\partial\left[c\rho u(x,y,z,t)\right]}{\partial t}dxdydz\right)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_D \left(\nabla\cdot(k\nabla u)+f_0(x,y,z,t)\rho\right)dxdydz\right)dt,$$

由 D 及 t_1,t_2 的任意性知：

$$\frac{\partial\left[c\rho u(x,y,z,t)\right]}{\partial t}=\nabla\cdot(k\nabla u)+f_0(x,y,z,t)\rho,$$

整理得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\Delta u + \frac{1}{c} f_0(x, y, z, t),$$

令$a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$,　　$f(x, y, z, t) = \dfrac{1}{c} f_0(x, y, z, t),$

则方程可化为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \ t > 0.$$

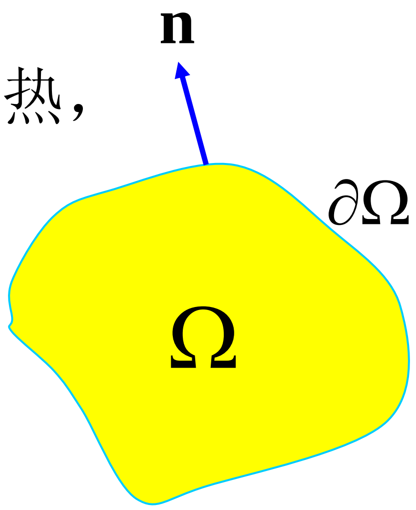
称此方程为 热传导方程。

总结： 热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u = f,\quad x\in\Omega,\quad t>0,$$

其中 $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$, $f=\dfrac{1}{c}f_0$, u 为温度，

$$\left\{\begin{array}{l}\rho\ \text{是物体的密度，}\ k\ \text{热传导系数，}\ c\ \text{是比热，}\\ f_0\ \text{是热源的强度，}\rho\text{、}k\ \text{和}\ c\ \text{是正数，}\\ f_0>0\ \text{为放热热源，}\ f_0<0\ \text{为吸热热源。}\end{array}\right.$$



热流向量为： $\mathbf{q}=-k\nabla u,$

通过边界 $\partial\Omega$ 流出 Ω 的热量流密度为 $\mathbf{q}\bullet\mathbf{n}=-k\nabla u\bullet\mathbf{n}=-k\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}},$

这里 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。（单位时间，单位面积）。

四、定解条件

1.初始条件：

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\overline{\Omega},$$

2.边界条件：

a.第一类边界条件：已知边界温度分布

$$u(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in\partial\Omega}=g(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in\partial\Omega,t\geq 0.$$

b.第二类边界条件：已知边界热流密度的法向分量

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial\mathbf{n}}=g(x,y,z,t),\qquad (x,y,z)\in\partial\Omega,t\geq 0.$$

b.第三类边界条件：已知边界有热交换

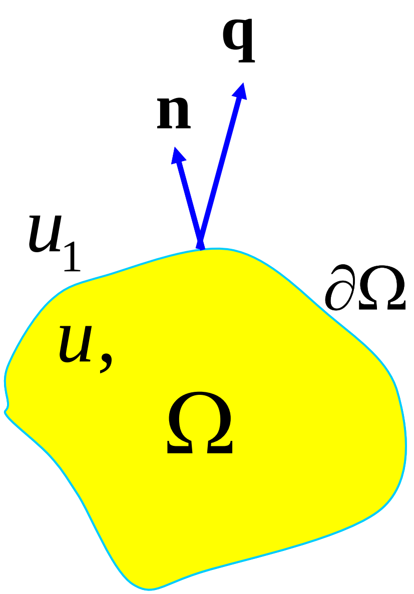
$$\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}+\alpha u\right)\bigg|_{(x,y,z)\in\partial\Omega}=g(x,y,z,t),\quad (x,y,z)\in\partial\Omega,t\geq 0.$$

热交换定律： （在一定的条件下）在界面处沿法线方向的热流量与界面处的温度差成正比：

设在 $\partial\Omega$ 处的外界的温度为 u_1, Ω 的温度为 u,（如图所示）

沿 $\partial\Omega$ 流出的热量为：

$$\mathbf{q}\bullet\mathbf{n} = -k\nabla u\bullet\mathbf{n} = -k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$



所以，

$$\mathbf{q}\bullet\mathbf{n} = \alpha(u - u_1),$$

其中比例系数 $\alpha > 0$, 称为热交换系数。

注意当 $u > u_1$ 时流出的热量为正。 于是，

$$-k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(u - u_1)。$$

热传导方程的混合问题：

热传导方程的第一边值(Dirchlet)问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \Omega, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & (x,y,z) \in \overline{\Omega}, \\ u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t \geq 0. \end{cases}$$

热传导方程的第二边值(Neumann)问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\Omega, t>0, \\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}=g(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\partial\Omega, t\geq 0. \end{cases}$$

这里n为$\partial\Omega$的单位外法向。

热传导方程的第三边值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \Omega, t > 0, \\
u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & (x,y,z) \in \overline{\Omega}, \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right)(x,y,z,t) = g(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \partial\Omega, t \geq 0.
\end{cases}
$$

这里 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向。

热传导方程的初值问题(Cauchy问题)：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t), \qquad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

平衡状态问题：

当物体热流处于平衡状态时，物体的温度不再随时间变化，此时，温度满足：

$$-a^2 \Delta u(x,y,z) = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Omega.$$

该方程称为Poisson方程

五、一维、二维热传导方程

1.细杆的热传导问题：

如果物体可看成一根细杆，它的侧表面绝热，与周围介质的热交换只在杆的两端进行；如果在任意一个与杆的轴线垂直的截面上，初始温度和热源强度变化很小，那么我们可以近似地认为杆上的温度分布只依赖于截面的位置，因此，如果杆的轴线为 x 轴，则方程可改写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\quad 0<x<l,t>0.$$

2.中心对称球的热传导问题：

考虑一半径为 R 的球体，它通过表面与周围介质有热交换。如果在球面上所有点所受周围介质的影响都相同，且球内任意一点的初始温度和热源强度只依赖于它到球心的距离而与它的方位无关，则方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=f(r,t),\quad 0<r<R,t>0,\ r=|x|。$$

3.二维轴对称问题的热传导方程：

考虑一高度为 H，半径为 R 的圆柱形物体。引入柱坐标系，取柱体的轴线为 z 轴，下底落在 $z=0$ 平面上，假设在柱体的侧表面和上、下底上给出的边界条件只分别依赖于 z 和 r (点到轴线的距离)，且柱体初始温度和内部热源也只是 r, z 的函数，这样，在柱体内温度 $u=u(r,z,t)$ 适合以下方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(r,z,t),\quad 0<r<R, 0<z<H, t>0.$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

本节练习

- Page 29：6，7，9。

§2　变分原理

一、 概念与记号:

1.函数空间:

$$C[a,b] =\left\{ f(x) \middle| f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\right\}$$

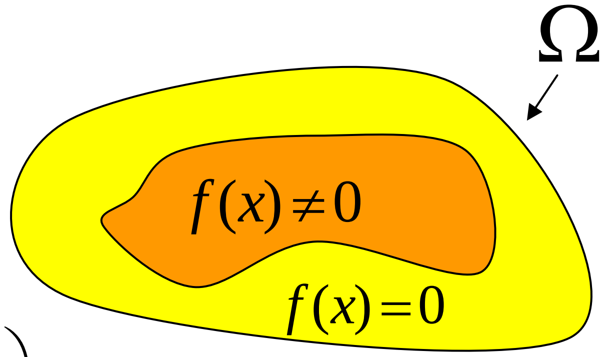
$$C^k[a,b]=\left\{ f(x) \middle| f(x),\ f'(x),\cdots,\ f^k(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\right\}$$

$$C^\infty(\Omega)=\left\{ f(x) \middle| f(x)\text{在}\Omega\text{上有任意阶连续偏导数}\right\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) =\left\{ f(x) \middle| \begin{array}{l} f(x)\in C^\infty(\Omega),\text{且集合}A=\left\{x \middle| f(x)\neq 0\right\}\text{有} \\ \text{界，}A\text{到}\Omega\text{边界的距离：}\mathrm{dist}(A,\partial\Omega)>0 \end{array}\right\}$$

其中，$x=(x_1,x_{2,}\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathbf{R}^n$, Ω为$\mathbf{R}^n$中的开集。

$f(x) \in C_0^\infty(\Omega) \Leftrightarrow C^\infty(\Omega)$且 $\overline{\{f(x) \neq 0\}}$ 是Ω 中的有界闭集。

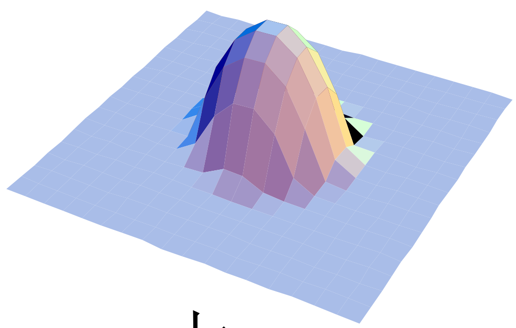


$C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ 函数实例：

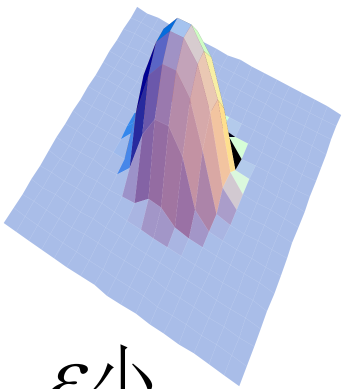
$$\rho_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} k_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - (x^2 + y^2)} \right), & x^2 + y^2 < \varepsilon^2, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2. \end{cases}$$

其中 k_ε 为常数，满足：

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \rho_\varepsilon(x, y)\, dx\, dy = 1.$$



ε大



ε小

2.泛函：

函数集合到实数集的映射称为泛函。例如：

$$J(v)=\iint_{\Omega}\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}\,dxdy,\ v\in C^1(\overline{\Omega})$$

是定义在 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的泛函。

3.变分问题：

某一特定泛函在其定义域上的极值问题称为变分问题。

例如：

$$\begin{cases}\text{求 } u\in C^1(\overline{\Omega})\text{，使得} \\ J(u)=\min\limits_{v\in C^1(\overline{\Omega})} J(v)\end{cases}$$

下面考虑一个数学分析的基本问题：

设 $f(x)$ 是Ω上的连续函数，要找函数集合X，满足：

1. X 尽可能小；
2. X 中函数的性质尽可能好，

使得，如果

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = 0, \text{ 对}\forall \varphi(x,y) \in X \text{成立},$$

则，$f(x,y) \equiv 0$ 于Ω。

常用的一种选择是 $X = C_0^{\infty}(\Omega)$。

因此，$C_0^{\infty}(\Omega)$也称为 试验函数空间。

二、 基本引理：

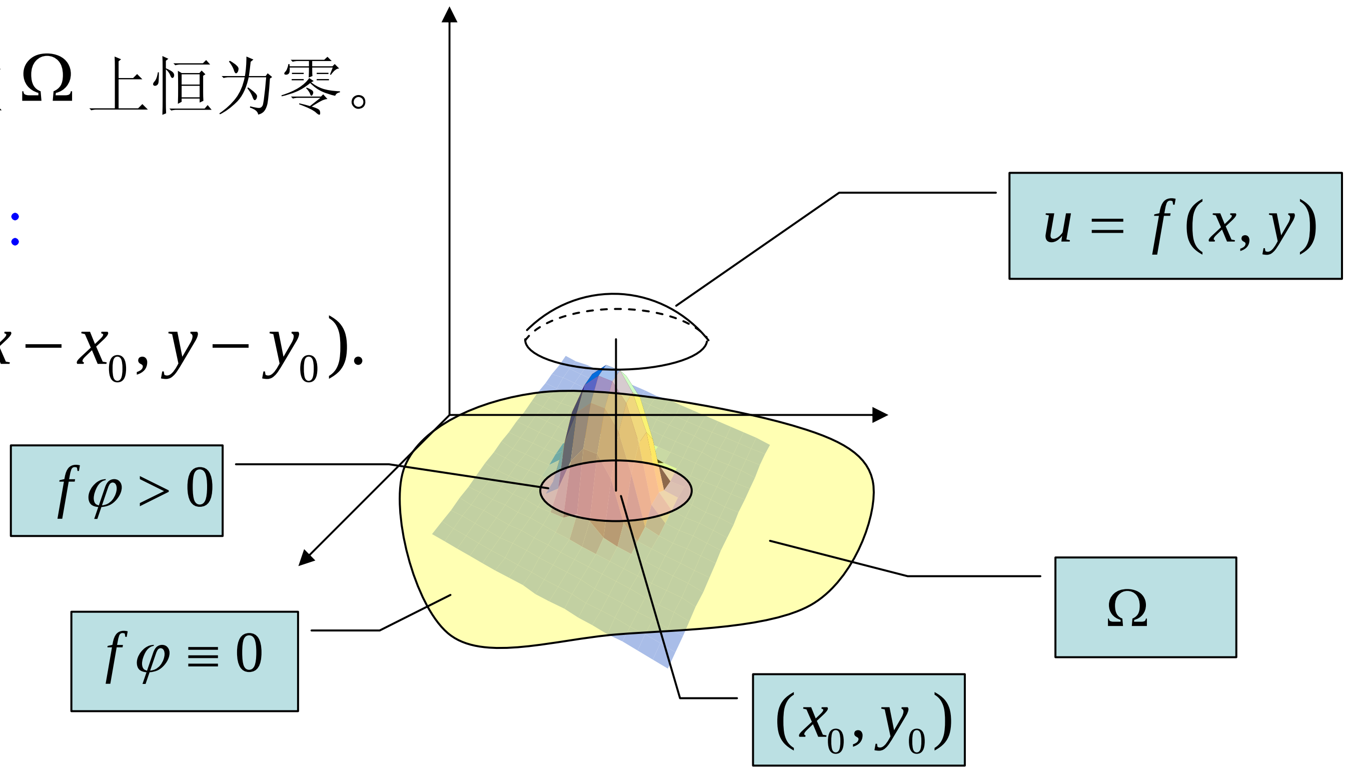
引理2.1　设Ω 为 $\mathbf{R}^2$ 中有界区域，$f(x,y)$在 Ω 上连续，如果对于任意的 $\varphi(x,y)\in C_0^\infty(\Omega)$ 有：

$$\iint_\Omega f(x,y)\varphi(x,y)dxdy=0,$$

则 $f(x,y)$ 在 Ω 上恒为零。

证明图示：

$$\varphi(x,y)=\rho_\varepsilon(x-x_0,y-y_0).$$



Green公式：设 Ω 为 $\mathbf{R}^2$ 中有界区域，$\partial\Omega$ 分片光滑，如果 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 Ω 上有连续一阶导数，则有：

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial\Omega}\{P(x,y),Q(x,y)\}\cdot\mathbf{n}ds$$

对于高维情形, $\mathrm{R}^{\mathbf{m}}$ 中类似有：

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)dx=\int_{\partial\Omega}\left\{u_1,u_2,\cdots,u_m\right\}\cdot\mathbf{n}dS$$

一般地，有分部积分公式：

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx=-\int_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\partial\Omega}uv\mathbf{n}_i dS$$

这里，$\mathbf{n}=(n_1,n_2,...,n_m)$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

§2.1　极小曲面问题

一、问题：

考虑平面上有界区域 Ω，在边界$\partial\Omega$ 上给定一条空间曲线 l

$$l:\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad (0 \le s \le s_0), \\ u = \varphi(s), \end{cases} \qquad \partial\Omega:\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad (0 \le s \le s_0), \\ u = 0 \quad , \end{cases}$$

求一张定义在 Ω 上的曲面 S，使得：

1. S 以 l 为周界；
2. S 的表面积最小。

二、问题的另一种提法：

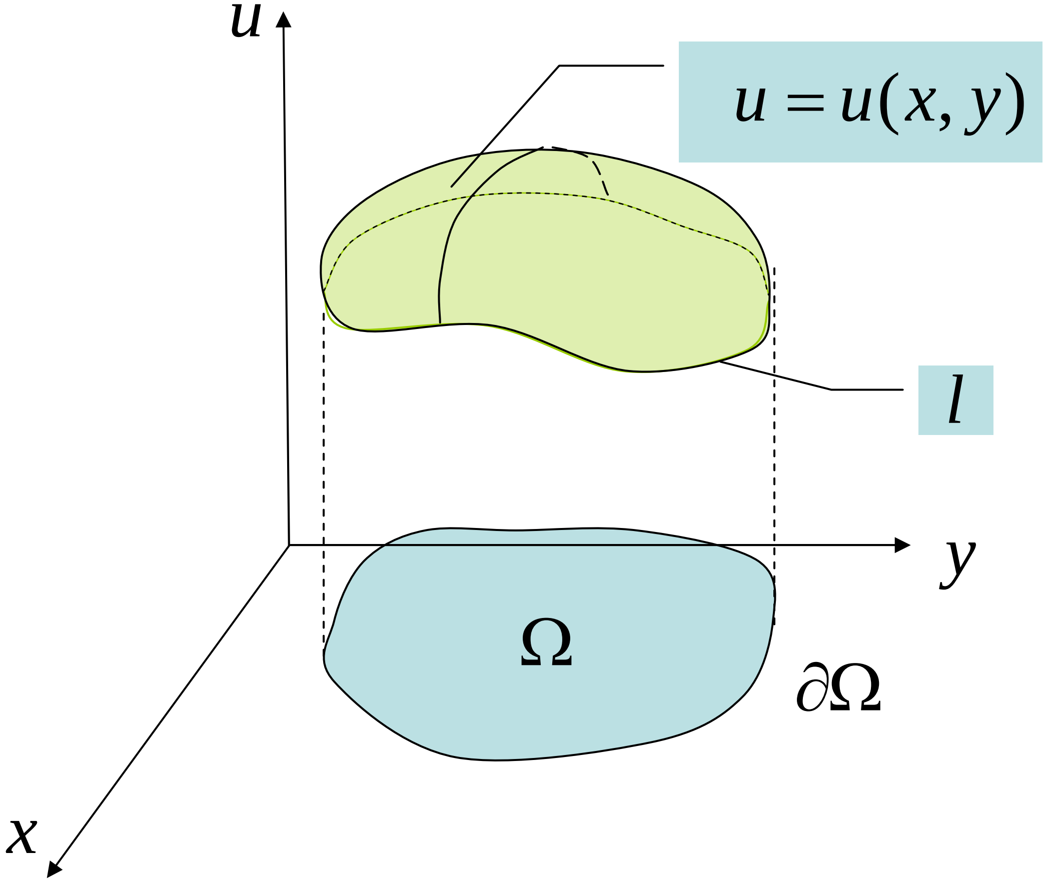
在所有定义在 Ω 上并以 l 为周界的曲面中，求一曲面 S ，使得它的表面积最小。

三、问题的变分提法：

给定平面区域 Ω 及 $\partial\Omega$ 上的空间曲线 l，在定义在 $\overline{\Omega}$ 上且以 l 为周界的曲面集合 M_φ

中求曲面 $u = u(x, y)$，使得

它的表面积最小。



由于 M_φ 有以下表示：

$$M_\varphi = \left\{ w \in C^1(\overline{\Omega}) \middle| w(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \partial\Omega \right\}$$

定义在 $\overline{\Omega}$ 上的曲面 $u = u(x,y)$ 面积计算公式为：

$$J(w) = \iint_\Omega \sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}\, dxdy$$

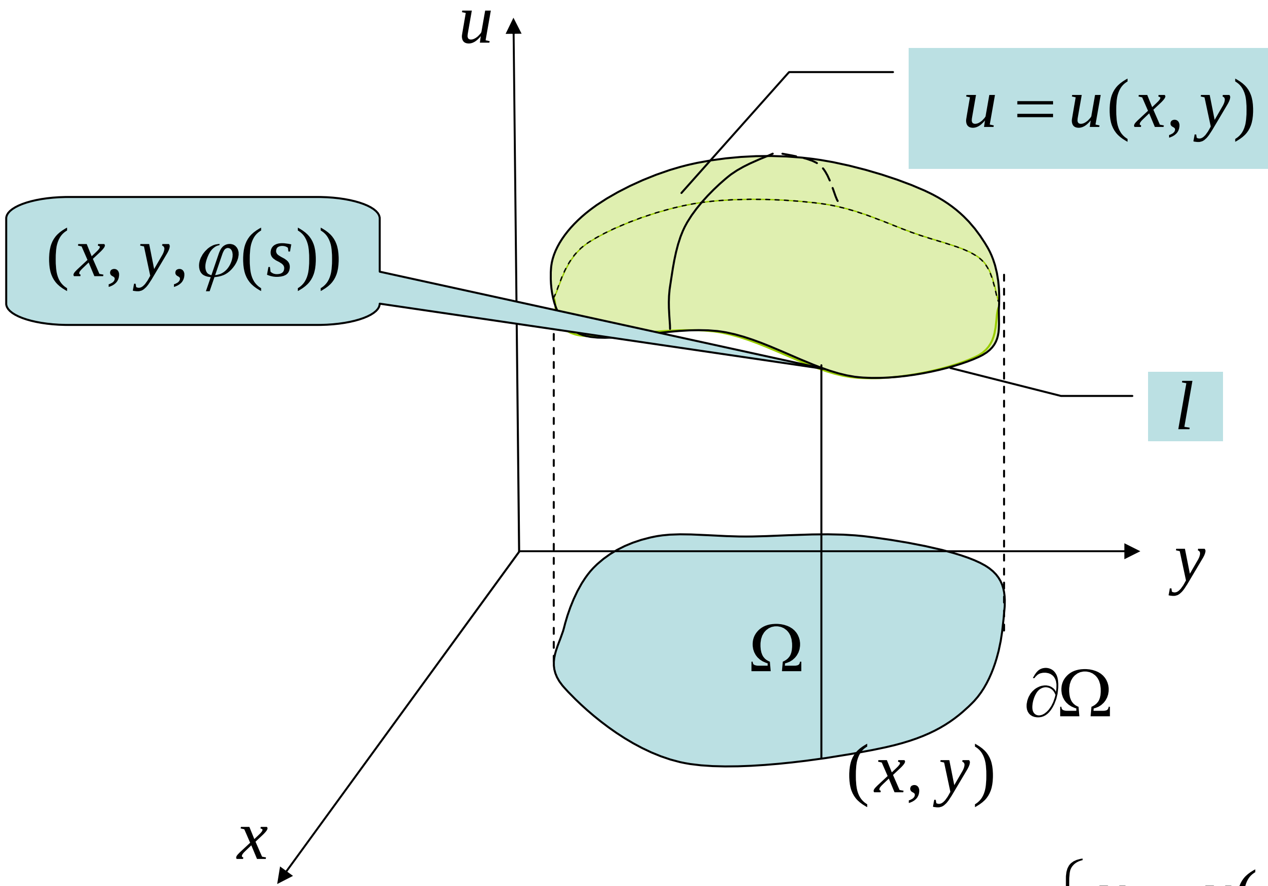
因此，极小曲面问题转化为：

求 $u = u(x,y) \in M_\varphi$，使得 $\quad J(u) = \min_{w \in M_\varphi} J(w)$

这里 $\varphi(x,y)$ 是按以下方式定义：

给定 $(x,y) \in \partial\Omega$ ⇒ 由 $\partial\Omega$ 参数方程确定参数 s

⇒ 得到 l 上的点 $(x, y, \varphi(x,y))$



$$\partial\Omega : \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} (0 \le s \le s_0),$$

四、变分问题的**Euler方程**（极值必要条件）：

Step1. 问题转化：

设 u 为问题之解

令 $M_0=\left\{v\in C^1(\overline{\Omega})\,\middle|\,v(x,y)=0,(x,y)\in\partial\Omega\right\}$

则对于任意的 $v\in M_0$ 及任意的 $\varepsilon\in\mathbf{R}$ 有：

$$w=u+\varepsilon v\in M_\varphi$$

对于$v\in M_0$作函数 $j(\varepsilon),\varepsilon\in\mathbf{R}$

$$j(\varepsilon)=J(u+\varepsilon v)=\iint_\Omega\sqrt{1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2}\,dxdy$$

则函数 $j(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 时取得最小，因此，当$\varepsilon=0$时有：

$$j'(0)=0.$$

Step2.　计算、导出积分形式的必要条件：

由于：

$$j'(\varepsilon)=\iint_{\Omega}\frac{(u_x+\varepsilon v_x)v_x+(u_y+\varepsilon v_y)v_y}{\sqrt{1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2}}dxdy$$

于是：

$$j'(0)=\iint_{\Omega}\frac{(u_x+\varepsilon v_x)v_x+(u_y+\varepsilon v_y)v_y}{\sqrt{1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2}}\Bigg|_{\varepsilon=0}dxdy$$

$$=\iint_{\Omega}\frac{u_x v_x+u_y v_y}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_y)^2}}dxdy=0,\qquad \forall v\in M_0$$

Step3.　导出**Euler**方程（即，必要条件）：

若 $u\in C^2(\Omega)$，则由Green公式得：

$$\iint_\Omega \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_y)^2}}dxdy$$

$$= -\iint_\Omega v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)\right]dxdy \quad （*）$$

$$=0,$$

(*)式对于任意的$v\in M_0$成立。

由于$M_0\supset C_0^\infty(\Omega)$，因此，（*）对于 $v\in C_0^\infty(\Omega)$ 也成立，于是得：

$$\iint_{\Omega} v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)\right]dxdy=0,$$

$$\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

由引理引理2.1，从而得到必要条件（假设$u \in C^2(\Omega)$）：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0, \quad (x,y)\in\Omega.$$

该方程称为极小曲面方程，是该变分问题的Euler方程。

总结（必要条件）

设 $u \in C^2(\overline{\Omega})$。则，如果 u 是变分问题

$$J(u) = \min_{w \in M_\varphi} J(w)$$

的解，那么 u 是极小曲面方程的下述定解问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0, \quad (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)=\varphi(x,y), \ (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

Step4. 充分性：

设 $u\in C^1(\overline{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$是上述定解问题的解，

如在证明必要性一样定义 $j(\varepsilon)$,则由极小曲面方程可得

$j'(0)=0$ 且

$$j''(\varepsilon)=\iint_{\Omega}\frac{v_x^2+v_y^2+\left[(u_x+\varepsilon v_x)v_y-(u_y+\varepsilon v_y)v_x\right]^2}{\left[1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2\right]^{3/2}}dxdy\geq 0$$

所以, $j(\varepsilon)\geq j(0)$, 即 $J(u+\varepsilon v)\geq J(u)$， 特别 $J(u-v)\geq J(u)$。

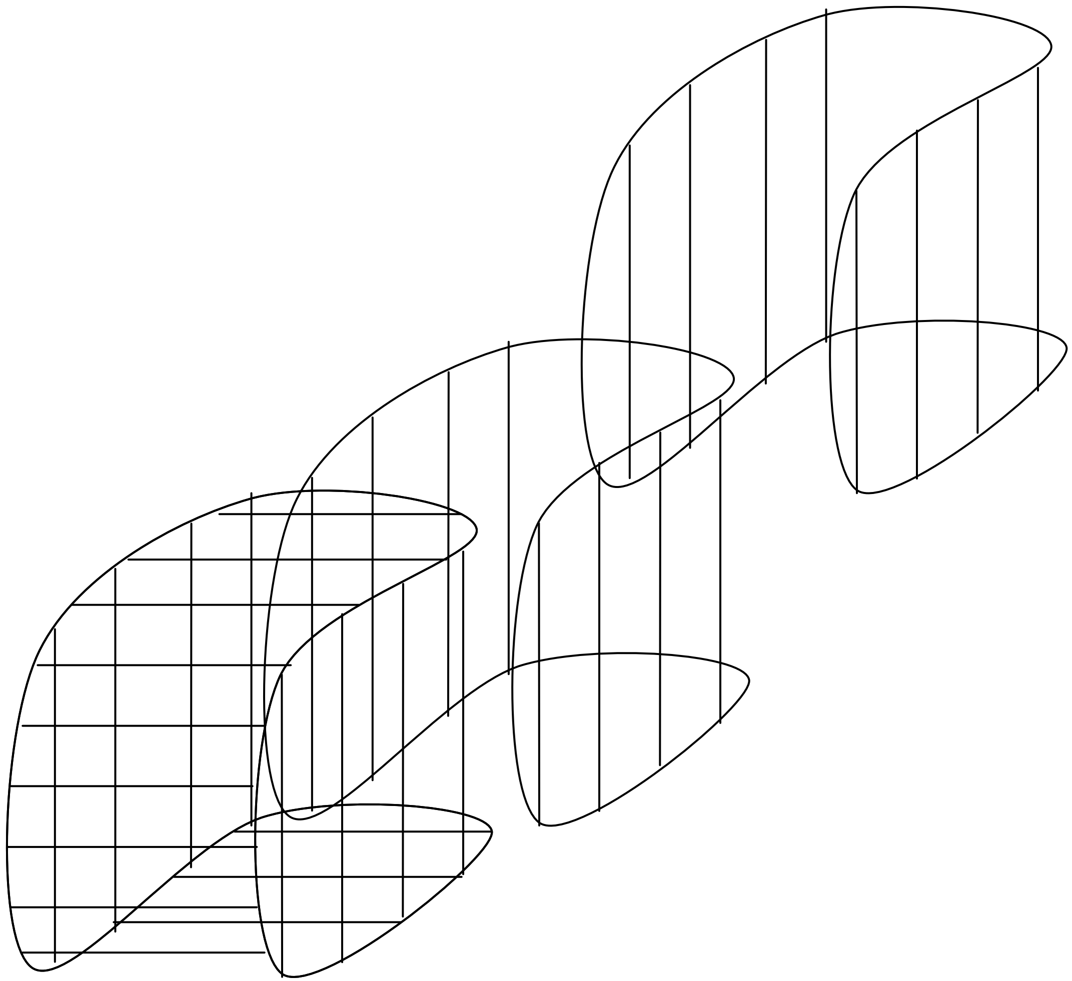
对任意的 $w\in M_{\varphi}$，可取 $v=u-w$, 则 $v\in M_0$,

从而 $J(w)=J(u+v)\geq J(u)$。

于是, $u(x,y)$ 为变分问题之解。

注：极小曲面问题为非线性问题，一般情况下其解不满足唯一性。

示例：



变分问题求解步骤总结：

Step1.问题转化：

设 u 为问题之解， 取集合M_0 满足：

对于任意的 $v \in M_0$ 及任意的 $\varepsilon \in \mathbf{R}$ 有：$u+\varepsilon v \in M_\varphi$

对于$v \in M_0$作函数 $j(\varepsilon)=J(u+\varepsilon v), \varepsilon \in \mathbf{R}.$

Step2.计算、导出积分形式的必要条件：

利用 $j(\varepsilon)$在 $\varepsilon=0$ 时取得最小，求 $j'(\varepsilon)$, 写出 $j'(0)=0.$

Step3.导出Euler方程：

将关于v 的导数通过分部积分或Green公式转移到仅含有u 的关系式上，再应用引理2.1导出方程。

Step4.充分性：上面的方法是反推上去，得 $j'(0)=0$,

再证明 $j''(\varepsilon) \geq 0$。

作　　业

- Page 31, 16 (1),
- Page 32, 17, 18.

§2.2　膜平衡问题

一、问题：

1.问题的物理提法：

考虑一处于紧张状态的**薄膜**，它的部分边界固定在一构架上，而另一部分边界上受到外力的作用；若整个薄膜在垂直于平衡位置的外力的作用下处于平衡状态，问膜的形状如何？

2.问题的数学假设及提法：

a.作坐标系，设膜的水平投影为 xoy 面上的区域 Ω， u 轴垂直于xoy 面并与 x, y 轴构成右手系。

b.膜对应于 $(x, y) \in \Omega$ 点的位移设为$u(x, y)$。

c.区域 Ω 的边界 $\partial\Omega = \gamma \bigcup \Gamma$, 其中 γ 上已知膜的位移为$\varphi(x, y)$.
Γ 上膜的边界受到外力的作用，外力的线密度为 $p(x, y)$.

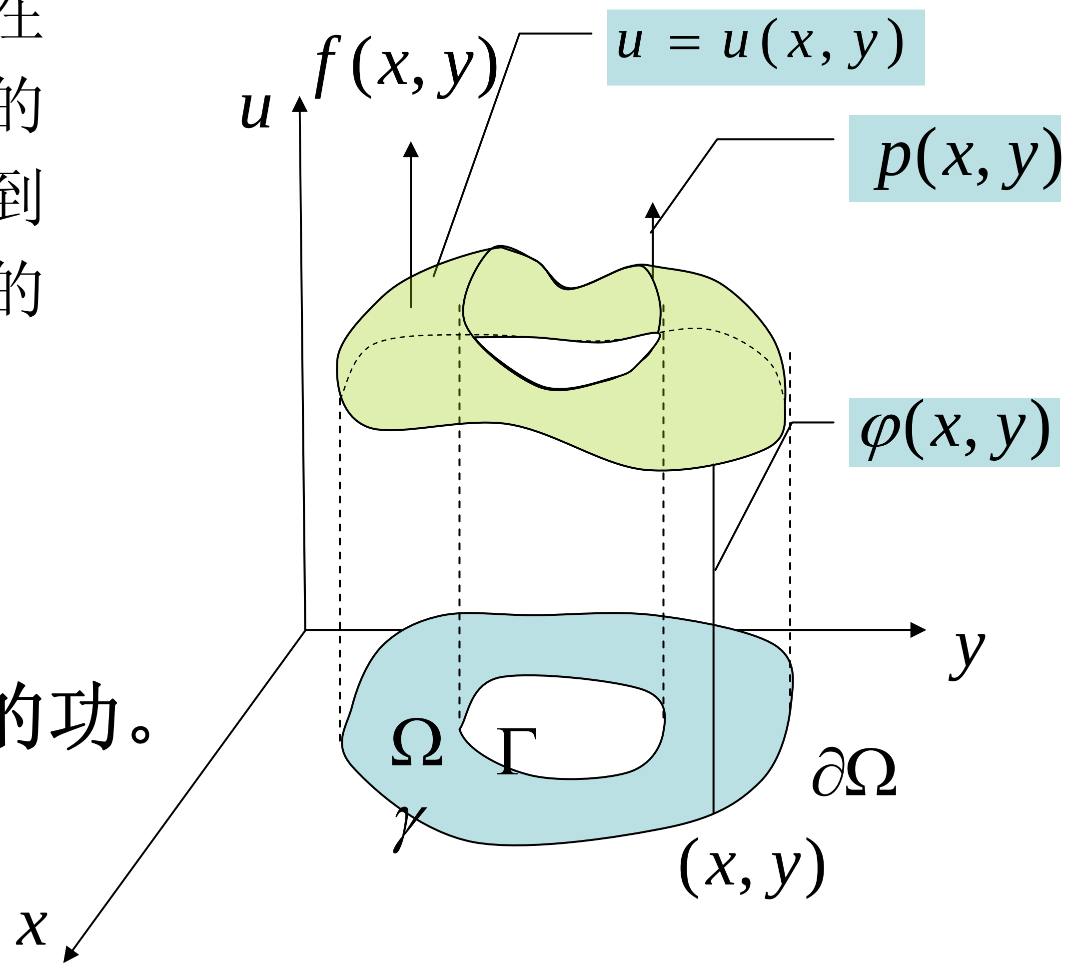
d.膜对应于 $(x, y) \in \Omega$ 点所受的外力面密度设为$f(x, y)$.。

求处于平衡状态下的膜形状 $u = u(x, y)$.

二、推导：

1.膜平衡条件——最小势能原理：

受外力作用的弹性体，在满足已知边界位移约束的一切可能位移中，以达到平衡状态的位移使物体的总势能达到最小。



总势能

＝弹性势能－外力作的功。

2.总势能表达式：

当膜的形状为$u = w(x,y)$时，它所具有的总势能为：

$$J(w) = \frac{T}{2}\iint_{\Omega}(w_x^2 + w_y^2)dxdy - \iint_{\Omega} fwdxdy - \int_{\Gamma} pwds$$

3.已知边界位移约束的一切可能位移条件：

a.满足已知的位移约束，即：$w(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = \varphi(x,y).$

b.总势能表达式有意义：$w \in C^1(\overline{\Omega}).$

由上分析得：已知边界位移约束的一切可能位移为函数集：

$$M_{\varphi} = \left\{ w \in C^1(\overline{\Omega}) \middle| v(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \gamma \right\}.$$

4.问题的变分提法：

求$u \in M_{\varphi}$，使得：$J(u) = \min\limits_{w \in M\varphi} J(w).$

5.变分问题的Euler方程（必要条件）：

Step1.问题转化：

设 u 为问题之解，考虑 M_φ 的任意两解之差所在的集合：

$$M_0=\left\{v\in C^1(\overline{\Omega})\middle| v(x,y)=0,(x,y)\in\gamma\right\},$$

则对于任意的 $v\in M_0$ 及任意的 $\varepsilon\in\mathbf{R}$ 有：$w=u+\varepsilon v\in M_\varphi$,

对于$v\in M_0$作函数 $j(\varepsilon),\varepsilon\in\mathbf{R}$

$$j(\varepsilon)=J(u+\varepsilon v)\quad=\frac{T}{2}\iint_\Omega[(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2]dxdy$$

$$-\iint_\Omega(u+\varepsilon v)fdxdy-\int_\Gamma(u+\varepsilon v)pds,$$

则函数 $j(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 时取得最小值, $j'(0)=0$.

Step2.　计算、导出积分形式的必要条件：

由于：
$$j'(\varepsilon)=T\iint_{\Omega}[(u_x+\varepsilon v_x)v_x+(u_y+\varepsilon v_y)v_y]dxdy$$
$$-\iint_{\Omega}(u+\varepsilon v)fdxdy-\int_{\Gamma}(u+\varepsilon v)pds.$$

于是，由　$j'(0)=0,$

得：
$$T\iint_{\Omega}(u_xv_x+u_yv_y)dxdy-\iint_{\Omega}vfdxdy-\int_{\Gamma}vpds=0,$$
$$\forall v\in M_0\text{。}$$

Step3. 导出Euler方程

设 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ，则由分部积分公式得：

$$T\iint_{\Omega}(u_x v_x + u_y v_y)dxdy - \iint_{\Omega} vfdxdy - \int_{\Gamma} vpds$$
$$= -T\iint_{\Omega}(u_{xx}v + u_{yy}v)dxdy + T\int_{\partial\Omega} v(u_x n_x + u_y n_y)ds$$
$$-\iint_{\Omega} vfdxdy - \int_{\Gamma} vpds$$

其中，$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 为 Ω 在 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。 因此

$$-T\iint_{\Omega} v\left[u_{xx} + u_{yy}\right]dxdy + T\int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds$$
$$-\iint_{\Omega} vfdxdy - \int_{\Gamma} vpds = 0, \qquad \forall\ v \in M_0。 \quad (*)$$

由于 $M_0 \supset C_0^\infty(\Omega)$，因此，（*）对于 $v \in C_0^\infty(\Omega)$ 也成立。

所以

$$-T\iint_\Omega v\left[u_{xx}+u_{yy}\right]dxdy-\iint_\Omega vfdxdy=0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

即

$$\iint_\Omega \left[T(u_{xx}+u_{yy})+f\right]vdxdy=0, \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

从而由引理2.1，得到：

$$-T(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,$$

或：

$$-T\Delta u=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega. \qquad (**)$$

注意，(*)式中的边界积分还没有起作用，返回到(*)式：

$$T\int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds - T\iint_{\Omega} v\Delta u dxdy - \iint_{\Omega} vfdxdy - \int_{\Gamma} vpds = 0, \quad \forall\ v \in M_0。$$

将(**)式代入，得：

$$T\int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds - \int_{\Gamma} vpds = 0, \qquad \forall\ v \in M_0。$$

即

$$\int_{\Gamma} v\left(T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - p(x,y)\right)ds = 0, \qquad \forall\ v \in M_0。$$

由于 M_0 中的函数在 Γ 上的值没有限制，得：

$$T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = p,\ (x,y) \in \Gamma.$$

结合 u 的位移约束条件：$u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma}=\varphi(x,y),$

我们得：若 $u(x,y)$ 变分问题之解且 $u\in C^2(\overline{\Omega}),$ 则：

$$(*)\quad\begin{cases}-T\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma}=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in\gamma,\\ T\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{(x,y)\in\Gamma}=p(x,y),\ (x,y)\in\Gamma.\end{cases}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向。

Step4. 充分性：

我们这里来直接证明 (*) 的解是变分问题的解。

当 $u\in M_\varphi\bigcap C^2(\overline{\Omega})$,满足(*) 时，对任意的 $w\in M_\varphi$ 有：

$$J(w)-J(u)=\frac{T}{2}\iint_\Omega (w_x^2+w_y^2)dxdy-\iint_\Omega fwdxdy-\int_\Gamma pwds$$

$$-\left[\frac{T}{2}\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)dxdy-\iint_\Omega fudxdy-\int_\Gamma puds\right]$$

$$=\frac{T}{2}\iint_\Omega [(w_x-u_x)^2+(w_y-u_y)^2]dxdy-T\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)dxdy$$

$$+T\iint_\Omega [(w_xu_x)+(w_yu_y)]dxdy-\iint_\Omega f(w-u)dxdy-\int_\Gamma p(w-u)ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T}{2}\iint_{\Omega} \left|\nabla(w-u)\right|^2 dxdy + T\iint_{\Omega} [(u_x(w_x-u_x)+u_y(w_y-u_y)]dxdy \\
&\quad - \iint_{\Omega} f(w-u)dxdy - \int_{\Gamma} p(w-u)ds \\
&= \frac{T}{2}\iint_{\Omega} \left|\nabla(w-u)\right|^2 dxdy - T\iint_{\Omega} [(u_{xx}(w-u)+u_{yy}(w-u)]dxdy \\
&\quad + T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(w-u)ds - \iint_{\Omega} f(w-u)dxdy - \int_{\Gamma} p(w-u)ds \\
&= \frac{T}{2}\iint_{\Omega} \left|\nabla(w-u)\right|^2 dxdy - \iint_{\Omega} \left[T\Delta u + f\right](w-u)dxdy \\
&\quad + \iint_{\Gamma} \left[T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - p\right](w-u)dxdy + \int_{\gamma} T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(w-u)ds \\
&= \frac{T}{2}\iint_{\Omega} \left|\nabla(w-u)\right|^2 dxdy \ge 0.
\end{aligned}
$$

所以，$J(w) \ge J(u)$。

结　论

设 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 则

$$J(u) = \min_{w \in M\varphi} J(w). \qquad \Leftrightarrow$$

$$(*)\quad \begin{cases} -T\Delta u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = \varphi(x,y), & (x,y) \in \gamma, \\ T\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = p(x,y), & (x,y) \in \Gamma. \end{cases}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向，$J(u)$ 和 M_φ 在本节定义。

位势方程（或 Poisson 方程）：

$$-\Delta u = f,$$

特别 $\Delta u = 0,$ 称为 Laplace 方程。

Laplace 方程的解称为调和函数。

定解问题(*)是位势方程的一种混合边值问题。

总结：位势方程的导出

①，由波动方程：

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad \xRightarrow{\text{波动停止}} \quad -\Delta u = f,$$

②，由热平衡方程：

$$u_t - \Delta u = f \quad \xRightarrow{\text{温度达到平衡}} \quad -\Delta u = f,$$

③，膜平衡方程： $-\Delta u = f,$

还可通过简化极小曲面方程得出，等等。

位势方程边值问题：

位势方程的第一边值(Dirchlet)问题：

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega, \\ u(x)\big|_{x\in\partial\Omega} = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

位势方程边值问题：

位势方程的第二边值(Neumann)问题：

$$\begin{cases} -\Delta u(x)=f(x), & x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n}=g(x), & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

这里$\mathbf{n}$为$\partial\Omega$的单位外法向。

位势方程边值问题：

位势方程的第三边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega, \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\right|_{x \in \partial\Omega} = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

这里 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向。

作　业

- Page 29, 12.
- Page 30, 13, 14.

§3　定解问题的适定性

一、偏微分方程术语：

1.偏微分方程（PDE）：

关于未知函数　$u = u(x_1, x_2, \cdots x_m), m \geq 2$ 的偏微分方程是指形如：

$$F(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_m}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \cdots, u_{x_mx_m} \cdots) = 0, \quad (*)$$

的方程，其中 $x = (x_1, x_2, \cdots x_m)$ ，F 为 x, u 及 u 的有限个偏导数的已知函数。

2.偏微分方程的阶：

偏微分方程(*)中含有的未知函数导数的最高阶数称为方程(*)的阶。

3.偏微分方程的解：

如果将定义在 Ω 上的函数 $u=u(x)$ 代入方程后，这个方程在 Ω 成为恒等式，则称 u 为方程在 Ω 上的解 。

4.线性偏微分方程：

当 F 关于 u 及其偏导数为线性时，称方程(*)为线性偏微分方程。

例：

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega.$$

$$u_t - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad x \in \Omega, t > 0.$$

$$u_{tt} - a^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad x \in \Omega, t > 0.$$

5.非线性偏微分方程：

不是线性的偏微分方程称为非线性偏微分方程。

例：极小曲面方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0,$$

6.偏微分方程定解问题：

偏微分方程连同它对应的定解条件构成偏微分方程的定解问题。

二、定解问题的适定性：

——— 偏微分方程的最基本问题

1，解的存在性；

2，解的唯一性；

3，解的稳定性。

如果一个定解问题的解是存在的、唯一的和稳定的，则称该定解问题是适定的，也即：在数学上就认为它的提法为正确的。

1. 偏微分方程解的存在性：

例：对于定解问题：
$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = \varphi(x,y), \quad (x,y)\in\gamma, \\ T\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{(x,y)\in\Gamma} = p(x,y), \; (x,y)\in\Gamma. \end{cases}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向，$\partial\Omega=\Gamma\bigcup\gamma$ 。

若 $u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\Omega\bigcup\gamma)\bigcap C^1(\Omega\bigcup\Gamma)$，且满足上面三个方程，则称 u 是上述定解问题的解。

注：1，方程中出现的 u 及其偏导数要求在 Ω 中连续；

2，边条件中出现的 u 及其偏导数要求从 Ω 中连续到相应边界。

按上述要求定义的解称为古典解（Classical solution）。

降低要求还可以定义：弱解、强解、粘性解等等。

解的存在性依赖于解的定义！

如无特别声明，我们所讲的解都指古典解。

2. 偏微分方程解的唯一性：

定解问题之解在考虑的函数类中是否只有一个。
因此，解的唯一性也依赖于所考虑的函数类。

3. 偏微分方程解的稳定性：

①，直观提法：因为定解数据(如初值、边值及方程的非齐次项等)一般都是通过测量得到，不可能绝对正确，所以人们关心对于定解数据的微小差异，是否会引起解的完全失真？此即稳定性问题。

②，严格的数学定义比较复杂：稳定性是一种连续性，涉及到所考虑的函数空间。

a. 范数概念：

线性空间 设 G 为一个函数集合，如果对于任意两个函数 $f_1, f_2 \in G$ 必有 $a f_1 + b f_2 \in G$ ($\forall a,\ b \in \mathbf{R}$)，则称 G 为线性空间。

线性赋范空间： 如果 G 是线性空间，且对于任意的 $f \in G$ ，都有一个非负的实数 $\|f\|$ 与它对应，且适合：

(1). 若 $f_1, f_2 \in G$ ，则 $\|f_1 + f_2\| \le \|f_1\| + \|f_2\|$; (三角不等式)

(2). 若 $f \in G, a \in \mathbf{R}$ ，则 $\|af\| = |a|\|f\|$; (正齐性)

(3). $\|f\| \ge 0$, 其中等号当且仅当 $f = 0$ 时成立。(正定性)

则称 G 为线性赋范空间，$\|f\|$ 称为 f 的范数或模。

b. 函数间距离：

对于函数集合，如果按照某种方式引入了范数，则对于任意的 f_1, f_2 可用 $\|f_1 - f_2\|$ 的大小来表示它们的接近程度。

d. 稳定性定义：

例：
$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = \varphi(x,y), & (x,y)\in\gamma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = p(x,y), & (x,y)\in\Gamma. \end{cases} \qquad (*)$$

将已知函数组 $\{f,\varphi,p\}$ 看作是某线性赋范空间 G 中的元素，把对应的问题的解 u 看作是另一线性赋范空间 U 中的元素，如果对于任意的 $\{f_i,\varphi_i,p_i\}$ $(i=1,2)$ 以及相应于它们的解 $u_i(i=1,2)$，有： $\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,$

当 $\|\{f_1,\varphi_1,p_1\}-\{f_2,\varphi_2,p_2\}\|_G<\delta$ 时，有 $\|u_1-u_2\|_U<\varepsilon.$

即当 $\{f_1,\varphi_1,p_1\}$ 在 G 中趋向于 $\{f_2,\varphi_2,p_2\}$ 时，u_1 在 U 中趋向于 u_2 则称问题(*)对于边值及非齐次项是连续依赖的。

作 业

- Page 30, 15 (1) b), (2), (3).

- 注:

  1，齐次边界条件：……;

  2，边界条件齐次化：……;

  3，齐次方程：……;

  4，方程齐次化：……。

第二章　波动方程

§1.一阶线性方程的特征线解法

本节讨论一类最简单的偏微分方程求解法。

一、问题

求解一阶线性方程Cauchy问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,t)u=f(x,t), x\in\mathbf{R}, t>0, \\ \quad u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in\mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

注意：这里 u_t 的系数为1。

二、解法（特征线性）

1. 思路（化为常微分方程）：

对于函数 $u=u(x,t)$，当取 $x=s(t)$ 时，有 $u=u(s(t),t)$，

关于 t 求导得：

$$\frac{du(s(t),t)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}s'(t)$$

若取 $s(t)$ 满足：$s'(t)=a(s(t),t)$，则方程化为：

$$\frac{du(s(t),t)}{dt}+b(s(t),t)u(s(t),t)=f(s(t),t),\ t>0.$$

记 $U(t)=u(s(t),t)$，则方程进一步化为：

$$\frac{dU(t)}{dt}+b(s(t),t)U(t)=f(s(t),t),\ t>0.$$

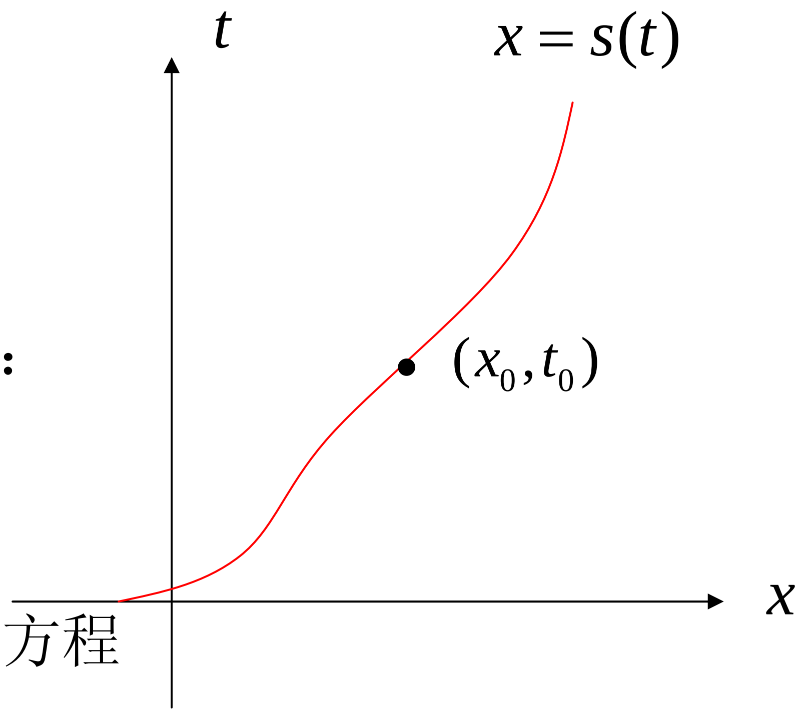
此为一阶线性常微分方程，于是将问题转化为求解一阶常微分方程问题。

图示：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,t)u=f(x,t)$$

对任意一点 (x_0,t_0)，取 $s(t)$ 满足：

$s'(t)=a(s(t),t)$ 且 $s(t_0)=x_0$ 。



则沿曲线 $x=s(t)$, 方程化为：常微分方程

$$\frac{du(s(t),t)}{dt}+b(s(t),t)u(s(t),t)=f(s(t),t)$$

令 $U(t)=u(s(t),t)$, 则 $U'(t)+b(s(t),t)U(t)=f(s(t),t)$ 。

2. 特征线

由以上讨论可知，求解问题(1)的关键在于寻找曲线 $x = s(t)$ ，满足：

$$\frac{dx}{dt} = s'(t) = a(s(t),t) = a(x,t).$$

这一曲线称为**方程(1)的特征线**，更精确地有以下定义：

定义：对于方程(1)，常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,t), \quad t > 0, \\ x(0) = c, \end{cases} \tag{2}$$

之解称为(1)的特征线，(2)的第一个方程称为**特征方程**，其中c为任意常数。

沿特征线简化方程：

记特征线方程(2)所得的特征线为 $x=x(t,c)$， 又记

$$U(t,c)=u(x(t,c),t),$$

则(1)化为：

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t,c)}{dt}+b(x(t,c),t)U(t,c)=f(x(t,c),t),\ t>0, \\ U(0,c)=u(x(0,c),0)=\varphi(x(0,c))=\varphi(c). \end{cases} \tag{3}$$

求解(3)得函数 $U(t,c)$， 即 $u(x(t,c),t)=U(t,c)$， 为求 $u(x,t)$，只要令 $x(t,c)=x$， 并从此式中解得 $c=c(x,t)$， 将其代入即得。

三、求解步骤

Step1. 作特征方程并求特征线

由方程(1)形式，可得方程的特征方程的初值问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,t), \quad t > 0, \\ x(0) = c. \end{cases}$$

求解得特征线 $x = x(t,c).$

Step2. 沿特征线简化方程并求解

在方程(1)中，令 $x = x(t,c), U(t,c) = u(x(t,c),t)$ 得：

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t,c)}{dt} + b(x(t,c),t)U(t,c) = f(x(t,c),t), t > 0, \\ U(0,c) = \varphi(c). \end{cases}$$

解常微分方程得 $U(t,c).$

Step3.还原变换得解

令 $x(t,c)=x$, 从此式中解得 $c=c(x,t)$, 将其代入即得

$$u(x,t)=U(t,c(t,x))。$$

四、例

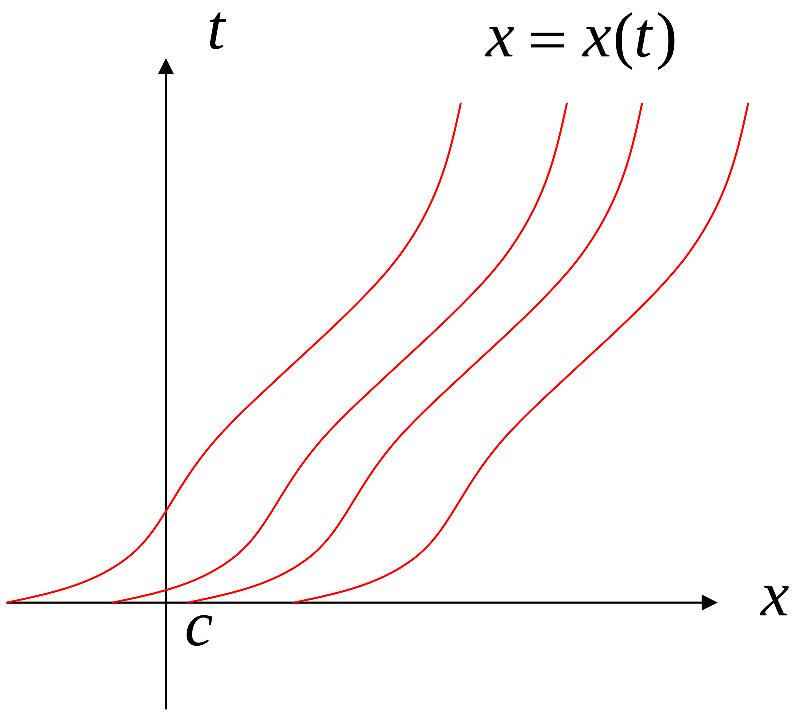
求解下列Cauchy问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(x+t)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x, & x\in\mathbf{R}, t>0, \\ u(x,0)=x, & x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

解： 1，求特征线

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + t, \quad t > 0, \\ x(0) = c. \end{cases}$$

解得 $x(t) = (1+c)e^t - (t+1)$。



2，令 $U(t) = u(x(t), t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} + U(t) = (1+c)e^t - (t+1), \quad t > 0, \\ U(0) = u(x(0), 0) = u(c, 0) = c. \end{cases}$$

解得： $U(t)=\frac{1}{2}(c+1)e^{t}+\frac{1}{2}(c-1)e^{-t}-t.$

3， $u(x(t),t)=U(t)=\frac{1}{2}(c+1)e^{t}+\frac{1}{2}(c-1)e^{-t}-t$

由 $x(t)=(1+c)e^{t}-(t+1)$。

得 $c=[x(t)+t+1]e^{-t}-1,$ 所以，

$$u(x(t),t)=\frac{1}{2}[x(t)+t+1]e^{-2t}-e^{-t}+\frac{1}{2}[x(t)-t+1],$$

即 $u(x,t)=\frac{1}{2}(x+t+1)e^{-2t}-e^{-t}+\frac{1}{2}(x-t+1)$。 □

注1：如果两条不同的特征线相交，则在交点处解的值不能确定。

如图所示：

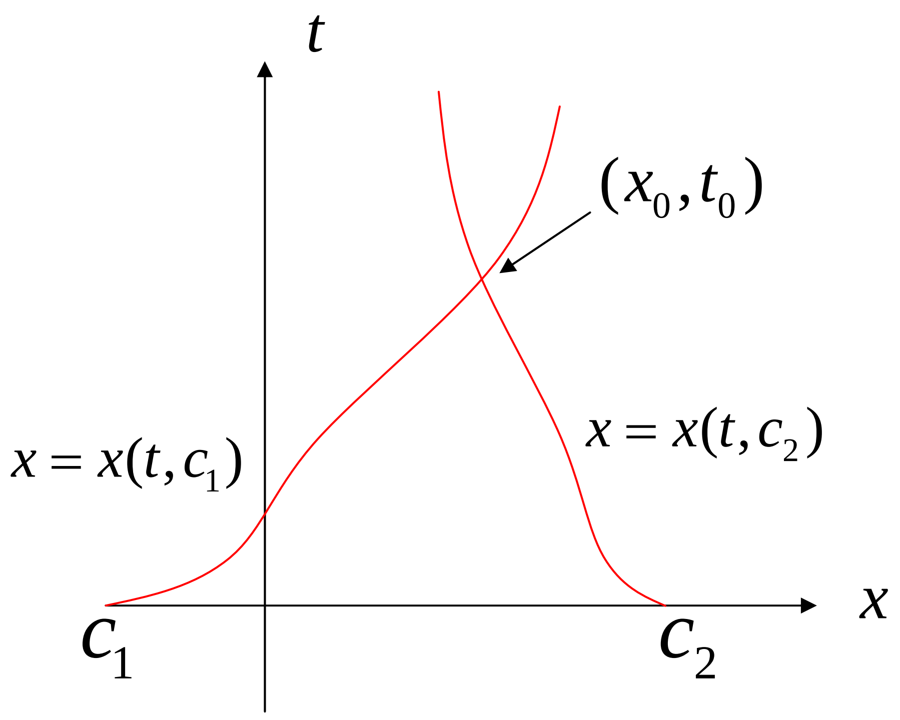
两条特征线 $x = x(t, c_1)$ 与 $x = x(t, c_2)$ 在 (x_0, t_0) 相交，

此时，在该点附近无法由

$$x = x(t, c)$$

解出唯一的

$$c = c(t, x)$$



代入解的表达式得出解在 (x_0, t_0) 的值。

要特征线不相交，需要函数 $a(x, t)$ 满足适当的条件。

注2：特征线法同样可用来求解多维一阶线性PDE的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+bu=f, \quad x\in\mathbf{R}^n,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in\mathbf{R}^n。\end{cases}$$

此时，特征线满足常微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds}=a_i(x,t), \quad i=1,2,\cdots,n. \\ x(0)=\mathbf{C}\in\mathbf{R}^n。\end{cases}$$

其解 $x=x(t,\mathbf{C})$ 就是一簇特征曲线， 沿特征曲线问题化为：

$$\begin{cases} U'(t,\mathbf{C})+b(x(t,\mathbf{C}),t)U(t,\mathbf{C})=f(x(t,\mathbf{C}),t), \quad t>0, \\ U(0,\mathbf{C})=\varphi(\mathbf{C})。\end{cases}$$

其中 $U(t,\mathbf{C})=u(x(t,\mathbf{C}),t)$。

作　业

- Page 108, 3. (2)、(4)。

§2 初值问题（一维情形）

2.1 问题的简化

一、问题

求解一维波动方程的Cauchy

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

简化问题思路：

这是一个线性问题，为了简化求解过程，我们可以利用线性问题叠加原理，将问题分解为三个问题，其中每个问题均有二个齐次方程一个非齐次方程构成，这样问题化为三个相对简单一点的波动方程的Cauchy问题。

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} \Box u_1 = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_{1t}(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{2}
$$

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} \Box u_2 = \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_2(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_{2t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3}
$$

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases} \Box u_3 = \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = f(x,t), \ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_3(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_{3t}(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{4}
$$

由线性问题叠加原理，显然有 $u = u_1 + u_2 + u_3.$

上述三个问题的解之间又有关系：只要求出了u_2就可由u_2的表达式得到u_1 和 u_3 的表达式。

定理2.1 设 $u_2 = M_\psi(x,t)$ 是定解问题(3)的解，则定解问题(2)(4)之解 u_1, u_3 可分别表为：

$$u_1(x,t) = \frac{\partial M_\varphi(x,t)}{\partial t},$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)d\tau,$$ （齐次化原理）

其中 $f_\tau = f(x,\tau)$，并且假定$M_\varphi(x,t)$和$M_{f_\tau}(x,t-\tau)$分别在区域$\{(x,t)\big| x\in\mathbf{R}, t\geq 0\}$ 和 $\{(x,t,\tau)\big| x\in\mathbf{R}, 0\leq\tau\leq t<+\infty\}$上对变量$x,t$和$\tau$充分光滑。

定理2.1的证明：1.先证 $u_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)$ 满足(2).

由定义 $M_\varphi(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases} \Box M_\varphi = \dfrac{\partial^2 M_\varphi}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 M_\varphi}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ M_\varphi(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \\ \left(M_\varphi\right)_t (x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \Box u_1 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)\right] - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 M_\varphi(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 M_\varphi(x,t)}{\partial x^2}\right] = 0, \end{aligned}$$

$$u_1(x,0)=\left[\frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(x,t)\right]\Bigg|_{t=0}=\varphi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 M_\varphi(x,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}=a^2\left.\frac{\partial^2 M_\varphi(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=0}$$

$$=a^2\frac{\partial^2 M_\varphi(x,0)}{\partial x^2}=0.$$

因此 $u_1=\dfrac{\partial}{\partial t}M_\varphi(x,t)$ 满足问题(2)。

2.证 $u_3(x,t)=\int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)d\tau$ 满足(4).

注意到 $M_{f_\tau}(x,t)$ 满足：（$\tau\geq 0$ ）

$$\begin{cases}\square M_{f_\tau}(x,t)=\dfrac{\partial^2 M_{f_\tau}}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 M_{f_\tau}}{\partial x^2}=0,\ x\in\mathbf{R},t>0,\\ M_{f_\tau}(x,0)=0, \qquad x\in\mathbf{R},\\ \left[M_{f_\tau}(x,t)\right]_t\Big|_{t=0}=f_\tau(x)=f(x,\tau), \quad x\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

于是有：

$$u_3(x,t)\Big|_{t=0}=\left[\int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)d\tau\right]\Bigg|_{t=0}=0$$

$$u_{3t}(x,t)\Big|_{t=0}=\left[\Big(M_{f_\tau}(x,t-\tau)\Big)\Big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x,t-\tau)d\tau\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$= \left[M_{f_t}(x,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau \right]\Bigg|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[M_{f_t}(x,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau \right]$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau) \right)\Bigg|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau) \right)\Bigg|_{\tau=t} + \int_0^t a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau) \right)\Bigg|_{\tau=t} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} M_{f_\tau}(x,t-\tau) \right)\Bigg|_{\tau=t} + a^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2},$$

记：$\Phi(x,t,\tau)=M_{f_\tau}(x,t)$,

则：
$$\frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x,t-\tau)=\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t-\tau,\tau)=\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t,\tau)\bigg|_{t=t-\tau}$$

所以，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x,t-\tau)\right)\bigg|_{\tau=t} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t,\tau)\bigg|_{t=t-\tau}\right]\bigg|_{\tau=t} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t,\tau)\bigg|_{t=0}\right]\bigg|_{\tau=t} \\
&= \left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x,t)\right]\bigg|_{t=0}\right\}\bigg|_{\tau=t} \\
&= f_\tau(x)\big|_{\tau=t}=f(x,\tau)\big|_{\tau=t}=f(x,t)
\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2}$$

即，

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)。$$

证毕。

定理**2.1**的进一步理解：

①，

(I) $$\begin{cases} \Box u_1 = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_{1t}(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \Uparrow \qquad\qquad \Downarrow \quad v = \int_0^t u_1 dt$$

$$v = M_\varphi(x,t), \quad \begin{cases} \Box v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ v(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \\ v_t(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

②,

(III) $$\begin{cases} \Box u_3 = \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_3(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ u_{3t}(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

$$\Uparrow \; u_3 = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$v \equiv v(x,t,\tau) = M_{f_\tau}(x, t-\tau), \quad \begin{cases} \Box v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t > \tau \geq 0 \\ v(x,\tau) = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ v_t(x,\tau) = f_\tau(x) = f(x,\tau), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

物理意义：

$$u_3=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} v(x,t,\tau_i)\Delta\tau_i$$

其中，

$$\begin{cases} 0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_{m-1}<\tau_m=t, \\ \Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1}, \qquad \lambda=\max\limits_{i=1,2,\cdots,m}\Delta\tau_i. \end{cases}$$

而 $v_i\equiv v(x,t,\tau_i)\Delta\tau_i$ 是下述问题的解：

$$\begin{cases} \Box v_i=\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}=0, \quad x\in\mathbf{R}, \quad t>\tau_i, \\ v_i(x,\tau_i)=0, \qquad x\in\mathbf{R}, \\ v_{it}(x,\tau_i)=f_{\tau_i}(x)\Delta\tau_i=f(x,\tau_i)\Delta\tau_i, \qquad x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

因此，
$$u_3=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}v_i\ 。$$

不妨设弦的线密度为1，则 $f={f_0}/{\rho}=f_0$ 是外力的线密度，当 $\Delta\tau_i$ 很小时，$f(x,\tau_i)\Delta\tau_i$ 近似于外力 f 在时间段 $[\tau_{i-1},\tau_i]$ 对弦线产生的冲量。也即，外力在时间段 $[\tau_{i-1},\tau_i]$ 对弦线的作用近似于在时刻 τ_i 给弦线一个冲量 $f(x,\tau_i)\Delta\tau_i$，由动量守恒定律，这一冲量使弦线在时刻 τ_i 获得一个大小为 $f(x,\tau_i)\Delta\tau_i$ 的动量，也即弦线在时刻 τ_i 获得一个大小为 $f(x,\tau_i)\Delta\tau_i$ 的速度，由这个速度引起的弦的位移即是 v_i：

$$\begin{cases}\Box v_i=v_{itt}-a^2v_{ixx}=0, & x\in\mathbf{R},\quad t>\tau_i,\\ v_i(x,\tau_i)=0, & x\in\mathbf{R},\\ v_{it}(x,\tau_i)=f_{\tau_i}(x)\Delta\tau_i=f(x,\tau_i)\Delta\tau_i, & x\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

所以，Cauchy问题

$$\begin{cases} \Box u_3 = \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_3(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ u_{3t}(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

的解可以按下述方法得到：

将区间 $[0,t]$ 分为若干个小区间 $[\tau_{i-1},\tau_i]$ $(i = 1,2,\cdots,m)$, 在每个小时段 $[\tau_{i-1},\tau_i]$ 上，外力 f 对弦线的作用近似于在时刻 τ_i 给弦线一个大小为 $f(x,\tau_i)\Delta\tau_i$ 的速度，由这个速度引起的弦线的位移为 v_i，因此外力 f 在 $[0,t]$ 时段上引起的总位移为 $u_3 \approx v_1 + v_2 + \cdots + v_m$，令各小时段的长度趋于零，我们就得出：

$$u_3 = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{m} v_i,$$

这就是我们前面的公式。

附注1、在定理证明过程中，我们没考虑其中各种运算合法性。因此，这一公式只是一种形式上的公式。

偏微分方程的求解过程往往采用这样的步骤：先求形式解，即在求解过程中，不妨先假定所有的运算都是合法的，然后再讨论对定解资料要加些什么条件才能保证所得的形式解确实是真正的解，即具有所需要的连续可微性，并适合方程和定解条件。

附注2： 本定理的结论也适用于高维的波动方程 Cauchy问题。

附注3： 对于热传导方程的Cauchy问题也有类似于本定理的结论。

附注4： 对于带有齐次边界条件的热传导方程和波动方程的定解问题，也有类似于本定理的结论。

附注5： 对于常微分方程的初值问题情形，也有类似于本定理的结论。

（参见 Page 108，1、2）

作　业

- Page 108, 1；2。

解释：……

2.2　解的表达式

一、问题

求解一维波动方程的Cauchy问题：

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

二、求形式解

由上节讨论，我们只须求解以下问题：

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, & (2) \\ u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, & (3) \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. & (4) \end{cases}$$

我们这里介绍两种解法：

解法1：特征线法（这是教材上的解法。）

第一步：将算子 $\Box$ 分解。

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

即，

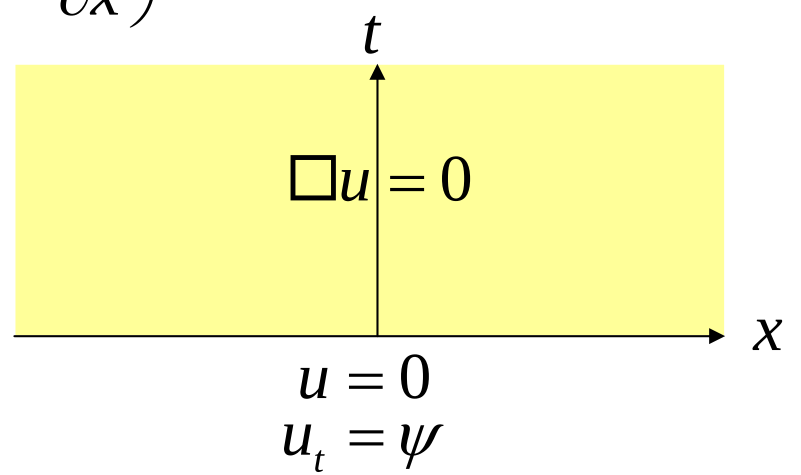
$$\begin{aligned}\Box u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u\end{aligned}$$

注意，这里 a 是常数。

令
$$v=\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}$$

则由方程
$$\Box u\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

得，
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial u}{\partial x}=v,\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial t}+a\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$



这就将一个二阶方程化为两个一阶方程。再由初始条件得：

$$u(x,0)=0,$$

$$v(x,0)=\left[\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}\right]\Bigg|_{t=0}=\psi(x),$$

因此，问题化为求解两个一阶线性方程的Cauchy问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = v, \quad -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0; \\ v(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

因此，可用特征线法先求出v，再求出 u，

就得到所求解的表达式。

解法2：①，先求方程 $\Box u=0$ 的通解。

由课本第31页练习16的结论，方程 $\Box u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

在变换

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\xi+\eta}{2}, \\ t = \dfrac{\eta-\xi}{2a}; \end{cases}$$

下化为 $u_{\xi\eta} = 0$，积分两次得：

$$u = F(\xi) + G(\eta),$$

其中 F 和 G 为 $C^2(\mathbf{R})$ 上的任意函数。于是，

$$u = F(x-at) + G(x+at),$$

总　结

方程 $\Box u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的通解为：

$$u = F(x - at) + G(x + at),$$

其中 F 和 G 为 $C^2(\mathbf{R})$ 上的任意函数。

②，由通解求**Cauchy**问题的解。

$$u(x,t)=F(x-at)+G(x+at),$$

我们只要利用初始条件来确定这两个函数，即可得出问题(2)(3)(4)之解。

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0} &= \left[F(x-at)+G(x+at)\right]\big|_{t=0} \\ &= F(x)+G(x)=0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u_t(x,t)\big|_{t=0} &= \left[-aF'(x-at)+aG'(x+at)\right]\big|_{t=0} \\ &= -aF'(x)+aG'(x)=\psi(x), \end{aligned} \tag{6}$$

(6)对 x 在 $[0,x]$ 积分得：

$$-aF(x)+aG(x)=\int_0^x \psi(s)ds-aF(0)+aG(0), \tag{7}$$

由(5)(7)解得：

$$F(x) = -\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)ds + \frac{F(0)-G(0)}{2},$$

$$G(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)ds - \frac{F(0)-G(0)}{2},$$

于是得：

$$u(x,t) = F(x-at) + G(x+at)$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(s)ds$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(s)ds$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds,$$

即：

$$u_2(x,t)=M_\psi(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds,$$

$$u_1(x,t)=\frac{\partial M_\varphi(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(s)ds\right]$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

$$u_3(x,t)=\int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)d\tau=\int_0^t\left[\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f_\tau(s)ds\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau.$$

因此得问题(1)之解为：

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau. \qquad (8)$$

三、验证

前面所得的解表达式仅仅为问题(1)的形式解， 是我们在不考虑各种运算合理性情况下推得的， 其合法性尚需验证。

定理2.2 若 $\varphi\in C^2(-\infty,\infty)$, $\psi\in C^1(-\infty,\infty)$, $f\in C^1(\overline{Q})$

这里 $Q=\left\{(x,t)\middle|-\infty<x<\infty,\ t>0\right\}$， 则由表达式(8)给出的函数 u 必为 $C^2(\overline{Q})$，且是定解问题(1)之解。

定理证明思路：

1. 计算函数 u 的二阶导数，从而证明函数 u 具有连续的二阶导数。

2. 证明函数 u 满足方程及初始条件。

四、性质

推论 若 φ、ψ、f 为 x 的偶(奇，周期)函数，则由表达式(8)给出的函数 u 也必为 x 的偶(奇，周期)函数。

注意 这里我们只能说表达式(8)给出的函数，而不能说定解问题(1)的解，这是因为我们还不知道问题是否有其它解，一旦证明问题之解为唯一，我们可以说问题之解满足这一性质。

证明：以奇函数为例加以证明。

当 φ、ψ、f 为 x 的奇函数，则

$$u(-x,t)=\frac{\varphi(-x+at)+\varphi(-x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(s)ds$$

$$+\int_0^t\left[\frac{1}{2a}\int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau$$

$$=-\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(-s)ds$$

$$-\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)}f(-s,\tau)ds\right]d\tau.$$

$$
=-\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds
$$

$$
-\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds\right]d\tau
$$

$$
=-u(x,t).
$$

证毕。

作　业

1，Page 109,　4；（提示：作变换 $v=(h-x)\,u$ ）

2，Page 109,　8；（提示：分解为三个一维问题 ）

2.3 依赖区间、决定区域和影响区域

为讨论问题方便起见，我们考虑以下一维波动方程Cauchy问题：

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

求解得：

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

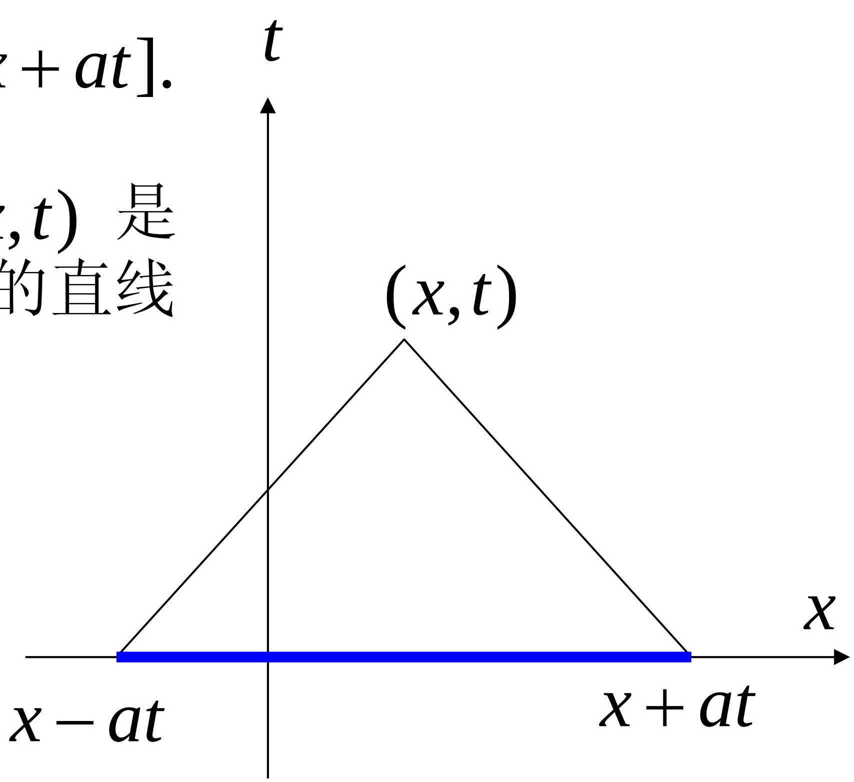
—— D’Alembert 公式。

一、依赖区间

从上述表达式可以看出，对于上半平面内的任一固定点 (x,t) 解在该点的值 $u(x,t)$ 仅由 φ 在 $x-at$ 和 $x+at$ 两点及 ψ 在 $[x-at,x+at]$ 上的值唯一确定，而与其他点上的初始条件无关，我们称 x 轴上的区间 $[x-at,x+at]$ 为点 (x,t) 的依赖区间，记作 $K(x,t)$，即：

$$K(x,t)=[x-at,x+at].$$

从直角坐标系中可以看出 $K(x,t)$ 是过 (x,t) 点分别作斜率为 $\pm\frac{1}{a}$ 的直线与 x 轴相交所截得的区间。

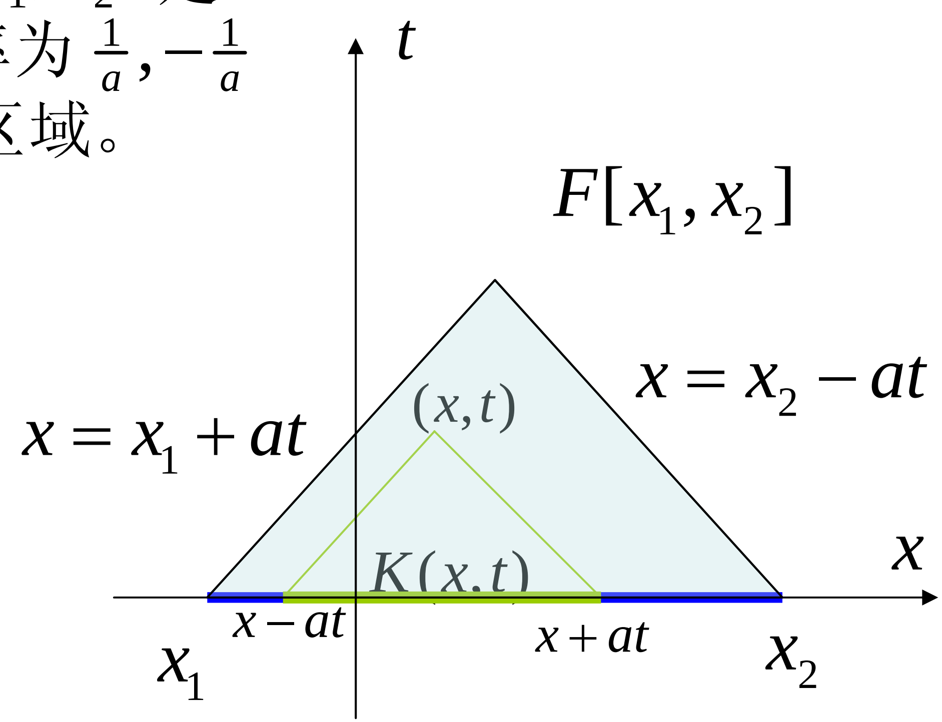


二、决定区域

对于 x 轴上任一区间 $[x_1,x_2]$，我们考虑能由 $[x_1,x_2]$ 上的初值 φ,ψ 唯一确定解值的 (x,t) 取值范围 $F[x_1,x_2]$，称为区间$[x_1,x_2]$的决定区域。 显然有

$$F[x_1,x_2]=\left\{(x,t)\middle|K(x,t)\subset[x_1,x_2]\right\}.$$

从直角坐标系中可以看出$F[x_1,x_2]$是过$(x_1,0),(x_2,0)$点分别作斜率为 $\frac{1}{a},-\frac{1}{a}$ 的直线与 x 轴围成的三角形区域。

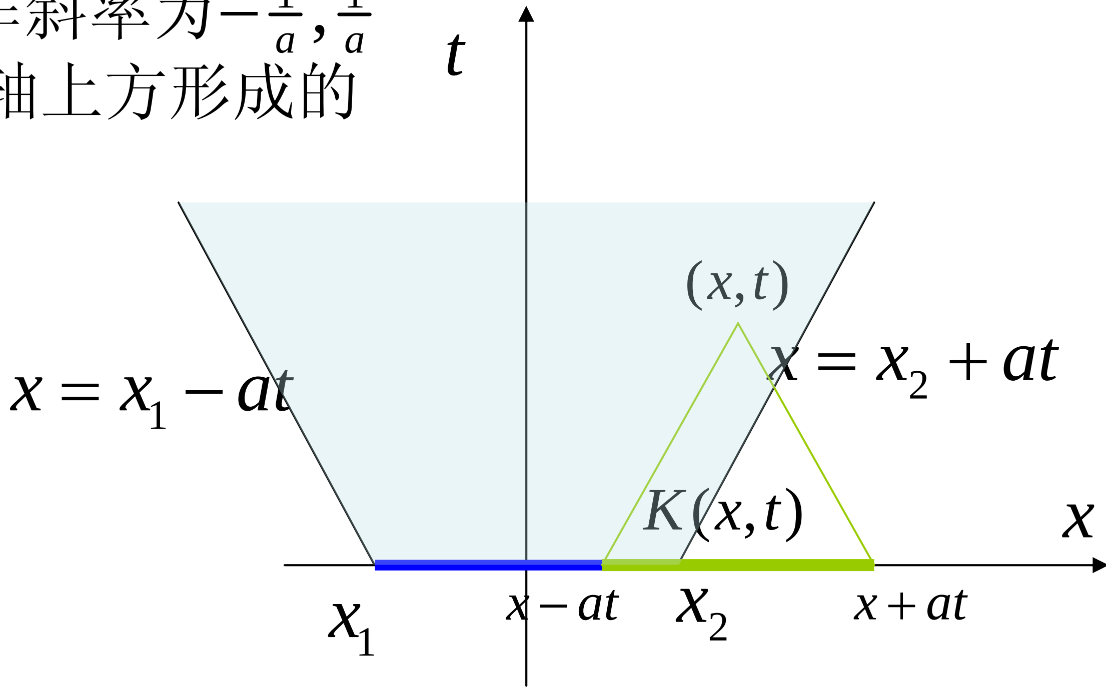


三、影响区域

对于 x 上的任一区间 $[x_1, x_2]$，我们考虑由 $[x_1, x_2]$ 上的初值影响的 (x,t) 取值范围 $E[x_1, x_2]$，称其为区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域。 这时有

$$E[x_1, x_2] = \left\{(x,t) \middle| K(x,t) \cap [x_1, x_2] \neq \varnothing \right\}.$$

从直角坐标系中可以看出 $F[x_1, x_2]$ 是过 $(x_1, 0), (x_2, 0)$ 点分别作斜率为 $-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}$ 的直线与 x 三直线在 x 轴上方形成的区域。

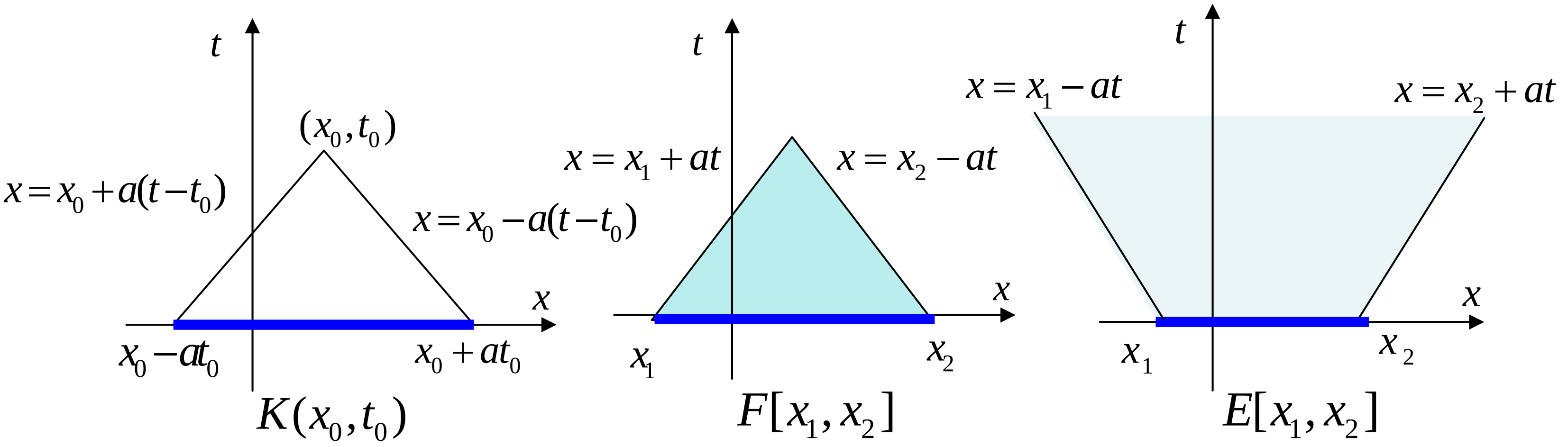


四、特征线

由前面讨论过程，空间和时间构成的平面直角坐标系 xot 中，以 $\pm\frac{1}{a}$ 为斜率的直线 $x=c\pm at$（c 为任意常数）起到了很重要的作用。我们称这类直线为一维波动方程

$$\Box u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ x\in\mathbf{R},\ t>0$$

的特征线。



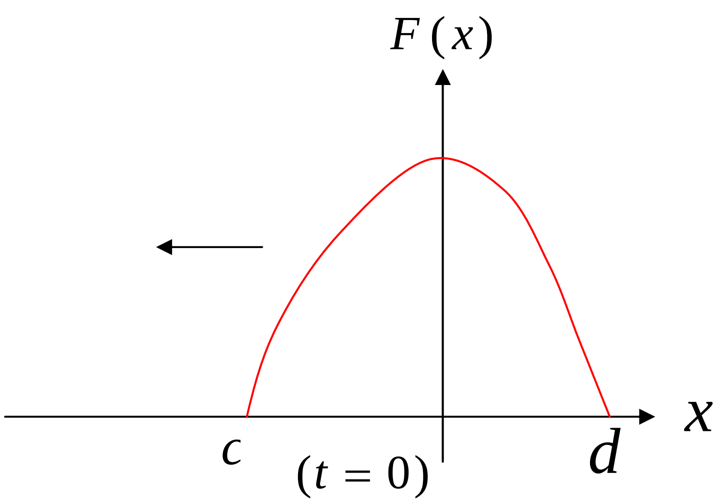
五、波的传播

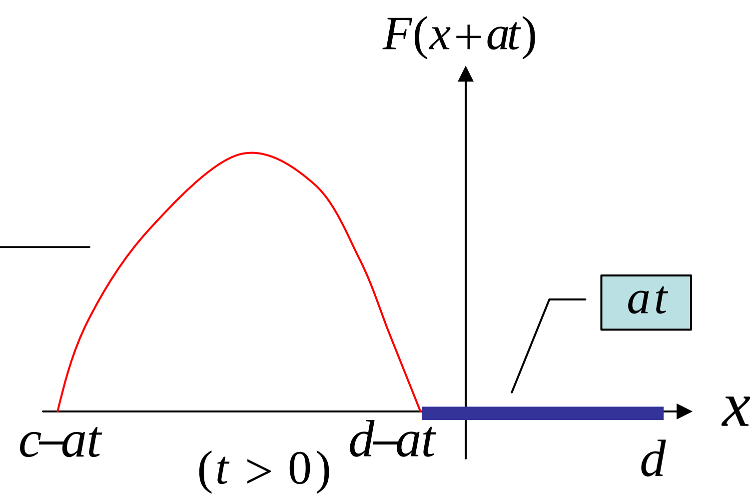
方程 $\square u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 的通解为：

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at)$$

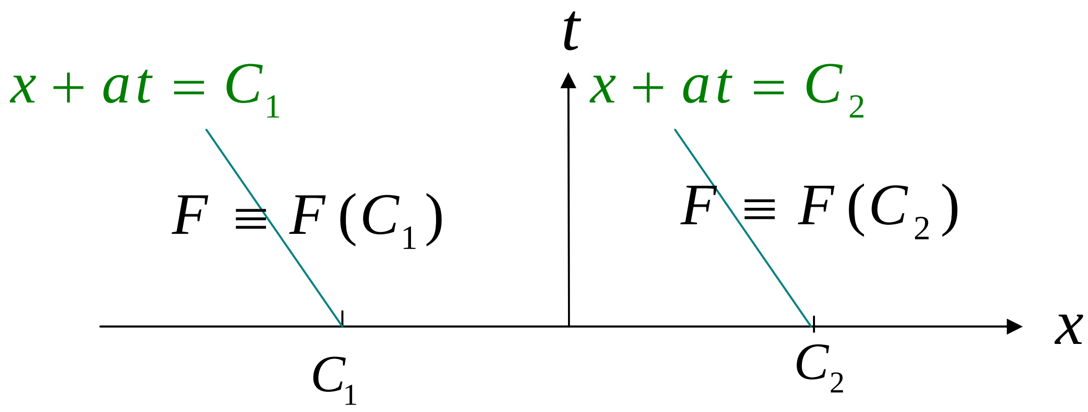
$F(x+at)$ 表示向左传播的波，波速为 a ，波形不变，且沿特征线 $x+at=C$ 传播；

$G(x-at)$ 表示向右传播的波，波速为 a ，波形不变。且沿特征线 $x-at=C$ 传播。

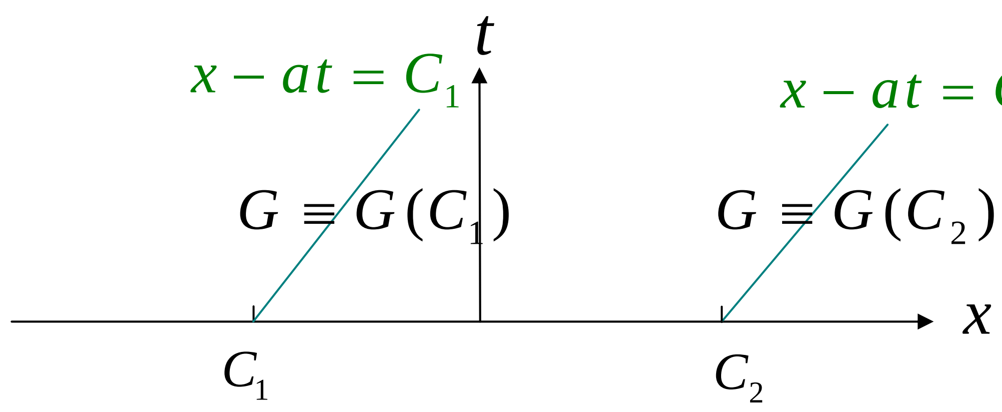




$F(x+at)$ 在特征线 $x+at=C$ 恒等于常数 $F(C)$。



$G(x-at)$ 在特征线 $x-at=C$ 恒等于常数 $G(C)$。



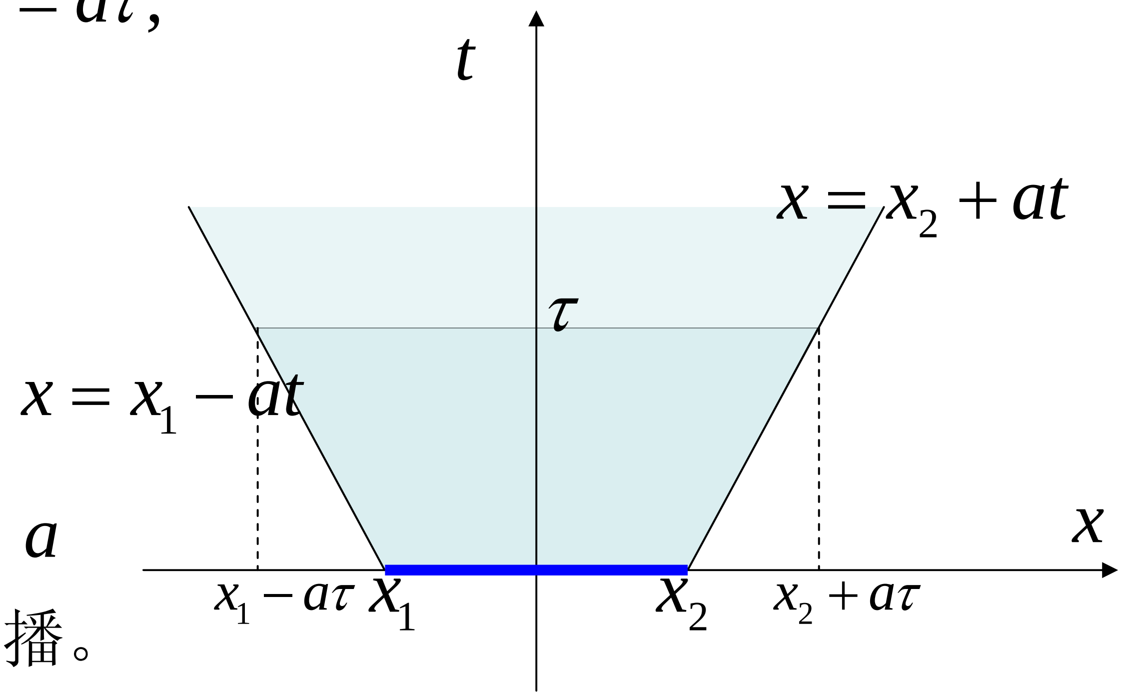
也可用影响区域来讨论：

考虑初始时刻仅在 x 轴上的区间 $[x_1, x_2]$ 有位移，其余部分处于静止状态的波动过程，由前面的讨论，受区间上 $[x_1, x_2]$ 上波动影响的范围为 $E[x_1, x_2]$ 。 如图，在 $t=\tau$ 时刻的扰动范围为 $[x_1 - a\tau, x_2 + a\tau]$， 这表明在向右方向，在 $[0, \tau]$ 时段内，扰动从 x_2 点传到了 $x_2 + a\tau$ 点， 传播距离为：

$$x_2 + a\tau - x_2 = a\tau,$$

传播速度为：

$$\frac{a\tau}{\tau} = a,$$



因此，波的传播速度为 a

并且向左右两个方向传播。

六、奇性传播问题

由D'Alembert公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds,$$

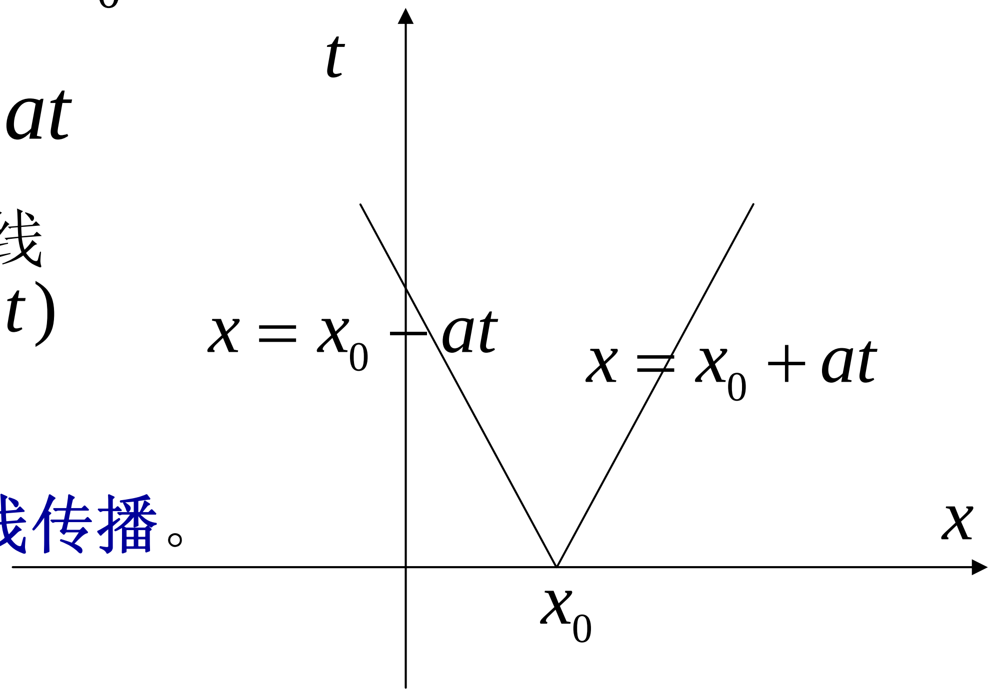
当 φ 在 x_0 处有间断时，如果

$$x\pm at=x_0,$$

即：

$$x=x_0\pm at$$

这表明(x,t)平面上，在直线 $x=x_0\pm at$ 上的点$u(x,t)$都将有间断。



因此，我们说**奇性沿特征线传播**。

前面讨论表明，当φ 在 x_0 处有间断时，$u(x,t)$ 的间断会沿特征线向 (x,t) 平面上方发展。

类似可得当 ψ 在 x_0处有间断时，$u(x,t)$ 的一阶导数也有间断，且间断会沿特征线向 (x,t) 平面上方发展。

对于一般问题，函数 $f(x,t)$也有同样结果。

因此，我们有以下结论：

弦振动方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

的解有如下性质：

1，由向左传播和向右传播的两个波叠加而成；

2，传播速度为 a ；

3，传播方式为：沿特征线向左右两个方向发展，

特别，若解有奇性，奇性会沿特征线向左右两个方向发展。

4，若 $f \equiv 0$，（即无外力干扰时），这两个波在传播过程中波形不变。

例1：　求解问题

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

其中，$\varphi(x) = 1$，当 $|x| < 1$；$\varphi(x) = 0$，当 $|x| \geq 1$。

解：

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2},$$

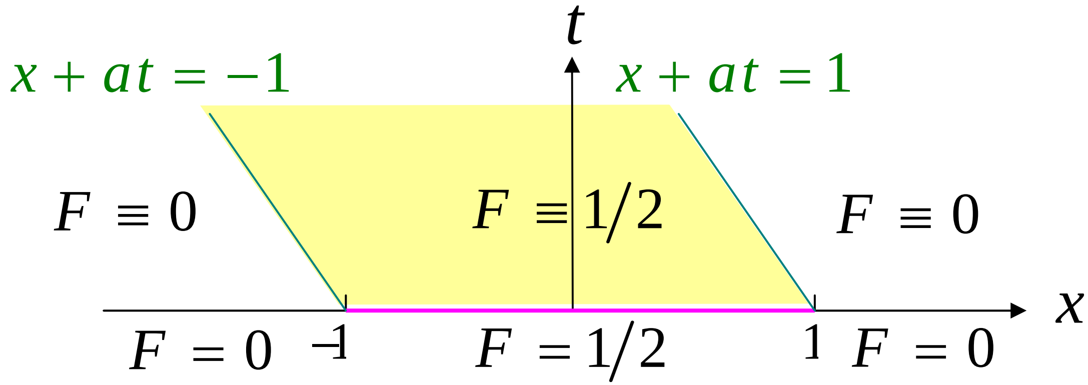
左传播波为：

$$F(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2},$$ 沿特征线 $x + at = C$ 传播；

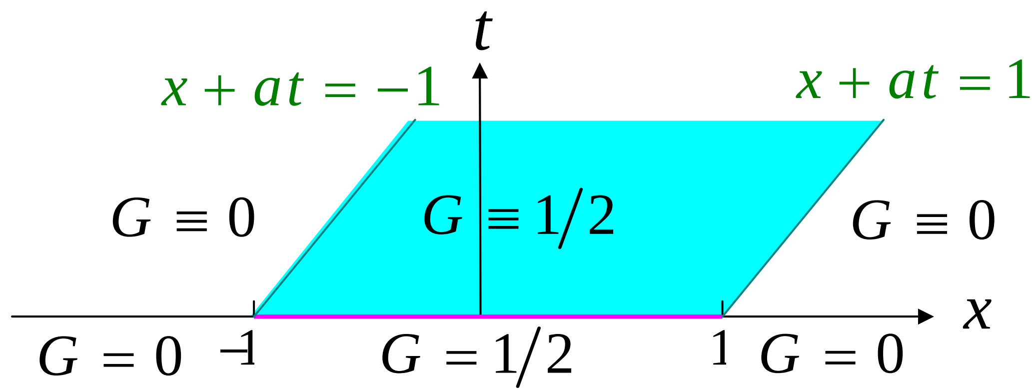
右传播波为：

$$G(x-at) = \frac{\varphi(x-at)}{2},$$ 沿特征线 $x - at = C$ 传播；

$F(x+at)$:

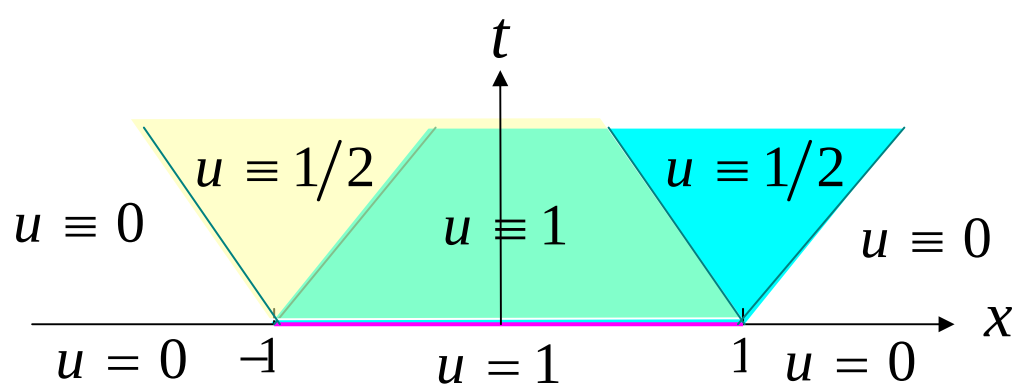


$G(x-at)$:



$u(x,t)$

$= F(x+at)+G(x-at)$:



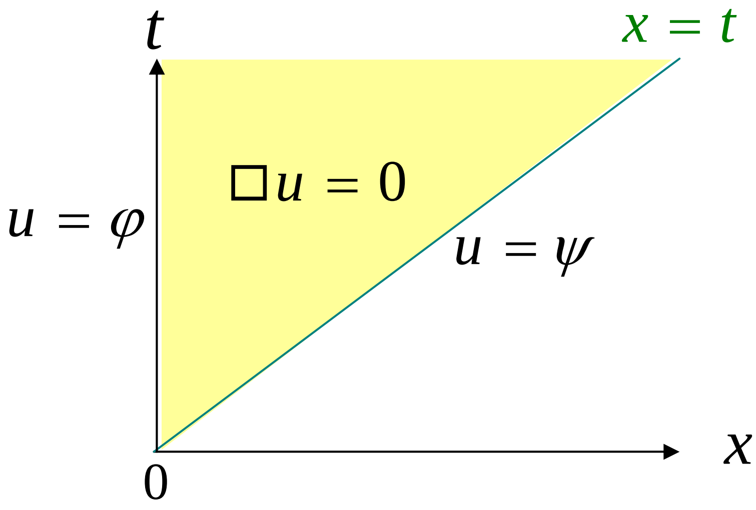
注意：u 的间断点沿两条特征线传播!

例2：（书上第112页第18题）

求解达布问题
$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < t, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \varphi(t), \qquad t \ge 0, \\ u(t,t) = \psi(t), \qquad t \ge 0。 \end{cases}$$

其中 $\varphi(0) = \psi(0)$。

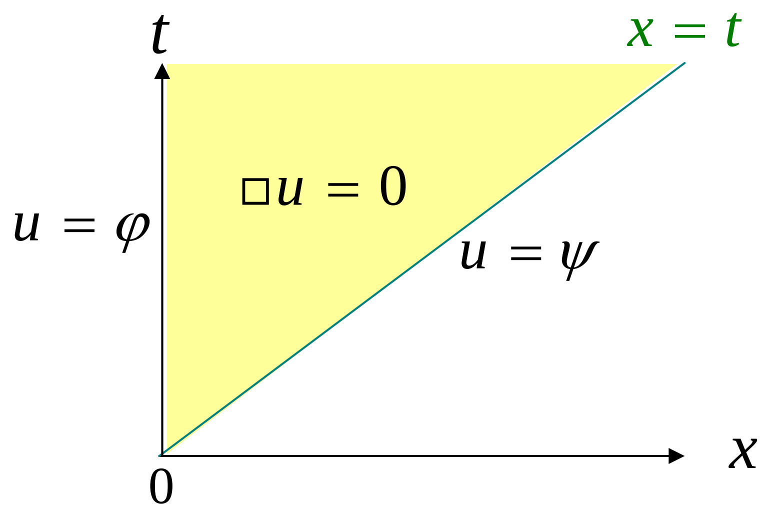
如果 $\varphi(t)$、 $\psi(t)$ 给定在 $[0,a]$， 指出此定解条件的决定区域。



解： ①，求解。

由方程的通解 $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$,

得：
$$\begin{cases} F(t)+G(-t)=\varphi(t), \\ F(2t)+G(0)=\psi(t), \end{cases}$$



所以，
$$F(t)=\psi(t/2)-G(0),$$
$$G(t)=\varphi(-t)-F(-t)$$
$$=\varphi(-t)-\psi(-t/2)+G(0)。$$

于是，
$$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$$
$$=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi(t-x)-\psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

直接计算可得：如果 φ、$\psi\in C^2[0,+\infty)$，且 $\varphi(0)=\psi(0)$，

则上面给出的函数确为达布问题的解。

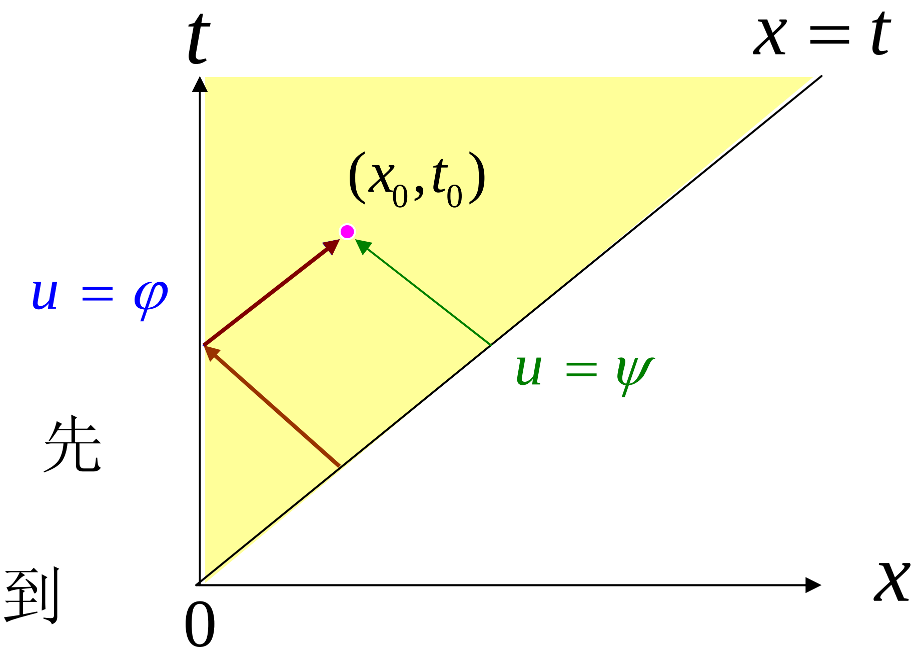
物理意义：

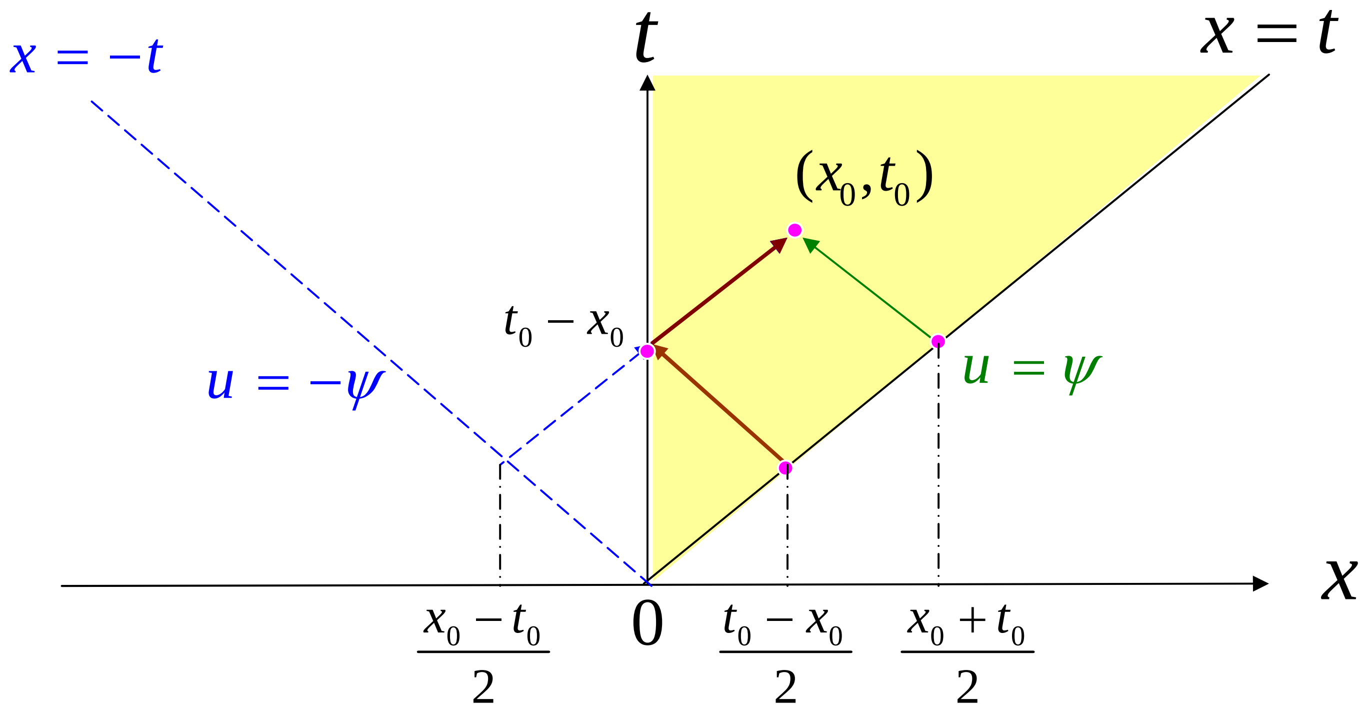
$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi(t-x)-\psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

$\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)$ 是从 $x=t$ 发出的、沿特征线 $x=-t+C$ 传播的波；

$\varphi(t-x)$ 是从 $x=0$ 发出的、沿特征线 $x=t+C$ 传播的波；

$-\psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$ 是从 $x=t$ 发出的、先沿特征线 $x=-t+C$ 传播，碰到 $x=0$ 反射后，再沿特征线 $x=t+C$ 传播的波。



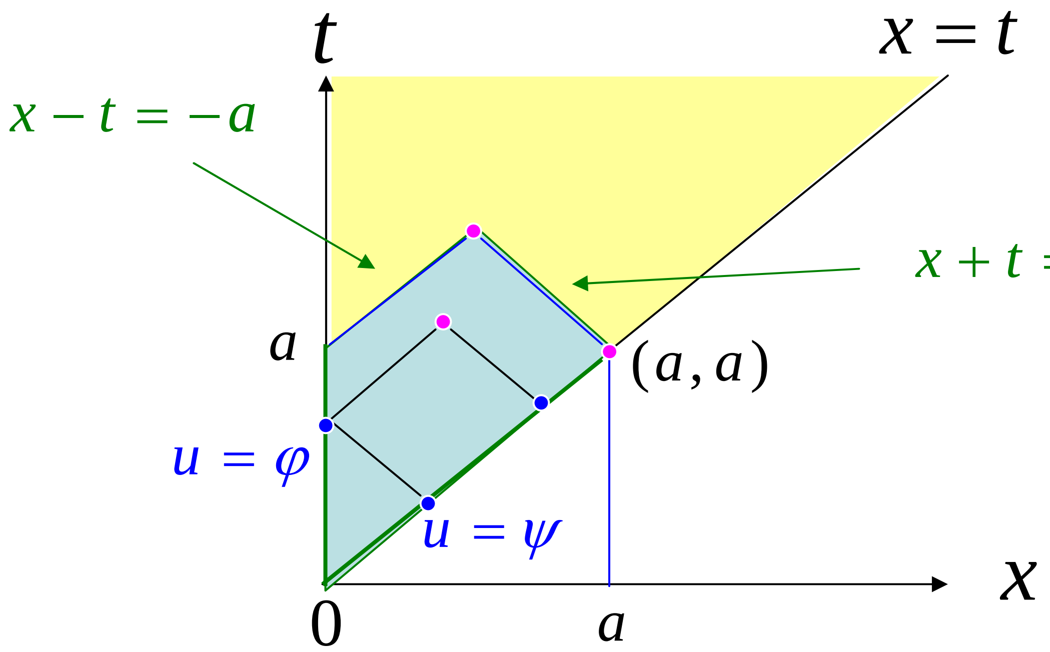


注意，由

$$u(x_0,t_0)=\psi\left(\frac{x_0+t_0}{2}\right)+\varphi\left(t_0-x_0\right)-\psi\left(\frac{t_0-x_0}{2}\right)$$

u 在点 (x_0,t_0) 的值只依赖于 u 在点 $\left(\frac{x_0+t_0}{2},\frac{x_0+t_0}{2}\right)$、$\left(0,t_0-x_0\right)$ 和 $\left(\frac{t_0-x_0}{2},\frac{t_0-x_0}{2}\right)$ 上的值。

②，求决定区域。



如图所示：要求的决定区域为

$$F[a]=\left\{(x,t)\mid\ t-a\le x\le t,\ \ 0\le x\le 2a-t\right\}。$$

解毕。

作　业

- Page 109, 5、6；
- Page 112   17；
- Page 114, 30。

选做题：

- Page 109, 7；（提示：用特征线法）

2.4　能量不等式

本节我们将讨论一维波动方程Cauchy问题的唯一性及稳定性问题。

一、记号

如图：设(x_0,t_0)为平面直角坐标系 xot 上半平面上任一点，过此点向下作二条特征线 $x=x_0\pm a(t_0-t)$，这二条特征线与 x 轴围成一个三角形区域，我们称此区域为以(x_0,t_0)点为顶点的**特征锥**，记之为 K.

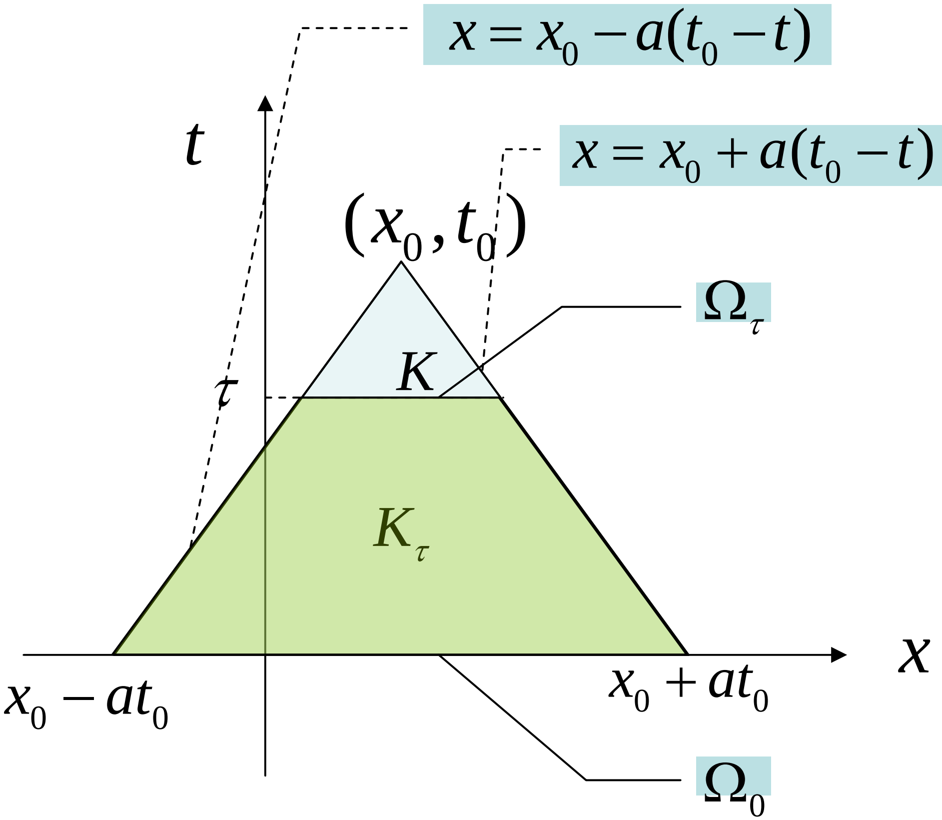
对于任意的 $\tau\geq 0$，记：

$$\Omega_\tau=\overline{K}\bigcap\{(x,t)\,|\,t=\tau\},$$

$$K_\tau=K\bigcap\{(x,t)\,|\,0<t<\tau\},$$

$$\Gamma_{1\tau}=\{(x,t)\,|\,x=x_0-a(t_0-t),0<t<\tau\},$$

$$\Gamma_{2\tau}=\{(x,t)\,|\,x=x_0+a(t_0-t),0<t<\tau\}.$$



二、能量不等式

定理2.3 设 $u \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$为以下定解问题(1)的解

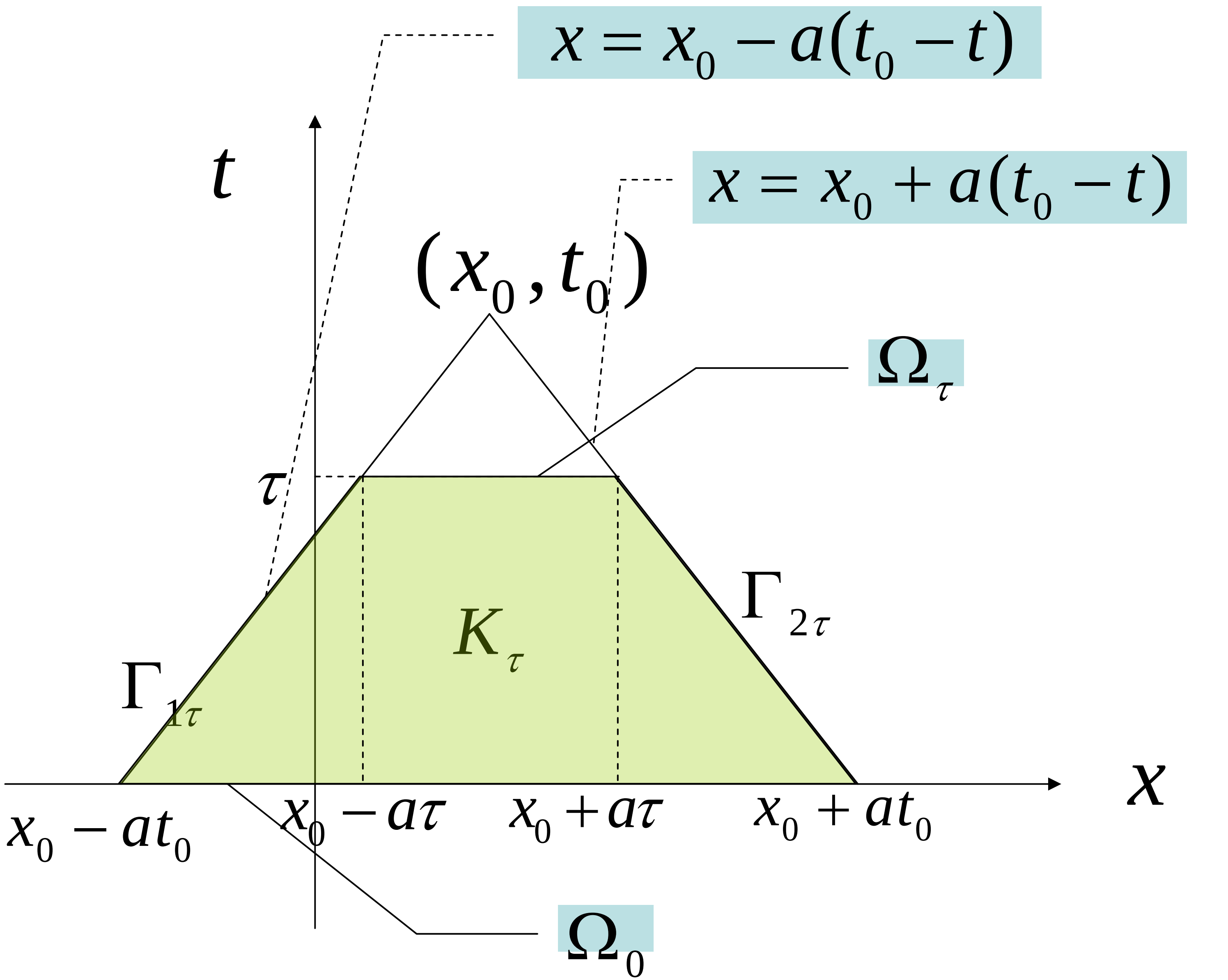
$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

则对于任意的$(x_0, t_0), t_0 > 0$, 有以下估计

$$\int_{\Omega_\tau} \left[u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau) \right] dx \le M \left[\int_{\Omega_0} \left[\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx + \iint_{K_\tau} f^2(x,t) dx dt \right]$$

$$\iint_{K_\tau} \left[u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t) \right] dx dt \le M \left[\int_{\Omega_0} \left[\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx + \iint_{K_\tau} f^2(x,t) dx dt \right]$$

其中 $0 \le \tau \le t_0, M = \exp(t_0).$



$x = x_0 - a(t_0 - t)$
$x = x_0 + a(t_0 - t)$
t
(x_0, t_0)
Ω_τ
τ
$\Gamma_{2\tau}$
K_τ
$\Gamma_{1\tau}$
x
$x_0 - at_0$
$x_0 - a\tau$
$x_0 + a\tau$
$x_0 + at_0$
Ω_0

证明：　　Step1　方程两边同乘以 $\frac{\partial u}{\partial t}$，并且在 K_τ 上积分得：

$$\iint_{K_\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\iint_{K_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}f(x,t)dxdt,$$

Step2　应用分部积分公式计算积分

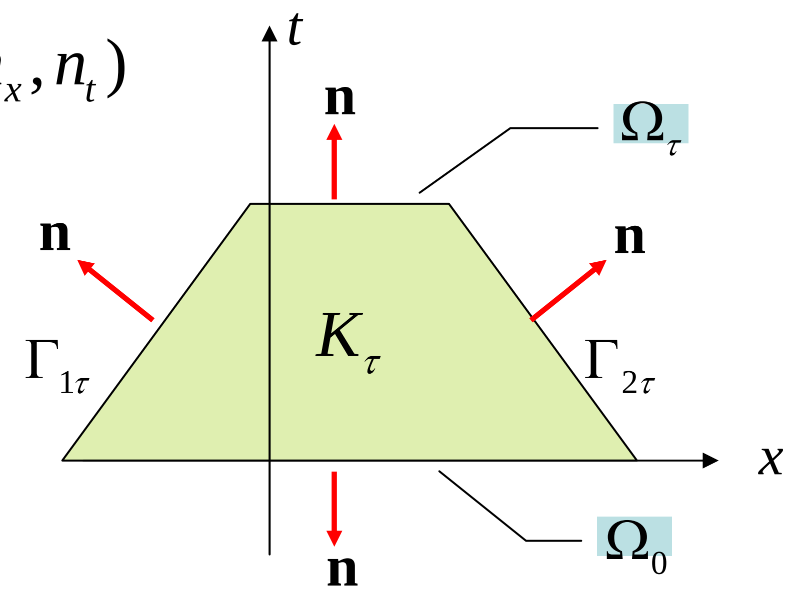
$$\iint_{K_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\frac{1}{2}\iint_{K_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt=\frac{1}{2}\oint_{\partial K_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 n_t ds$$

这里，$\mathbf{n}$ 是 ∂K_τ 的单位外法向量，$\mathbf{n}=(n_x,n_t)$

$$\partial K_\tau=\Omega_\tau\cup\Omega_0\cup\Gamma_{2\tau}\cup\Gamma_{1\tau}$$

Ω_τ上 $\mathbf{n}=(0,1)$，　Ω_0上 $\mathbf{n}=(0,-1)$，

$\Gamma_{1\tau}$上：$\mathbf{n}=\frac{(-1,a)}{\sqrt{1+a^2}}$，　$\Gamma_{2\tau}$上：$\mathbf{n}=\frac{(1,a)}{\sqrt{1+a^2}}$，



所以，

$$\iint_{K_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt = \frac{1}{2}\oint_{\partial K_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 n_t ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{K_{1\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 n_t ds + \frac{1}{2}\int_{K_{2\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 n_t ds.$$

类似地，

$$\iint_{K_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt = -\iint_{K_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt + \oint_{\partial K_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}n_x ds$$

同前面一样，可得：

$$-\iint_{K_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ds+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ds.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{K_{1\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 n_t ds-\frac{1}{2}\int_{K_{2\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 n_t ds.$$

而

$$\oint_{\partial K_\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}n_x ds=\int_{K_{1\tau}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}n_x ds+\int_{K_{2\tau}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}n_x ds$$

所以，

$$\iint_{K_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ds+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ds.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{K_{1\tau}\cup K_{2\tau}}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 n_t-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}n_x\right\}ds.$$

于是，

$$\iint_{K_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - a^2\iint_{K_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}ds - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{K_{1\tau}\cup K_{2\tau}}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 n_t + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 n_t - 2a^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}n_x\right\}ds.$$

注意到，在 $K_{1\tau}\cup K_{2\tau}$ 上 $n_t = a\,|\,n_x\,| > 0,$ 所以上式最后一项为：

$$\frac{a\,|\,n_x\,|}{2}\int_{K_{1\tau}\cup K_{2\tau}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\pm a\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 ds > 0.$$

这就得到：

$$\iint_{K_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - a^2\iint_{K_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}ds - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left\{\psi^2(x) + a^2\varphi_x^2(x)\right\}dx$$

代入前面的等式，得：

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$\le\int_{\Omega_0}\left[\psi^2+a^2\varphi_x^2\right]dx+\iint_{K_\tau}2\frac{\partial u}{\partial t}f(x,t)dxdt$$

$$\le\int_{\Omega_0}\left[\psi^2+a^2\varphi_x^2\right]dx+\iint_{K_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+f^2(x,t)\right]dxdt$$

Step3 应用Gronwall不等式

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx\le\int_{\Omega_0}\left[\psi^2+a^2\varphi_x^2\right]dx+\iint_{K_\tau}f^2(x,t)dxdt$$
$$+\iint_{K_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt$$
$$=F(\tau)+G(\tau), \qquad (2)$$

其中

$$F(\tau)=\int_{\Omega_0}\left[\psi^2+a^2\varphi_x^2\right]dx+\iint_{K_\tau}f^2(x,t)dxdt,$$

$$G(\tau)=\iint_{K_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt$$
$$=\int_0^\tau\left\{\int_{\Omega_t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}dt,$$

因此有

$$G'(\tau)=\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg|_{t=\tau} dx,$$

从而不等式(2)可以表为：

$$G'(\tau)\leq F(\tau)+G(\tau), \tag{3}$$

——Gronwall不等式。由Gronwall不等式解法，(3)两边同乘以 $e^{-\tau}$ 得：

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\tau}G(\tau)\right]\leq e^{-\tau}F(\tau),$$

在 $[0,\tau]$ 积分得

$$e^{-\tau}G(\tau)\leq\int_0^\tau e^{-x}F(x)dx$$

$$G(\tau)\leq\int_0^\tau e^{\tau-x}F(x)dx\leq\int_0^\tau e^{\tau-x}F(\tau)dx$$

$$\leq F(\tau)\int_0^\tau e^{\tau-x}dx\leq F(\tau)\left(e^\tau-1\right). \tag{4}$$

结合(2)(3)(4)得：

$$G(\tau) \le F(\tau)\left(e^{\tau}-1\right)$$
$$\le e^{\tau}F(\tau) \le e^{t_0}F(\tau),$$

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx \quad = G'(\tau) \le F(\tau)+G(\tau)$$
$$\le F(\tau)+F(\tau)\left(e^{\tau}-1\right)$$
$$\le e^{\tau}F(\tau) \le e^{t_0}F(\tau),$$

定理得证。

能量估计证明方法总结

第一步：选取未知函数或其偏导数去乘方程，并在所考虑的区域上积分。

第二步：计算各积分，用有关不等式放大或缩小相应积分。

第三步：（必要的时候）利用Grönwall不等式，估计积分。

Grönwall不等式：

若：$G'(\tau) \le F(\tau) + G(\tau), \qquad \forall \tau \in [0,T]$

则 $G(\tau) \le e^{\tau}\int_0^{\tau} e^{-x}F(x)dx\,, \quad \forall \tau \in [0,T]$

三、波动方程Cauchy问题解的唯一性和稳定性

定理 设 $u\in C^1(\overline{Q})\cap C^2(Q)$ 为以下定解问题(1)的解

$$
\begin{cases}
\Box u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ x\in\mathbf{R},\ t>0,\\
u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in\mathbf{R},\\
u_t(x,0)=\psi(x), \qquad x\in\mathbf{R}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

则对于任意的 $(x_0,t_0),\ t_0>0,$ 有以下估计

$$
\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)dx\le M_1\left[\iint_{\Omega_0}\left[\varphi^2(x)+\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx + \iint_{K_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]
$$

$$
\iint_{K_\tau} u^2(x,t)dxdt\le M_1\left[\int_{\Omega_0}\left[\varphi^2(x)+\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx + \iint_{K_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]
$$

其中 $\quad 0\le\tau\le t_0,\ M_1=\mathrm{e}^{2t_0}\ .$

证明： 对于任意的 $0 \le \tau \le t_0$， 由于

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u^2(x,\tau)-u^2(x,0)\right]dx = \int_{\Omega_\tau}\left[\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t)dt\right]dx$$

$$\le \iint_{K_\tau}\left|2u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|dxdt \le \iint_{K_\tau}\left[u^2(x,t)+u_t^2(x,t)\right]dxdt$$

由能量不等式(定理2.3)得：

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)dx \le \iint_{K_\tau}\left[u^2(x,t)+u_t^2(x,t)\right]dxdt+\int_{\Omega_0}u^2(x,0)dx$$

$$\le M\left[\int_{\Omega_0}\left[\varphi^2(x)+\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx+\iint_{K_\tau}f^2(x,t)dxdt\right]$$

$$+\iint_{K_\tau}u^2(x,t)dxdt = MF(\tau)+\iint_{K_\tau}u^2(x,t)dxdt \qquad (7)$$

其中

$$F(\tau)=\int_{\Omega_0}\left[\varphi^2(x)+\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx+\iint_{K_\tau}f^2(x,t)dxdt,$$

$$M = e^{t_0}.$$

记
$$G(\tau)=\iint_{K_\tau} u^2(x,t)dxdt=\int_0^\tau\left[\int_{\Omega_t} u^2(x,t)dx\right]dt,$$
则有
$$G'(\tau)=\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)dx,$$
于是得Gronwall不等式：
$$G'(\tau)\le MF(\tau)+G(\tau),$$
类似于前面处理法可得：
$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\tau}G(\tau)\right]\le e^{-\tau}MF(\tau),$$
积分得
$$e^{-\tau}G(\tau)\le\int_0^\tau e^{-s}MF(s)ds$$

$$G(\tau)\le M\int_0^\tau e^{\tau-s}F(s)ds\le MF(\tau)\int_0^\tau e^{\tau-s}ds\le MF(\tau)\left(e^\tau-1\right).$$
于是有
$$\iint_{K_\tau} u^2(x,t)dxdt=G(\tau)\le MF(\tau)\left(e^\tau-1\right)\le MF(\tau)\left(e^{t_0}-1\right).$$

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)dx \le MF(\tau) + \iint_{K_\tau} u^2(x,t)dxdt$$

$$\le MF(\tau) + MF(\tau)\left(e^{t_0} - 1\right)$$

$$\le e^{2t_0} F(\tau),$$

$$\iint_{K_\tau} u^2(x,t)dxdt \le MF(\tau)\left(e^{t_0} - 1\right) \le e^{2t_0} F(\tau).$$ 证毕

本定理即表明问题(1)解的唯一性和稳定性。

事实上，若有 $u_i \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q), (i = 1, 2)$ 为如下问题之解

$$\begin{cases} \Box u_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = f_i(x,t), x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\ \left(u_i\right)_t(x,0) = \psi_i(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

则对于 $u = u_1 - u_2$ 满足

$$
\begin{cases}
\Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x,t) - f_2(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\
u(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \\
u_t(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x), \qquad x \in \mathbf{R}.
\end{cases}
$$

由定理知：

$$
\begin{aligned}
&\iint_{K_\tau} u^2(x,t)dxdt \le e^{2t_0} F(\tau) \\
&= e^{2t_0} \int_{\Omega_0} \left\{ \left[\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right]^2 + a^2 \left[\varphi_{1x}(x) - \varphi_{2x}(x) \right]^2 \right\} dx \\
&\quad + e^{2t_0} \int_{\Omega_0} \left[\psi_1(x) - \psi_2(x) \right]^2 dx \\
&\quad + e^{2t_0} \iint_{K_\tau} \left[f_1(x,t) - f_2(x,t) \right]^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

四、附注

1. 后一定理可通过对方程乘 $u(x,t)$ 并在 K_τ 上积分直接证明。
2. 由定理2.3可证明解的唯一性，但不能证明稳定性。因为定理2.3 没有得到 $u(x,t)$ 本身的估计。
3. 在物理上，$u(x,t)$ 的平方及其偏导数的平方的积分，对应于各种能量，因此称有关它们的平方的不等式称为能量不等式。

作业：1，Page 111， 13；

2，考虑下述混合问题：

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x \in (0,l), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,l) \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in (0,l). \end{cases}$$

证明下述能量不等式，并用其来证明解的唯一性

$$\int_0^l \left[u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t) \right] dx \le \int_0^l \left[\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx$$

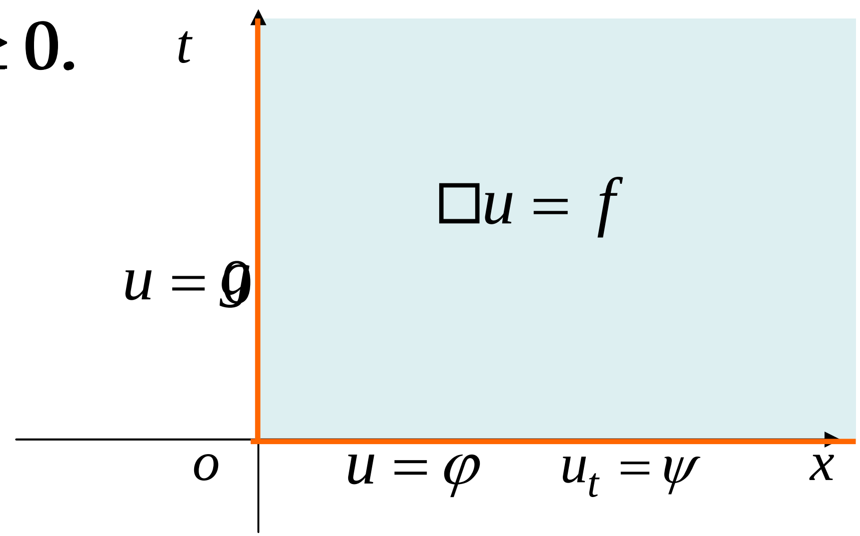
$$+ \int_0^t \int_0^l f^2(x,t) dx dt, \quad \forall t > 0.$$

2.5　半无界问题

一、问题

在区域 $\overline{Q}=\left\{(x,t)\,\middle|\,0\le x<\infty,\ 0\le t<\infty\right\}$ 求解定解问题：

$$\begin{cases} \Box u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ x>0,t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\ge 0, \\ u_t(x,0)=\psi(x), \qquad x\ge 0, \\ u(0,t)=g(t), \qquad t\ge 0. \end{cases} \tag{1}$$



二、求解

A. $g(t)\equiv 0$ 情形

此时，问题(1)化为：

1.解法1——通解法

类似于前面Cauchy问题解法，我们可以由简化公式，先求解齐次方程情形的定解问题，利用齐次方程的通解表示，根据初始条件、边界条件确定待定函数，从而得到解表达式。

2.解法2——对称延拓法

由P44的推论知，对于波动方程Cauchy问题，当函数 φ,ψ,f 关于 x 为奇函数时，问题的解也关于 x 为奇函数，其自然满足 $u\big|_{x=0}\equiv 0.$

由此，我们得到求解半无界问题的基本思路：

首先，适当拓展已知函数 φ,ψ,f 在 $-\infty<x<0$ 和 $\left\{-\infty<x\le 0,\ t\ge 0\right\}$ 上的值，把半无界问题转化为给定在上半平面的Cauchy问题，使其解自然满足边界条件 $u\big|_{x=0}\equiv 0.$

第二步，利用一维波动方程Cauchy求解公式地，求解Cauchy问题。

第三步，利用解表达式，限定 x,t 取值范围，得到问题解。

1，对称延拓已知函数

根据问题特点，本问题只要对已知函数φ,ψ,f关于x作奇延拓。

令：

$$\overline{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0,\\ -\varphi(-x), & x<0;\end{cases}$$

$$\overline{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0,\\ -\psi(-x), & x<0;\end{cases}$$

$$\overline{f}(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x\geq 0,t\geq 0,\\ -f(-x,t), & x<0,t\geq 0;\end{cases}$$

于是得一维波动方程Cauchy问题:

$$\begin{cases}\square\overline{u}=\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}=\overline{f}(x,t), x\in\mathbf{R}, t>0,\\ \overline{u}(x,0)=\overline{\varphi}(x), \qquad x\in\mathbf{R},\\ \overline{u}_t(x,0)=\overline{\psi}(x), \qquad x\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

2，解Cauchy问题

由一维波动方程Cauchy问题解公式

$$\overline{u}(x,t) = \frac{\overline{\varphi}(x+at)+\overline{\varphi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\overline{\psi}(s)ds$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\overline{f}(s,\tau)ds\right]d\tau, \qquad (3)$$

3，求解

显然，当 $x \geq 0, t \geq 0$时有 $u(x,t) = \overline{u}(x,t).$

以下讨论用 φ, ψ, f 来表示解。

当$x \geq at$ 时：

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau.$$

当 $0 < x < at$ 时：

我们分别计算(3)中各项：

$$\frac{\overline{\varphi}(x+at)+\overline{\varphi}(x-at)}{2}=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2},$$

$$\int_{x-at}^{x+at}\overline{\psi}(s)ds=\int_{x-at}^{0}\overline{\psi}(s)ds+\int_{0}^{x+at}\overline{\psi}(s)ds$$

$$=-\int_{x-at}^{0}\psi(-s)ds+\int_{0}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$=\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\overline{f}(s,\tau)ds\right]d\tau=\iint_K\overline{f}(s,\tau)dsd\tau$$

其中 K 是由直线 $s=x\pm a(t-\tau)$ 与 x 轴围成的一个三角形区域，如图：

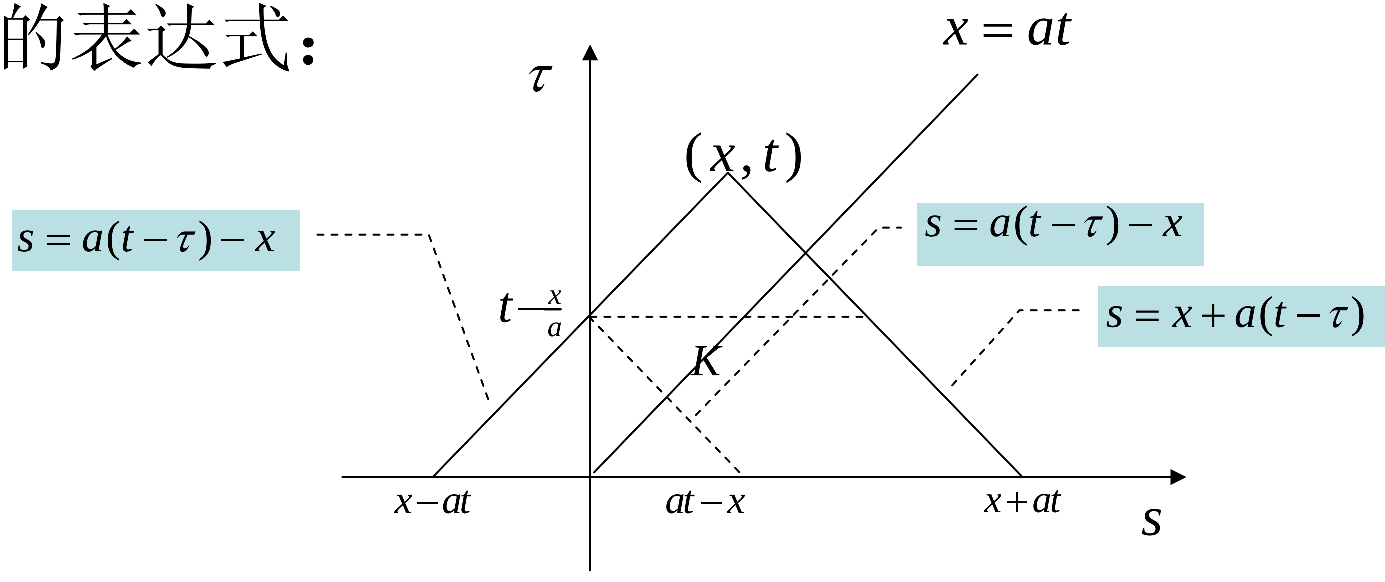
$$\int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \overline{f}(s,\tau)ds \right] d\tau$$

$$= \int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds \right] d\tau + \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\int_0^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds \right] d\tau.$$

$$-\int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{0} f(-s,\tau)ds \right] d\tau.$$

$$= \int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds \right] d\tau + \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds \right] d\tau.$$

于是得解的表达式：



$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau, \qquad x\ge at, \\ \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left[\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\right]d\tau, \qquad 0<x<at.\end{cases} \tag{4}$$

3.验证

同一维波动方程解Cauchy问题情形类似，这里我们所得的解表达式(4)仅仅是问题(2)的形式解，我们仍需要作验证。

a.相容性条件

在 $x=0, t=0$ 处，问题的边界条件及初始条件出现重复，为保证问题解的连续、一阶导数连续和二阶导数连续，我们须对初始条件及边界条件加以分析。

①解在 $(0, 0)$连续：

$$u(0,0)=\lim_{t\to 0}u(0,t)=0$$
$$=\lim_{x\to 0}u(x,0)=\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\varphi(0).$$

即：

$$\varphi(0)=0. \tag{5}$$

②解在 $(0, 0)$一阶导数连续：

$$u_t(0,0)=\lim_{t\to 0}u_t(0,t)=0$$
$$=\lim_{x\to 0}u_t(x,0)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=\psi(0).$$

即：

$$\psi(0)=0. \tag{6}$$

③解在 $(0,0)$ 二阶导数连续：

$$\begin{aligned} u_{tt}(0,0) &= \lim_{t\to 0} u_{tt}(0,t) = g''(0) = 0 \\ &= \lim_{x\to 0}\left[a^2 u_{xx}(x,0) + f(x,0)\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\left[a^2 \varphi_{xx}(x) + f(x,0)\right] \\ &= a^2\varphi_{xx}(0) + f(0,0) \end{aligned}$$

即：

$$a^2\varphi_{xx}(0) + f(0,0) = 0. \tag{7}$$

结合①②③，我们可得：

定理2.5 若 $\varphi(x)\in C^2[0,\infty), \psi(x)\in C^1[0,\infty),\ f(x,t)\in C^1(\overline{Q})$，且满足相容性条件(5)(6)(7)，则半无界问题(2)必有解 $u(x,t)\in C^2(\overline{Q})$，且由表达式(4)给出。这里 $Q=\left\{(x,t)\,\middle|\,x>0,t>0\right\}$.

定理证明思路： 第一步：验证二阶导数连续。

第二步：验证函数满足初始条件、边界条件及方程。

B. $g(t)\neq 0$情形

解法：作函数变换

$$v(x,t)=u(x,t)-g(t),$$

则问题(1)化为：

$$\begin{cases}\Box v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f(x,t)-g''(t),\ x>0,t>0,\\ v(x,0)=\varphi(x)-g(0), \qquad x\geq 0,\\ v_t(x,0)=\psi(x)-g'(0), \qquad x\geq 0,\\ v(0,t)=0, \qquad t\geq 0.\end{cases} \tag{8}$$

从而归结为A情形，可求解，且有类似定理。

定理2.6 若 $\varphi(x)\in C^2[0,\infty),\psi(x)\in C^1[0,\infty),\ f(x,t)\in C^1(\overline{Q}),$ $g(t)\in C^3[0,\infty)$，且满足相容性条件：

$$\varphi(0)=g(0),\psi(0)=g'(0),\ g''(0)-a^2\varphi''(0)=f(0,0),$$

则半无界问题(8)必有解 $u(x,t)\in C^2(\overline{Q})$.

三、唯一性和稳定性（能量不等式）

定理2.3 设 $u \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$为以下定解问题(2)的解

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x>0, t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \geq 0, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

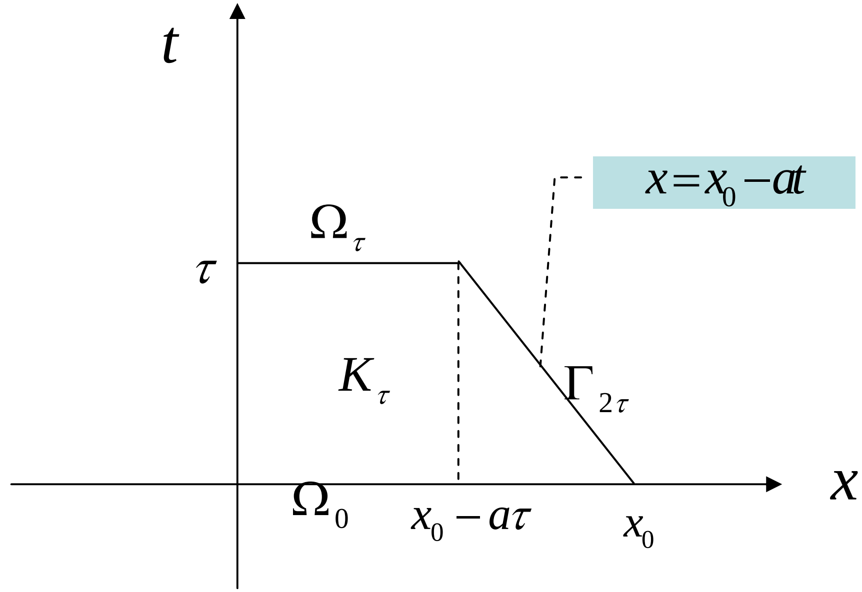
则对于任意的 $x_0 > 0, t_0 > 0,$ 有以下估计

$$\int_0^{x_0 - a\tau} \left[u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau) \right] dx \leq M \left[\int_0^{x_0} \left[\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx + \iint_{K_\tau} f^2(x,t) dxdt \right]$$

$$\iint_{K_\tau} \left[u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t) \right] dxdt \leq M \left[\int_0^{x_0} \left[\psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx + \iint_{K_\tau} f^2(x,t) dxdt \right]$$

其中 $0 \leq \tau \leq t_0, M = \exp(t_0).$

K_τ 如右图所示：



四、附注

对于其它形式的半无界问题可类似前面做法进行求解。特别对于上给定第二边界条件：

$$u_x(0,t) = g(t), \qquad t \geq 0,$$

情形，我们可仿照前面作法，作函数变换：

$$v(x,t) = u(x,t) - xg(t), \qquad \text{则} \quad v_x(0,t) = 0.$$

就将边界条件化为齐次情形，再利用对称延拓法或通解法进行求解。

作　业

- Page 110, 10, 11.
- 选做题

  Page 110, 12;

  Page 111, 15, 16.

§3.初值问题(高维情形)

§3.1　解的表达式

一、三维情形(Kirchhoff公式)

(1) 问题

求解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) = f(x,t), x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

(2) 解法

由简化公式，只须讨论 $\varphi(x)=0,\ f(x,t)=0$ 情形。利用球平均值函数工具，应用半无界问题解公式，最终可得解公式：

(3)公式：
$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}(x)}\varphi(y)dS\right]$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}(x)}\psi(y)dS \tag{2}$$
$$+\int_0^t\left[\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(y,\tau)dS\right]d\tau.$$

其中：$S_t(x)=\left\{y\in\mathbf{R}^3 \,\|x-y|=t\right\}.$

二、二维情形

(1)问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=f(x,t),\ x\in\mathbf{R}^2,t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in\mathbf{R}^2,\\ u_t(x,0)=\psi(x), \qquad x\in\mathbf{R}^2.\end{cases} \tag{3}$$

(2)解法——降维法

设 u 为问题(3)之解，令函数

$$\bar{u}(x_1,x_2,x_3,t)=u(x_1,x_2,t),$$

则 $\bar{u}$ 满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_3^2}\right)= f(x_1,x_2,t),\ x\in\mathbf{R}^3,\ t>0, \\ \bar{u}(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2), \qquad x\in\mathbf{R}^3, \\ \bar{u}_t(x_1,x_2,x_3,0)=\psi(x_1,x_2), \qquad x\in\mathbf{R}^3. \end{cases}$$

由Kirchhoff公式

$$\bar{u}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}(x)}\varphi(y_1,y_2)dS\right]+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}(x)}\psi(y_1,y_2)dS$$

$$+\int_0^t\left[\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(y_1,y_2,\tau)dS\right]d\tau.$$

我们只对中间一个积分作一下计算，其余类似。
由于该积分为曲面积分，被积函数与 y_3 无关，积分范围是一球面，方程为

$$\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2+\left(y_3-x_3\right)^2=\left(at\right)^2,$$

上半球面可表为：

$$y_3=x_3+\sqrt{\left(at\right)^2-\left(y_1-x_1\right)^2-\left(y_2-x_2\right)^2},$$

记 $\Sigma_{at}(x_1,x_2)=\left\{(y_1,y_2)\ \middle|(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2\le(at)^2\right\}$

因此，积分可表为：

$$\iint_{S_{at}(x)}\psi(y_1,y_2)dS=2\iint_{S_{at}^{+}(x)}\psi(y_1,y_2)dS$$

$$=2\iint_{\Sigma_{at}(x_1,x_2)}\psi(y_1,y_2)\sqrt{1+\left(y_{3y_1}\right)^2+\left(y_{3y_2}\right)^2}\,dy_1dy_2$$

$$=2\iint_{\Sigma_{at}(x_1,x_2)}\psi(y_1,y_2)\sqrt{1+\frac{\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}{\left(at\right)^2-\left(y_1-x_1\right)^2-\left(y_2-x_2\right)^2}}\,dy_1dy_2$$

$$=2\iint_{\Sigma_{at}(x_1,x_2)}\psi(y_1,y_2)\frac{at}{\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2,$$

于是得：

$$u_2(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}(x_1,x_2)}\psi(y_1,y_2)dS$$

$$=\frac{1}{2\pi a^2 t}\iint_{\Sigma_{at}(x_1,x_2)}at\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma_{at}(x_1,x_2)}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2,$$

从而得到原问题的解为：

$$u(x_1,x_2,t)=u(x,t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{at}(x)}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma_{at}(x)}\frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy \tag{4}$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x)}\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy\right]d\tau$$

这里：

$$x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),$$

$$\Sigma_{at}(x)=\left\{y\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2\le(at)^2\right\}.$$

当 $f(x,t)\equiv 0$ 时，公式(4)称为Poisson公式。

公式(2)(4)仅为问题(1)(3)的形式解，类似于前面做法，我们可进一步验证得到如下定理：

定理3.1　若 $\varphi(x)\in C^3(\mathbf{R}^n), \psi(x)\in C^2(\mathbf{R}^n),\ f(x,t)\in C^2(\overline{Q}),$ 这里 $Q=\left\{(x,t)\,\middle|\,x\in\mathbf{R}^n, t>0\right\},$ 则由(2)、(4)给出的函数 $u(x,t)\in C^2(\overline{Q}),$ 分别是定解问题(1)和(3)的解。

作　业

- Page 111,　14。

（提示：利用Page 65 的（3.16）式）

§ 3.2　特征锥与Huygens原理

一、问题：对于二维波动方程Cauchy问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x,t), x \in \mathbf{R}^2, t > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^2, \\
u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^2.
\end{cases} \tag{1}
$$

讨论其依赖区域、决定区域及影响区域。

(1)　依赖区域

由解公式可得，解 u 在任一点 $P_0(x_0, y_0, t_0)$ 的值仅依赖于以这点为顶点的锥体

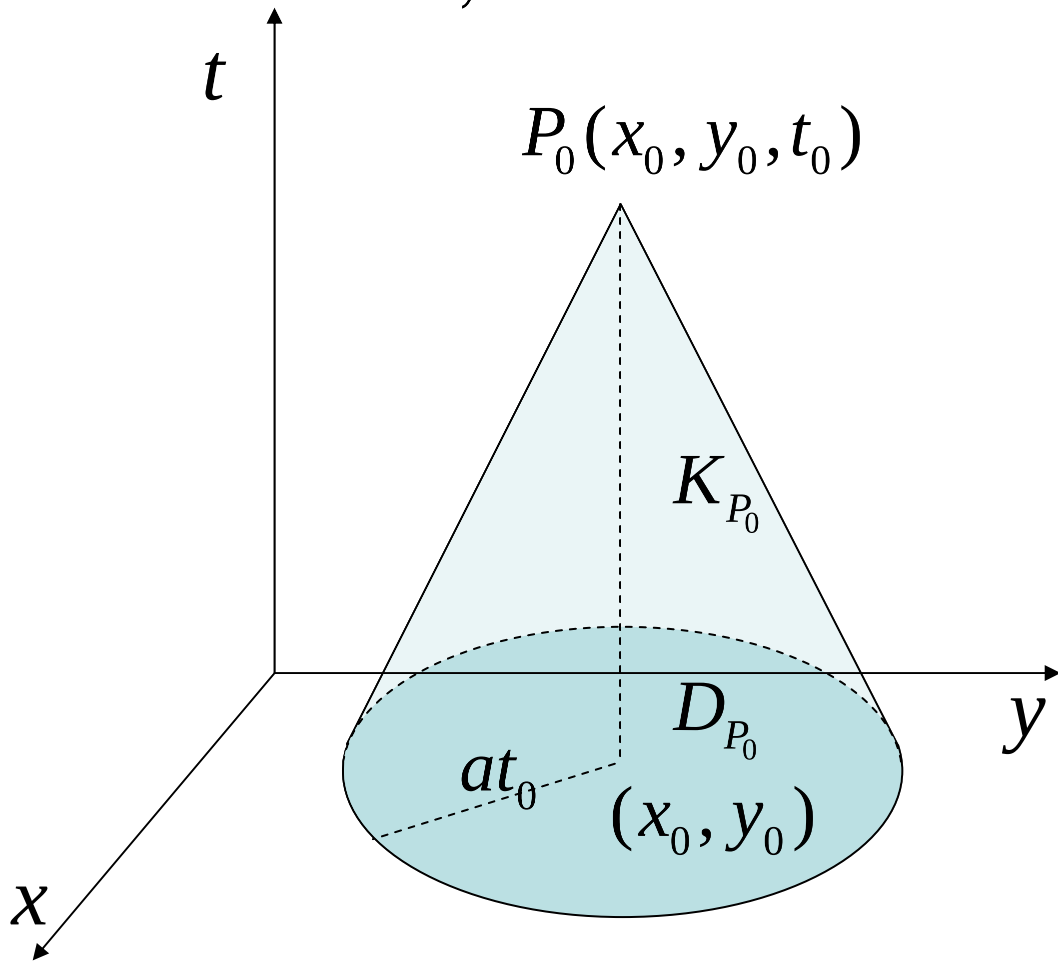
$$
K_{P_0} = \left\{ (x, y, t) \middle| \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \le a(t_0 - t), 0 \le t \le t_0 \right\}
$$

内的定解数值；具体地说，膜上任意一点 (x_0, y_0) 在 $t = t_0$ 时刻的位移值 $u(x_0, y_0, t_0)$只依赖于区域 $K_{P_0} \cap \{t = 0\} \equiv D_{P_0}$ 上的初始值 φ, ψ 及 K_{P_0} 内外力 f 的值。

我们称区域 D_{P_0} 为点 P_0 对初值的依赖区域，即：

$$D_{P_0}=\left\{(x,y,0)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le at_0\right\}.$$

称锥体 K_{P_0} 为问题(1)的特征锥。

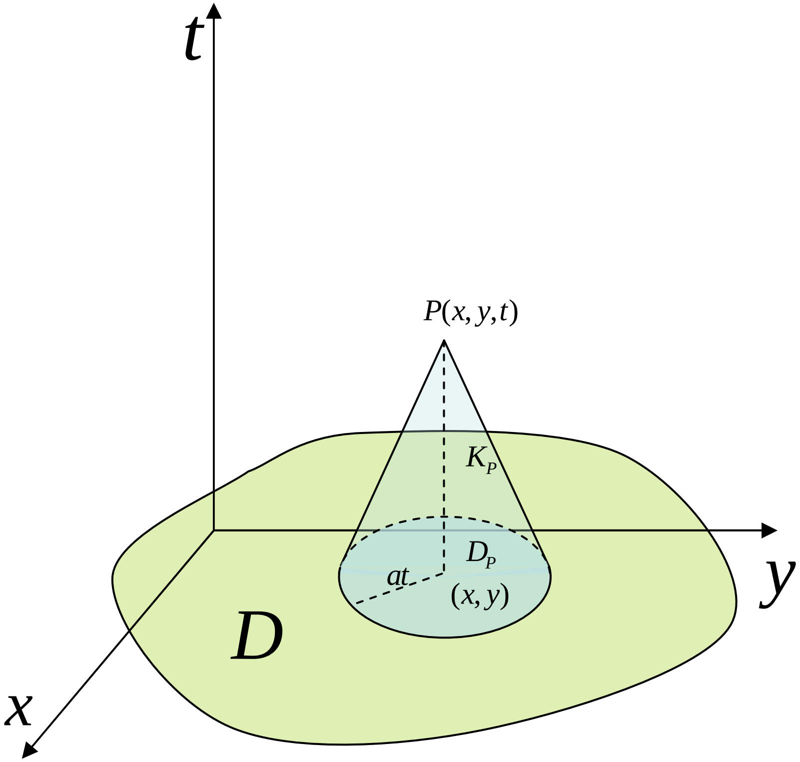


(2) 决定区域

对于xoy平面上的任一区域D，在$f=0$时，给定φ,ψ在D上的值，问上半空间中哪些点上的位移$u(x,y,t)$可由D中的φ,ψ的值唯一确定。显然，这样的点全体构成的集合F_D可表为：

$$F_D=\left\{P(x,y,t)\middle|D_P\subset D\right\}.$$

我们称集合F_D为xoy平面上的区域D的决定区域。

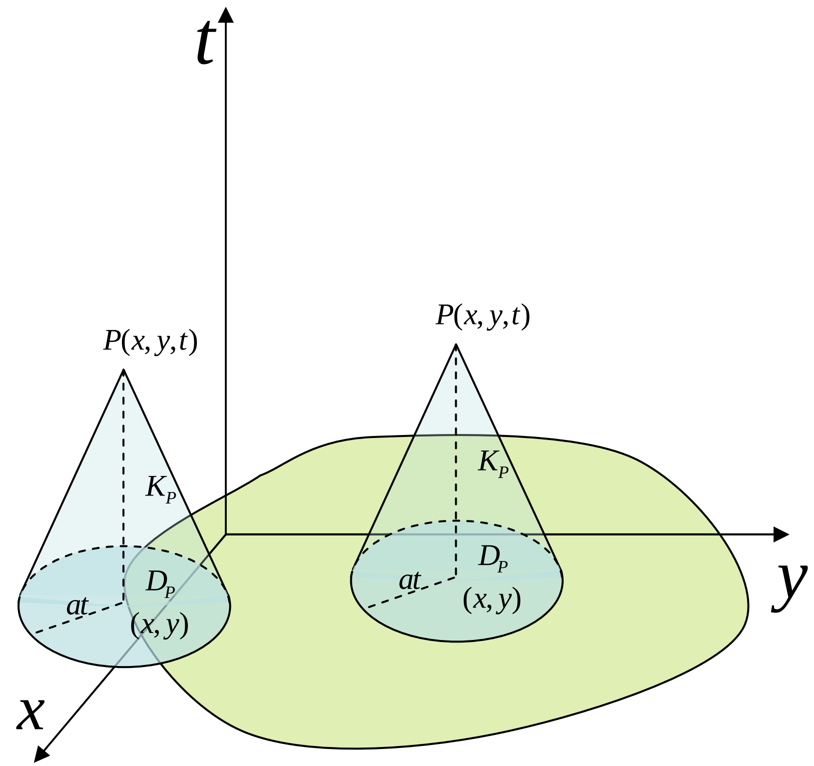


(3)　影响区域

对于xoy平面上的任一区域D，在$f=0$时，给定φ,ψ在D上的值，问上半空间中哪些点上的位移$u(x,y,t)$会受D中的φ,ψ的值影响。 显然，这样的点全体构成的集合J_D可表为：

$$J_D=\left\{P(x,y,t)\middle|D_P\bigcap D\neq\varnothing\right\}.$$

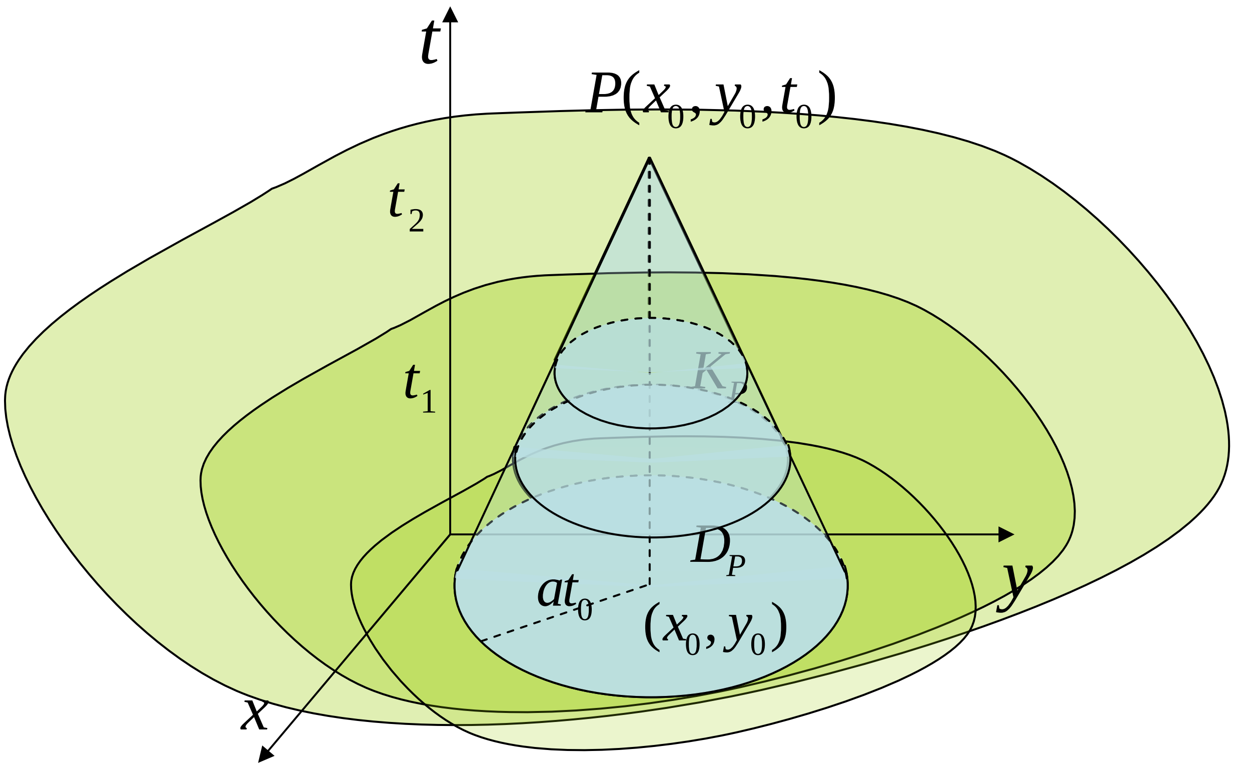
我们称集合J_D为xoy平面上的区域D的影响区域。



(4) 波传播速度

以决定区域为例说明

设初始时刻，在 $P(x_0,y_0,t_0)$ 的决定区域 D_P 外有一波动， 随着时间推延，到 t_1,t_2 时刻波动范围分别如图所示，中间部分未波动的范围逐渐缩小，直到 t_0 时刻缩成一点。这表明在 $[0,t_0]$ 时间段内，波动向内前进了at_0距离，因此波动的传播速度为 a.



二、Huygens原理

我们讨论在$f=0$时，二、三维波动传播特点。

由解公式(2)(4)可知，在 $n=3$时，解 u在 P_0点上的值只依赖于依赖区域 D_{P_0}的边界：

$$\partial D_{P_0}=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=at_0\right\}$$

上的初值 φ,ψ,而与它们在D_{P_0} 内部的值无关。

在$n=2$时，解u在P_0点上的值依赖于整个依赖区域D_{P_0}

$$D_{P_0}=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le at_0\right\}$$

上的初值φ,ψ.

这个差别在物理上产生了截然不同的效果。设想在初始时刻，初值 φ,ψ 只有在区域D_0内不为0，在D_0以外考虑一个定点P_0，记

$$d_{\max}=\max_{Q\in\overline{D_0}}\operatorname{dist}(P_0,Q),$$

$$d_{\min}=\min_{Q\in\overline{D_0}}\operatorname{dist}(P_0,Q),$$

这里 $\operatorname{dist}(P_0,Q)$ 表示 P_0,Q之间的距离。

a.在 $n=2$情形：

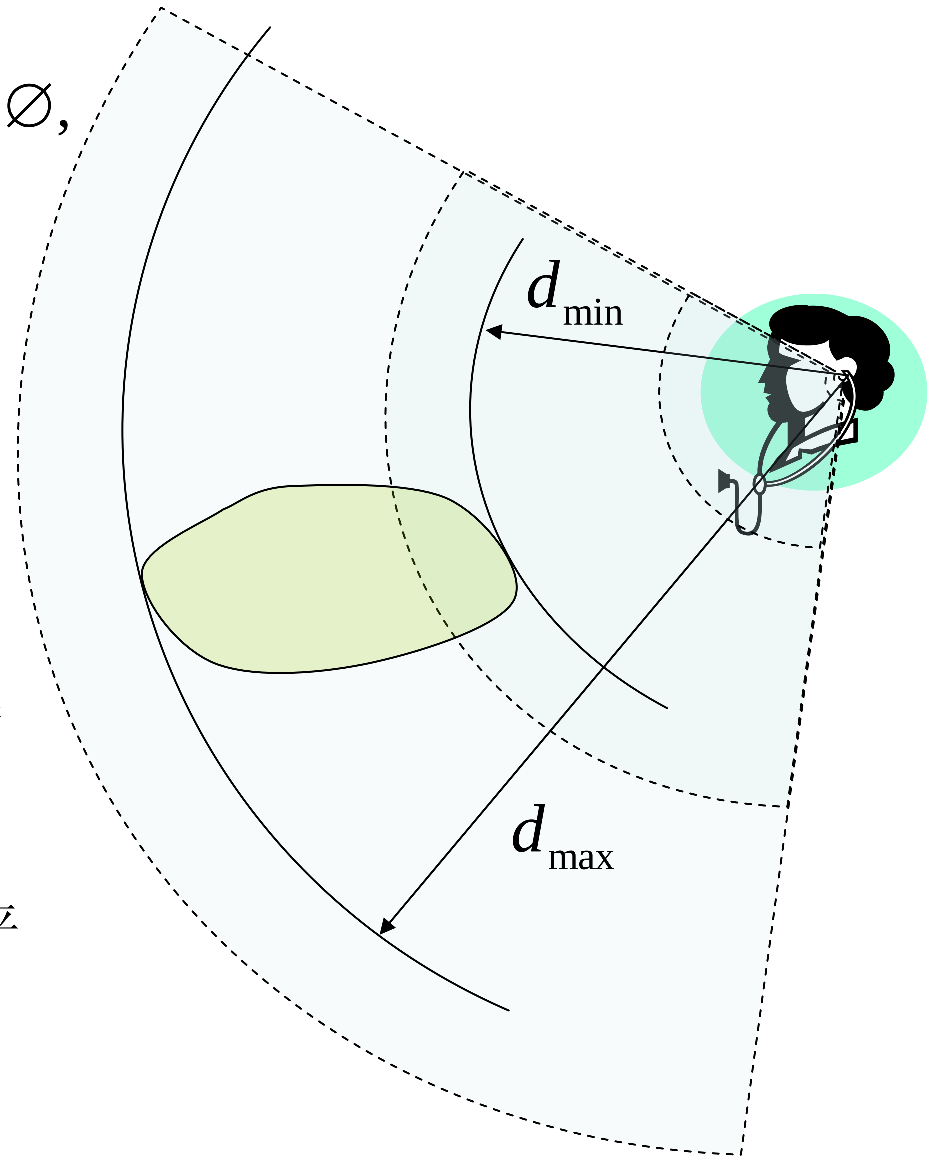
由Poisson公式知：

当 $0 < at_0 < d_{\min}$ 时，由于$D_{P0} \cap D_0 = \varnothing$，因此

$$u(x_0, y_0, t_0) = 0.$$

当 $at_0 > d_{\min}$ 时，由于 $D_{P0} \cap D_0 \neq \varnothing$，因此

$$u(x_0, y_0, t_0) \neq 0.$$



以上讨论表明，在二维情形，波的传播只有波前而无波后。

实例：**水面上的水波**，可近似看作为平面波。

b.在 $n=3$ 情形：

由Kirchhoff公式知：

当 $0<at_0<d_{\min}$ 时，由于 $\partial D_{P_0}\cap D_0=\varnothing$，因此

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=0.$$

当 $d_{\min}<at_0<d_{\max}$ 时，由于 $\partial D_{P_0}\cap D_0\neq\varnothing$，因此

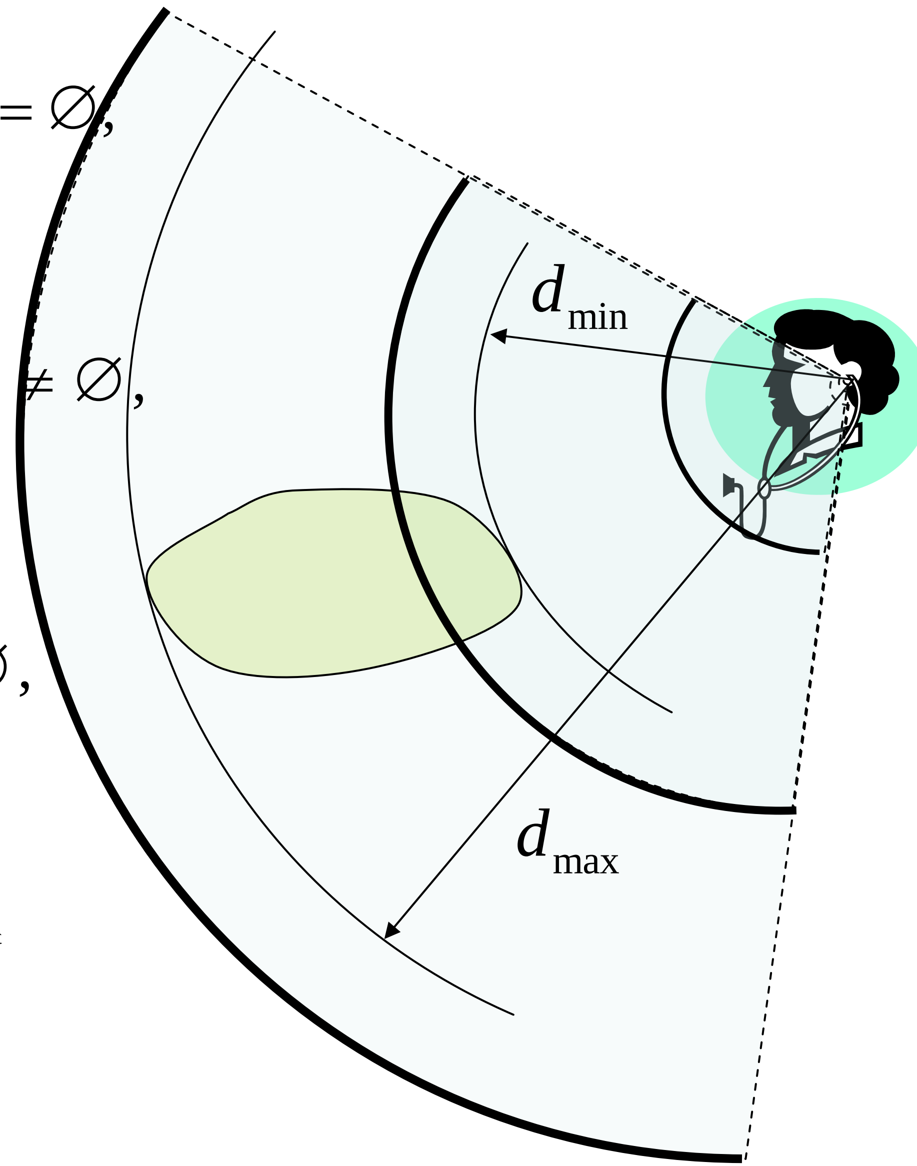
$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)\neq 0.$$

当 $at_0>d_{\max}$ 时，由于 $\partial D_{P_0}\cap D_0=\varnothing$，因此

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=0.$$

以上讨论表明，在三维情形，波的传播有清晰的波前及波后。

实例：空气中的声波。



在波的传播过程中，这种有清晰前阵面和后阵面的现象称为**Huygens原理**或**无后效现象**。

对于波的传播过程中，只有清晰前阵面而无后阵面的现象称为**波的弥漫**，或称这种波**有后效现象**。

三、附注

高维情形的能量不等式仍成立，因而高维波动方程Cauchy问题的解为唯一、稳定。

§ 4.混合问题

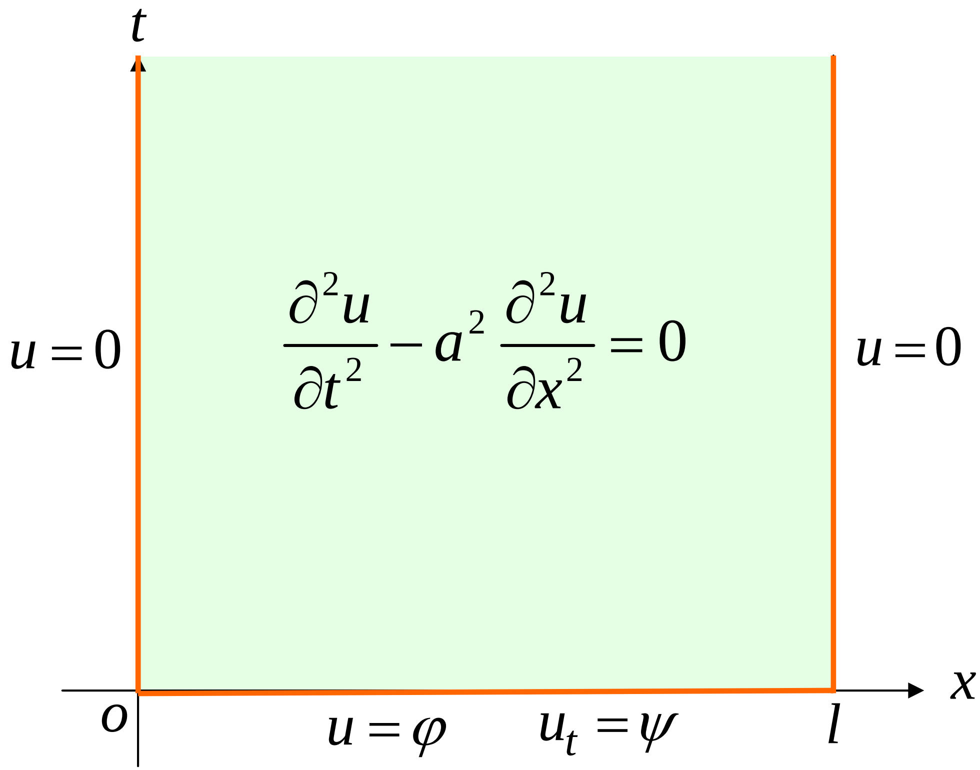
§ 4.1　分离变量法

一、问题

求解一维波动方程混合问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < l, t > 0, & (1) \\
u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, & (2) \\
u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l, & (3) \\
u(0,t) = 0, \qquad t \ge 0, & (4) \\
u(l,t) = 0, \qquad t \ge 0. & (5)
\end{cases}
$$

注意问题中的方程及边界条件均为齐次。



求解思想：

1，将解分解为一列函数的和，即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$

其中 $u_n(x,t)$ $(n=1,2,\ldots)$

只满足方程和边界条件；

2，求分离变量形式的 $u_n(x,t)$：$u_n(x,t)$ $=T_n(t)X_n(x)$，并选取 $T_n(t)$ 中的参量使 $u(x,t)$ 还满足方程初始条件。

上述求解思想来自于物理上波的分解，其中关键是求 $u_n(x,t)$。

二、分离变量法

1.导出特征问题

将变量分离形式解$u(x,t)=X(x)T(t)$代入方程(1)得

$$T''(t)X(x)-a^2T(t)X''(x)=0,$$

除以$a^2X(x)T(t)$得：

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{6}$$

(6)中，左式仅依赖于 t ，它与 x无关，而右式则相反，由二式相等知它们与x,t 均无关，因而为常数，记作$-\lambda$, 于是得：

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{7}$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{8}$$

由(4)(5)得：

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0. \tag{9}$$

由于我们所关心的是问题的非零解，因此$T(t)\neq 0$.，由(9)得

$$X(0)=X(l)=0. \tag{10}$$

于是，我们得到：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & (7) \\ X(0)=X(l)=0. & (10) \end{cases}$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \qquad (8)$$

而函数 $u(x,t)=X(x)T(t)$ ，满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, 0<x<l, t>0, & (1) \\ u(0,t)=0, \qquad t\ge 0, & (4) \\ u(l,t)=0, \qquad t\ge 0. & (5) \end{cases}$$

但 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 一般不满足初始条件(2)和(3)。为了求出定解问题(1)-(5)的解，我们要仔细研究(7)(10)的解。求(7)(10)的非零解的问题就构成一个特征问题。一般地，有以下定义及相应定理：

定义4.1 对于齐次常微分方程定解问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \\ -\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=0, \\ \alpha_2 X'(l)+\beta_2 X(l)=0. \end{cases} \qquad (*)$$

使(*)有非零解的那些λ值称为这个边值问题的特征值；相应的非零解称为对应于这个特征值的特征函数；寻求齐次边值问题(*)的所有特征值和特征函数的问题称为特征问题或称为Sturm-Liouville问题(简称S-L问题)。

定理4.1 对于特征问题(*)，其中 $\alpha_i \ge 0, \beta_i \ge 0, \alpha_i+\beta_i>0, (i=1,2)$，则有：

(I)所有特征值都是非负的实数，当 $\beta_1+\beta_2>0$ 时，所有特征值都是正数。

(II)所有特征值组成一个单调递增且以∞为聚点的序列：

$$0\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

(III)不同特征值对应的特征函数必正交；即对于不同特征值 λ_n, λ_m有：

$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=0.$ 其中 X_n, X_m为 λ_n, λ_m 对应的特征函数。

(IV)任意函数$f(x)\in L_2[0,l]$ 可以按特征函数展开，即：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n X_n(x), \qquad \text{其中} \quad C_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx}.$$

2.解特征问题

对于特征问题(7)(10)

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & (7) \\ X(0)=X(l)=0. & (10) \end{cases}$$

由定理4.1知，其所有特征值均为正数，因此(7)有通解：

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

由(10)得：

$$C_1=0,$$
$$C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

所以： $\sqrt{\lambda}l=n\pi,\quad n=1,2,\cdots.$

从而得： $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots.$

对应特征函数为： $X_n(x)=C_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$

$C_n\neq 0$ 常数. 对同一个特征值，我们取一个特征函数，如 $C_n=1.$

这样就有：

特征值： $$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots.$$

相应的特征函数： $$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

再解(8), $$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{8}$$

得： $$T_n(t)=A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

其中 A_n 、B_n $(n=1,2,\cdots)$ 是常数。

由 $u(x,t)=X(x)T(t)$ ，我们得一列变量分离解：

$$u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

满足方程(1)和边界条件(4)(5)。

3. 叠加变量分离解，由初值确定其系数 A_n 、B_n $(n=1,2,\cdots)$

令：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right),$$

由初始条件得：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),$$
$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x),$$

由Fourier级数知：

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\quad A_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

这样我们得到定解问题(1)-(5)的形式解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right), \tag{11}$$

其中：

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2}{an\pi}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \\ B_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \end{cases}$$

三、分离变量法步骤总结

Step1.令 $u(x,t)=X(x)T(t)$适合方程及边界条件，得特征问题。

Step2. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数，并求出相应的$T(t)$.

Step3.将所有的变量分离形式的特解叠加起来，并利用初值定出所有待定常数。

定义4.1 对于齐次常微分方程定解问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l, \\ -\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=0, \\ \alpha_2 X'(l)+\beta_2 X(l)=0. \end{cases} \qquad (*)$$

使(*)有非零解的那些λ值称为这个边值问题的特征值；相应的非零解称为对应于这个特征值的特征函数；寻求齐次边值问题(*)的所有特征值和特征函数的问题称为特征问题或称为Sturm-Liouville问题(简称S-L问题)。

定理4.1 对于特征问题(*)，其中 $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \alpha_i+\beta_i>0, (i=1,2)$,
则有：

(I)所有特征值都是非负的实数，当 $\beta_1+\beta_2>0$ 时，所有特征值都是正数。

(II)所有特征值组成一个单调递增且以∞为聚点的序列：

$$0\leq\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots, \ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

(III)不同特征值对应的特征函数必正交；即对于不同特征值λ, μ有：

$$\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx=0.$$ 其中 X_λ, X_μ 为λ, μ对应的特征函数。

(IV)任意函数$f(x)\in L_2[0,l]$ 可以按特征函数展开，即：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n X_n(x), \qquad \text{其中} \ C_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx}.$$

四、定理4.1证明

证明 (I) 设$X_\lambda(x)$为对应于特征值λ的特征函数，以$X_\lambda(x)$乘(*)中方程两端并在$[0,l]$上积分得：

$$\int_0^l X_\lambda X_\lambda''(x)dx+\int_0^l \lambda X_\lambda^2(x)dx=0,$$

分部积分得

$$X_\lambda X_\lambda'(x)\Big|_0^l-\int_0^l\left(X_\lambda'(x)\right)^2dx+\int_0^l \lambda X_\lambda^2(x)dx=0,$$

从而得：

$$\lambda=\frac{\int_0^l\left(X_\lambda'(x)\right)^2dx-X_\lambda X_\lambda'(x)\Big|_0^l}{\int_0^l X_\lambda^2(x)dx}. \tag{12}$$

我们只要证上式分子的第二式为非负。 由边界条件得：

$$X_\lambda'(0)X_\lambda(0)=\frac{\alpha_1 X_\lambda'(0)X_\lambda(0)+\beta_1 X_\lambda'(0)X_\lambda(0)}{\alpha_1+\beta_1}$$
$$=\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}[\alpha_1\left(X_\lambda'(0)\right)^2+\beta_1\left(X_\lambda(0)\right)^2],$$

类似可得

$$X_\lambda'(l)X_\lambda(l)=-\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}[\alpha_2\left(X_\lambda'(l)\right)^2+\beta_2\left(X_\lambda(l)\right)^2],$$

因此有：

$$-X_\lambda X_\lambda'(x)\Big|_0^l=\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}[\alpha_1\left(X_\lambda'(0)\right)^2+\beta_1\left(X_\lambda(0)\right)^2]$$
$$+\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}[\alpha_2\left(X_\lambda'(l)\right)^2+\beta_2\left(X_\lambda(l)\right)^2]\geq 0,$$

由(12)得 $\lambda\geq 0$；而 $\lambda=0$ 当且仅当(12)式的分子中二项全为零，于是有：

$$\int_0^l\left(X_\lambda'(x)\right)^2dx=0,$$

$$-X_\lambda X_\lambda'(x)\Big|_0^l=-X_\lambda'(l)X_\lambda(l)+X_\lambda'(0)X_\lambda(0)$$
$$=\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}[\alpha_1\left(X_\lambda'(0)\right)^2+\beta_1\left(X_\lambda(0)\right)^2]$$
$$+\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}[\alpha_2\left(X_\lambda'(l)\right)^2+\beta_2\left(X_\lambda(l)\right)^2]=0,$$

由 $X_\lambda^{'}(x)$的连续性得它们成立当且仅当

$$X_\lambda^{'}(x)=0, 0\le x\le l, \tag{13}$$

$$\frac{\beta_1\left(X_\lambda(0)\right)^2}{\alpha_1+\beta_1}+\frac{\beta_2\left(X_\lambda(l)\right)^2}{\alpha_2+\beta_2}=0, \tag{14}$$

(13)成立当且仅当 $X_\lambda(x)$为常数，又由 $X_\lambda(x)$为特征函数知，(14)成立当且仅当

$$\beta_1=\beta_2=0.$$

(III)设 $X_\lambda(x), X_\mu(x)$ 为对应于特征值λ,μ的特征函数，用 $X_\lambda(x), X_\mu(x)$ 分别乘(*)中方程两端并在 $[0,l]$ 上积分，由分部积分得：

$$X_\mu X_\lambda^{'}(x)\Big|_0^l-\int_0^l X_\lambda^{'}X_\mu^{'}(x)dx+\lambda\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx=0,$$

$$X_\lambda X_\mu^{'}(x)\Big|_0^l-\int_0^l X_\lambda^{'}X_\mu^{'}(x)dx+\mu\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx=0.$$

两式相减得

$$(\lambda-\mu)\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx=X_\lambda X_\mu^{'}(x)\Big|_0^l-X_\mu X_\lambda^{'}(x)\Big|_0^l.$$

$$=J(l)-J(0).$$

其中

$$J(x)=X_\lambda X_\mu^{'}(x)-X_\mu X_\lambda^{'}(x).$$

由(*)中的边界条件可得 $X_\lambda(0), X_\mu(0)$满足

$$-\alpha_1 X_\lambda^{'}(0)+\beta_1 X_\lambda(0)=0,$$

$$-\alpha_1 X_\mu^{'}(0)+\beta_1 X_\mu(0)=0.$$

由齐次线性方程理论得：

$$0=\begin{vmatrix} X_\lambda^{'}(0) & X_\lambda(0) \\ X_\mu^{'}(0) & X_\mu(0) \end{vmatrix} = X_\lambda^{'}(0)X_\mu(0)-X_\mu^{'}(0)X_\lambda(0)$$

$$=-J(0).$$

类似有

$$J(l)=0.$$

因此得

$$(\lambda-\mu)\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx=0,$$

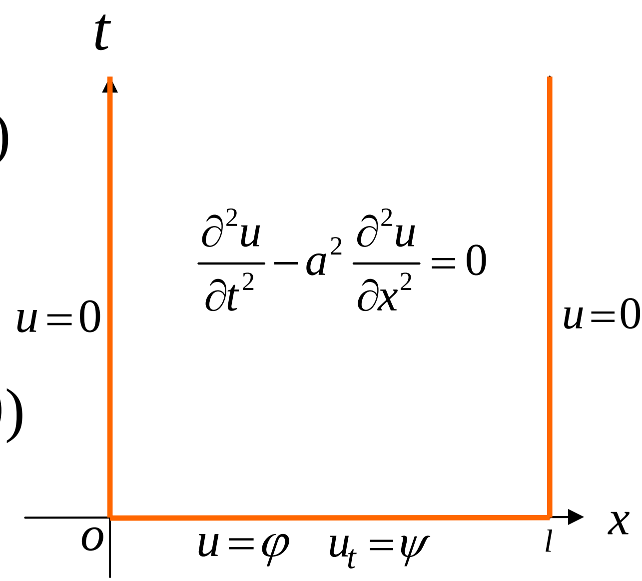
即

$$\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx=0.$$

五、解的验证

相容性条件

在 $(0,0)$ 连续得：



$$u(0,0)=\lim_{x\to 0}u(x,0)=\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\varphi(0)$$
$$=\lim_{t\to 0}u(0,t)=0,$$

在 $(0,0)$ 一阶导数连续得：

$$u_t(0,0)=\lim_{x\to 0}u_t(x,0)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=\psi(0)$$
$$=\lim_{t\to 0}u_t(0,t)=0,$$

在 $(0,0)$ 二阶导数连续得：

$$u_{tt}(0,0)=\lim_{x\to 0}u_{tt}(x,0)=\lim_{x\to 0}a^2u_{xx}(x,0)=\lim_{x\to 0}a^2\varphi''(x)=\varphi''(0)$$
$$=\lim_{t\to 0}u_{tt}(0,t)=0,$$

在 $(l,0)$ 点也有类似结果。

定理4.2 若$\varphi(x)\in C^3[0,l],\psi(x)\in C^2[0,l]$, 以及 $\varphi(x),\psi(x)$在定解区域的角点 $(0,0),(l,0)$ 适合相容性条件：

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0,$$
$$\psi(0)=\psi(l)=0,$$

则由(11)给出的函数$u(x,t)$确实是混合问题(1)-(5)的属于 $C^2(\overline{Q})$ 的解。

证明： 本定理需要证明二方面，首先是证明函数具有连续的二阶导数，其次证明函数满足偏微分方程及边界条件、初始条件。

其中关键是证明函数具有连续的二阶导数，由函数的级数表示形式知，此步骤最重要的是证明导数与级数求和的可交换性，因此，我们只讨论函数的二阶导数与级数求和的可交换问题。

我们考虑级数的系数：

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\
&= -\frac{2l}{an^2\pi^2}\psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{2l}{an^2\pi^2}\int_0^l \psi'(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \\
&= \frac{2l^2}{an^3\pi^3}\psi'(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \frac{2l^2}{an^3\pi^3}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\
&= -\frac{2l^2}{an^3\pi^3}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\
&= -\frac{l^3}{an^3\pi^3}a_n,
\end{aligned}
$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \\
&= -\frac{2}{n\pi}\varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{2}{an\pi}\int_0^l \varphi'(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{2l}{n^2\pi^2}\varphi'(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^l \varphi''(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{2l^2}{n^3\pi^3}\varphi''(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \frac{2l^2}{n^3\pi^3}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= -\frac{2l^2}{n^3\pi^3}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx = -\frac{l^3}{n^3\pi^3}b_n,
\end{aligned}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx.$$

由以上计算我们可得 $u_n(x,t)$ 在 $\bar{Q}=\left\{(x,t)\middle|0\le x\le l,\,0\le t\le T\right\}$ 上有估计：

$$\left|u_n(x,t)\right|\le\left|A_n\right|+\left|B_n\right|=O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\left|Du_n(x,t)\right|\le\frac{n\pi(a+1)}{l}\left(\left|A_n\right|+\left|B_n\right|\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\begin{aligned}\left|D^2u_n(x,t)\right|&\le\left(\frac{n\pi(a+1)}{l}\right)^2\left(\left|A_n\right|+\left|B_n\right|\right)\\&=\left(\frac{n\pi(a+1)}{l}\right)^2\left(\left|\frac{l^3}{an^3\pi^3}a_n\right|+\left|\frac{l^3}{n^3\pi^3}b_n\right|\right)\\&=(a+1)\left(\left|\frac{l}{an\pi}a_n\right|+\left|\frac{l}{n\pi}b_n\right|\right)\\&\le\left|a_n\right|^2+\left|b_n\right|^2+2\frac{l^2(a+1)^2(a^2+1)}{a^2\pi^2}\left(\frac{1}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

由Weierstrass判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u_n(x,t),\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t),$$

在 $\bar{Q}$ 上绝对一致收敛。

又由于 $\varphi'''(x), \psi''(x)$ 连续，由Fourier级数性质知：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$$

在 $\bar{Q}$ 上绝对一致收敛。又由Weierstrass判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x,t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(x,t),$$

在 $\bar{Q}$上绝对一致收敛。从而 $u(x,t)$ 关于 x,t 的二阶导数可与级数求和交换。

六、非齐次问题处理法

1.带非齐次边界条件问题

方法：边界条件齐次化

对于问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ -\alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = g_2(t), \qquad t \ge 0, & (15) \\ \alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = g_2(t), \qquad t \ge 0. & (16) \end{cases}$$

作函数变换

$$v(x,t) = u(x,t) + P_1(x) g_1(t) + P_2(x) g_2(t), \tag{17}$$

其中 $P_1(x), P_2(x)$是关于 x 的次数不超过二次的多项式。

$v(x,t)$ 满足齐次边界条件，即：

$$-\alpha_1 v_x(0,t) + \beta_1 v(0,t) = 0, \qquad t \ge 0, \tag{18}$$

$$\alpha_2 v_x(l,t) + \beta_2 v(l,t) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{19}$$

将(17)代入(18)(19)并利用(15)(16)，根据 $P_1(x), P_2(x)$ 的多项式假设，可用待定系数法确定$P_1(x), P_2(x)$ 的系数，从而确定函数变换(17).

于是问题转化为以下形式的带齐次边界条件的非齐次方程定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \bar{f}(x,t), 0<x<l, t>0, & (20) \\ v(x,0) = \bar{\varphi}(x), \qquad 0 \le x \le l, & (21) \\ v_t(x,0) = \bar{\psi}(x), \qquad 0 \le x \le l, & (22) \\ -\alpha_1 v_x(0,t) + \beta_1 v(0,t) = 0, \qquad t \ge 0, & (23) \\ \alpha_2 v_x(l,t) + \beta_2 v(l,t) = 0, \qquad t \ge 0. & (24) \end{cases}$$

$P_1(x), P_2(x)$ 取法：

$$P_i(x) = \begin{cases} a_i x + b_i, & \beta_1 + \beta_2 > 0, \\ x(a_i x + b_i), & \beta_1 = \beta_2 = 0. \end{cases}$$

2.非齐次方程情形

步骤：

Step1.将 $v(x,t) = X(x)T(t)$ 代入方程(20)对应的齐次方程及边界条件，得特征问题。

Step2. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数 $\lambda_n, X_n(x)$.

Step3. 特解展开，将问题中所有的已知、未知函数用特征函数展开。

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t),$$

$$\overline{f}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)f_n(t),$$

$$\overline{\varphi}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),\qquad \overline{\psi}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n X_n(x),$$

其中

$$f_n(t)=\frac{\int_0^l \overline{f}(x,t)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},$$

$$\varphi_n=\frac{\int_0^l \overline{\varphi}(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},\ \ \psi_n=\frac{\int_0^l \overline{\psi}(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx}.$$

将它们代入(20)(21)(22)即得$T_n(t)$所满足的常微分方程定解问题。

Step4. 求解 $T_n(t)$ 即得问题(20)-(24)之解，从而由(17)得原问题之解。

分离变量法求解步骤总结：

Step1.边界条件齐次化。

作函数变换

$$v(x,t)=u(x,t)+P_1(x)g_1(t)+P_2(x)g_2(t),$$

其中 $P_i(x)$ (i=1,2) 适当选取，使

$v(x,t)$ 满足齐次边界条件。

Step2.将 $v(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程(20)对应的齐次方程及边界条件，导出相应的特征问题。

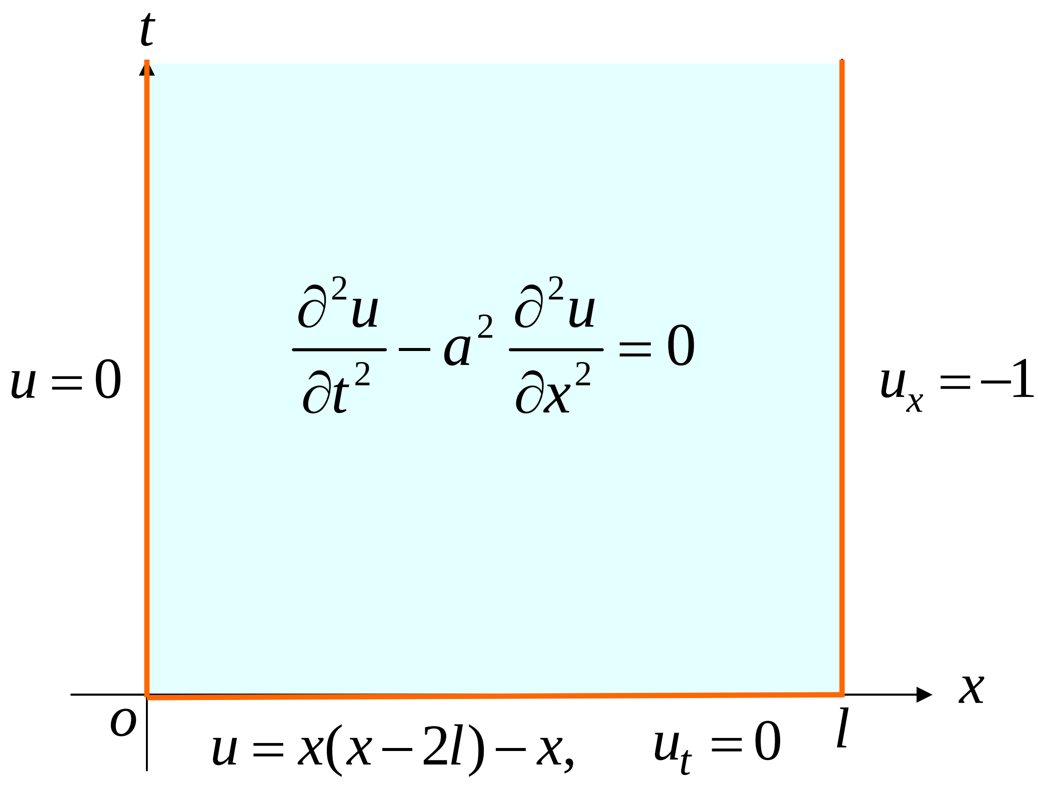
Step3. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数 $\lambda_n, X_n(x)$.

Step4. 按特征函数系展开：将问题中所有的已知、未知函数用特征函数展开。代入方程及初始条件建立 $T_n(t)$所满足的常微分方程定解问题。

Step5. 求解 $T_n(t)$ 即得问题(20)-(24)之解，从而由(17)得原问题之解。

例1， 求解下述混合问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\
u(x,0) = x(x-2l) - x, & 0 \le x \le l, \\
u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l, \\
u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\
u_x(l,t) = -1, & t \ge 0.
\end{cases}
$$



第一步：边界条件齐次化。 令 $v(x,t) = u(x,t) + P(x,t),$

要求 $v_x(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t > 0.$

即：
$$\begin{cases} v(0,t)=0+P(0,t)=0, \\ v_x(l,t)=-1+P_x(l,t)=0. \end{cases}$$

可取：
$$P(x,t)=x,$$

所以，
$$v(x,t)=u(x,t)+x,$$
满足：

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & 0<x<l,\ \ t>0, \\ v(x,0)=x(x-2l), & 0\le x\le l, \\ v_t(x,0)=0, & 0\le x\le l, \\ v(0,t)=0, & t\ge 0, \\ v_x(l,t)=0, & t\ge 0. \end{cases}$$

第二步：导出特征问题。

令 $v(x,t)=T(t)X(x)$, 代入相应的齐次方程：$v_{tt}-a^2v_{xx}=0$,

得：
$$T''(t)X(x)-a^2T(t)X''(x)=0,$$

写成：
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

即
$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0\le x\le l$$

再由边界条件 $v(0,t)=v_x(l,t)=0$ 及 $T(t)$ 不恒等于零，得：

$$X(0)=X'(l)=0.$$

第三步：求解特征问题：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0\le x\le l & (1) \\ X(0)=X'(l)=0. & (2) \end{cases}$$

①，$\lambda<0$, (1)的通解为：$X=C_1\exp(\sqrt{-\lambda}x)+C_2\exp(-\sqrt{-\lambda}x)$,

没有满足(2)的非零解。

②，$\lambda=0$, (1)的通解为：$X=C_1x+C_2$,

也没有满足(2)的非零解。

③，$\lambda>0$, (1)的通解为：$X=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$,

再由(2)得：$C_2=0$, $C_1\cos\sqrt{\lambda}l=0$, 所以，

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2\pi^2, \quad X_n=C_1\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right), \ C_1\ne 0,\ n=0,1,\ldots$$

取 $$X_n=\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right),\quad n=0,1,\ldots$$

第四步：令

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right).$$

要用非齐次项和初始条件求出 $T_n(t)$

由： $$v_{tt}-a^2v_{xx}=0,\qquad v_{tt}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)$$

$$v_{xx}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n''(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nT_n(t)X_n(x)$$

所以：

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)\right]X_n(x)=0,$$

从面得 $T_n(t)$ 满足的方程：

$$T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0,\ t>0,\ \ n=0,1\ldots$$

（注意：若 v 非齐次方程 $v_{tt}-a^2v_{xx}=f$，则也要将 f 按 $\{X_n(x)\}$ 展开，此时 $T_n(t)$ 与 f 有关。）

下面求 $T_n(t)$ 满足的初始条件。

$$0=v_t(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n{}'(0)X_n(x),$$

所以，

$$T_n{}'(0)=0,\quad n=0,1\ldots$$

又，

$$x(x-2l)=v(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)X_n(x),$$

而，

$$x(x-2l)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nX_n(x),$$

$$c_n=\frac{\int_0^l x(x-2l)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx}=\frac{\int_0^l x(x-2l)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx}{\int_0^l \sin^2\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx}$$

所以，
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(T_n(0)-c_n\right)X_n(x)=0.$$

于是，
$$T_n(0)=c_n,\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

从而， $T_n(t)$ $(n=0,1,\ldots)$ 是下述常微分方程初值问题的解：

$$\begin{cases} T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0, & t>0, \\ T_n(0)=c_n, & T_n'(0)=0. \end{cases}$$

解出得：
$$T_n(t)=c_n\cos\left(at\sqrt{\lambda_n}\right)$$
$$=c_n\cos\left[\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right],\quad (n=0,1,\ldots)$$

下面计算 c_n

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx = \frac{l}{2}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$c_n = \frac{\int_0^l x(x-2l)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx}{\int_0^l \sin^2\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx}$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l x(x-2l)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)dx = \ldots\ldots$$

$$= \frac{2^5 l^2}{(2n+1)^3\pi^3}, \qquad (n = 0,1,2\ldots)$$

$$T_n(t) = c_n \cos\left[\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]$$

$$= \frac{2^5 l^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left[\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]$$

于是，$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^5 l^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left[\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right].$$

原问题的解为：

$$u(x,t) = -x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^5 l^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left[\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right].$$

可以证明：上面所得到的解

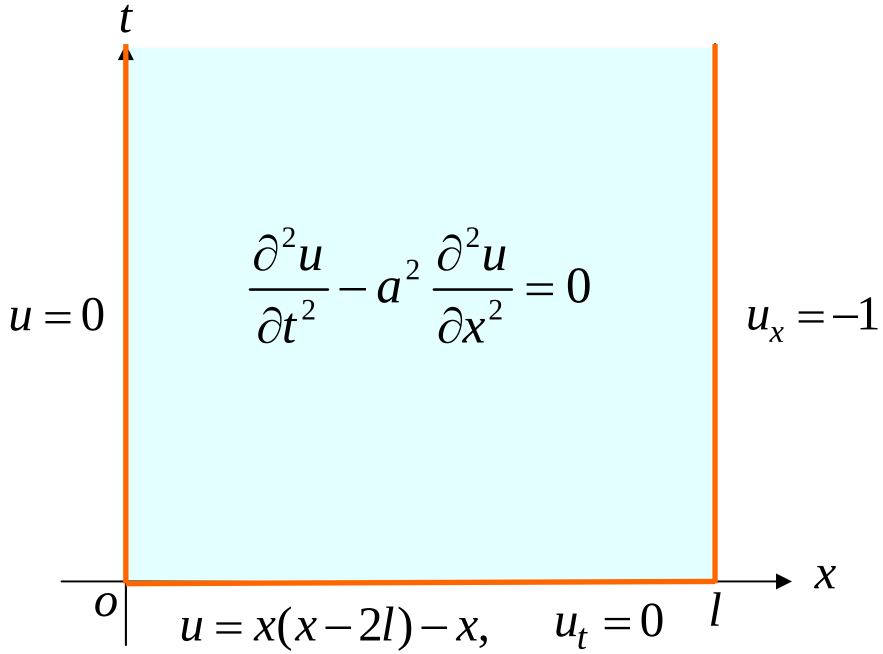
$$u(x,t)=C^2\left(\overline{Q}\setminus\{(0,0)\}\right)\cap C^1(\overline{Q}),$$

$$\overline{Q}=[0,l]\times[0,\infty).$$

u_{xx} 和 u_{tt} 在角点 $(0,0)$

不连续，这是因为在该点

二阶的相容性条件不成立。



作　业

- Page 114, 26 (3).

例2， 求解下述热传导方程的混合问题：

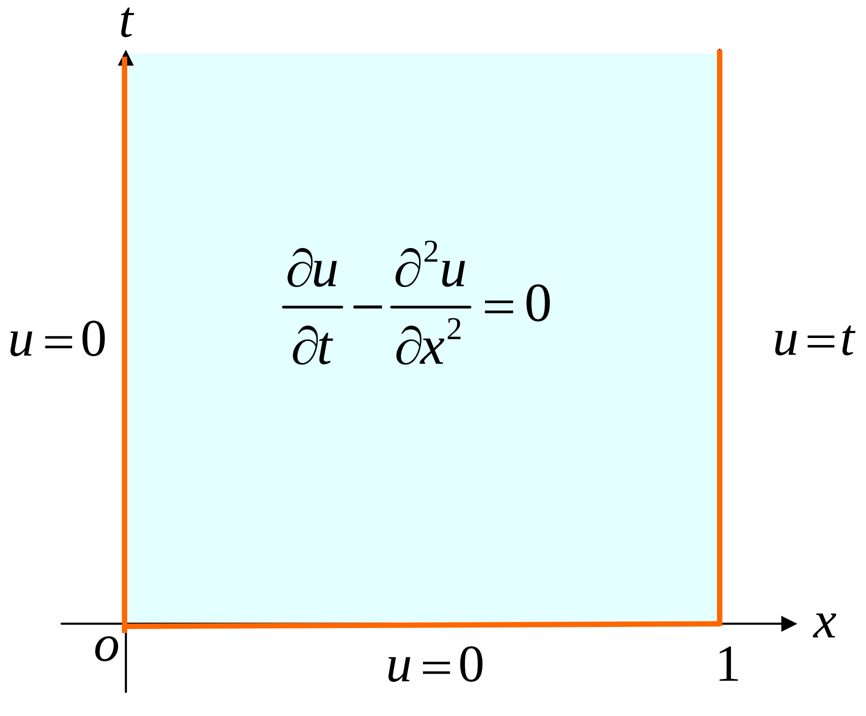
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(1,t) = t, & t \ge 0. \end{cases}$$

注：在右下角点相容性条件

$$\lim_{t\to 0+} u_t(1,t) = \lim_{x\to 1-} u_{xx}(x,0)$$

因此 $u_t(x,t)$ 与 $u_{xx}(x,t)$

在点 $(1,0)$ 必不连续。



第一步：边界条件齐次化。 令 $v(x,t)=u(x,t)+P(x,t)$,

要求 $v(0,t)=0, \quad v(1,t)=0, \quad t>0.$

即：
$$\begin{cases} v(0,t)=0+P(0,t)=0, \\ v(1,t)=t+P(1,t)=0. \end{cases}$$

可取：
$$P(x,t)=-xt,$$

所以，
$$v(x,t)=u(x,t)-xt,$$
满足：
$$\begin{cases} v_t-v_{xx}=-x, & 0<x<1, \quad t>0, \\ v(x,0)=0, & 0\le x\le 1, \\ v(0,t)=0, & t\ge 0, \\ v(1,t)=0, & t\ge 0. \end{cases}$$

第二步：导出特征问题。

令 $v(x,t)=T(t)X(x)$, 代入相应的齐次方程：$v_t - v_{xx} = 0,$

得：
$$T'(t)X(x)-T(t)X''(x)=0,$$

写成：
$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

即
$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0\le x\le 1$$

再由边界条件 $v(0,t)=v(1,t)=0$ 及 $T(t)$ 不恒等于零，得：

$$X(0)=X(1)=0.$$

第三步：求解特征问题：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0\le x\le 1 \\ X(0)=X(1)=0. \end{cases}$$

由以前的结果，我们知：

特征值为： $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n=1,2,\ldots$

特征函数： $X_n = \sin\left(n\pi x\right), \quad n=1,2,\ldots$

所以： $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(n\pi x\right),$

第四步：求 $T_n(t)$ (n=1,2,...)

由方程

$$-x = v_t - v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)X_n(x) - T_n(t)X_n''(x)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t) + \lambda_n T_n(t)\right]X_n(x)$$

另一方面：$$-x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)$$

$$c_n = \frac{-\int_0^l xX_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx} = -\frac{\int_0^l x\sin n\pi x dx}{\int_0^l \sin^2 n\pi x dx} = -2\int_0^l x\sin n\pi x dx$$

经过简单计算，得：

$$c_n = (-1)^n \frac{2}{n\pi}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

而由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t) + \lambda_n T_n(t)\right]X_n(x) = -x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)$$

得：

$$T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = c_n, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

再由

$$0 = v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x),$$

故

$$T_n(0) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

于是：

$$\begin{cases} T_n'(t)+n^2\pi^2T_n(t)=(-1)^n\dfrac{2}{n\pi}, \quad t>0, \\ T_n(0)=0, \qquad n=1,2,\ldots \end{cases}$$

解得

$$T_n(t)=(-1)^n\frac{2}{n^3\pi^3}\left[1-\exp(-n^2\pi^2t)\right], \quad t\geq 0, \quad n=1,2,\ldots$$

从而

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3\pi^3}\left[1-\exp(-n^2\pi^2t)\right]\sin\left(n\pi x\right),$$

原问题的解为：

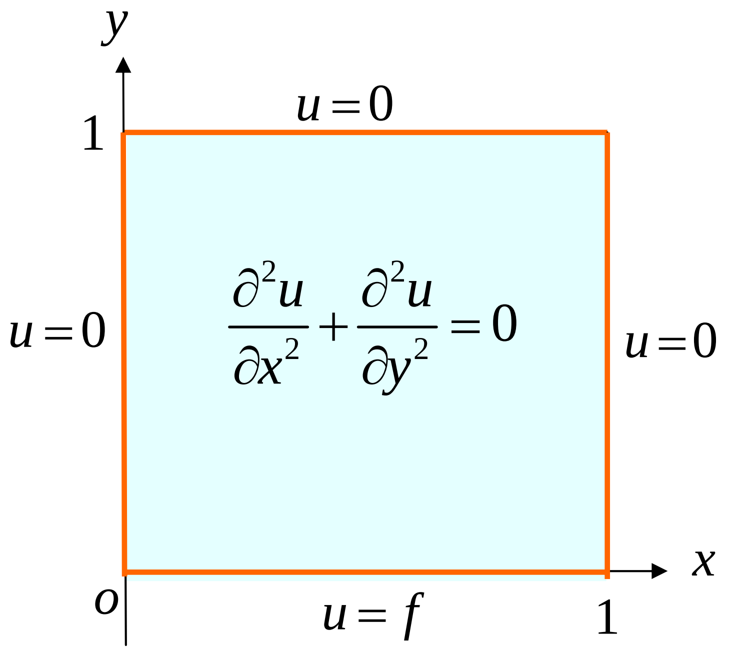
$$u(x,t)=xt+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3\pi^3}\left[1-\exp(-n^2\pi^2t)\right]\sin\left(n\pi x\right).$$

例2， 求解下述位势方程的边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u(0,y)=u(1,y)=0, & 0\le y\le 1, \\ u(x,0)=f(x),\ u(x,1)=0, & 0\le x\le 1. \end{cases}$$

解：

注意到边界条件中，左右边界的边界条件是齐次的，我们可用它来导出特征问题。



第一步：导出特征问题。

令$u(x,y)=Y(y)X(x)$,代入相应的齐次方程：$u_{xx}+u_{yy}=0$,

得：
$$Y''(y)X(x)+Y(y)X''(x)=0,$$

写成：
$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\frac{X''(x)}{-X(x)}=\lambda,$$

即
$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0\le x\le 1$$

再由边界条件$u(0,y)=u(1,y)=0$ 及 $Y(y)$不恒等于零，得：
$$X(0)=X(1)=0.$$

第二步：求解特征问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

由以前的结果，我们知：

特征值为： $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

特征函数： $X_n = \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots$

所以： $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin(n\pi x),$

第三步：求 $Y_n(y)$ (n=1,2,...)

由方程

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[Y_n''(y)X_n(x) + Y_n(y)X_n''(x)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y)\right]X_n(x)$$

所以： $$Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0, \quad 0 \le y \le 1.$$

即 $$Y_n''(y) - n^2\pi^2 Y_n(y) = 0, \quad 0 \le y \le 1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

由 $$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(0)X_n(x),$$

以及 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x),$$

其中，

$$f_n=\frac{\int_0^1 f(x)X_n(x)dx}{\int_0^1 X_n^2(x)dx}=\frac{\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx}{\int_0^1 \sin^2 n\pi x dx}$$

$$=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx,\quad n=1,2,\ldots$$

得， $$Y_n(0)=f_n,\qquad n=1,2,\ldots$$

又由 $0=u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(1)X_n(x),$ 得 $Y_n(1)=0,\ \ n=1,2,\ldots$

所以，对 $n=1,2,\ldots$

$$\begin{cases} Y_n''(y)-n^2\pi^2 Y_n(y)=0, \quad 0\le y\le 1, \\ Y_n(0)=f_n, \quad Y_n(1)=0. \end{cases}$$

上述常微分方程的边值问题有唯一解：

$$Y_n(y)=f_n\frac{e^{n\pi(1-y)}-e^{-n\pi(1-y)}}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}, \quad n=1,2,\ldots$$

于是，方程的解为：

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\frac{e^{n\pi(1-y)}-e^{-n\pi(1-y)}}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}\sin\left(n\pi x\right).$$

作　业

- Page 176, 9 (1), (6)。

§4.2 物理意义，驻波法与共振

一、分离变量法的物理意义

以两端固定的一维弦振动方程的定解问题为例加以说明。对于定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ 0<x<l,\ t>0, & (1)\\
u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l, & (2)\\
u_t(x,0)=\psi(x), \qquad 0\le x\le l, & (3)\\
u(0,t)=0, \qquad t\ge 0, & (4)\\
u(l,t)=0, \qquad t\ge 0. & (5)
\end{cases}
$$

其形式解为：

$$
u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right), \qquad (6)
$$

其中：

$$
A_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.
$$

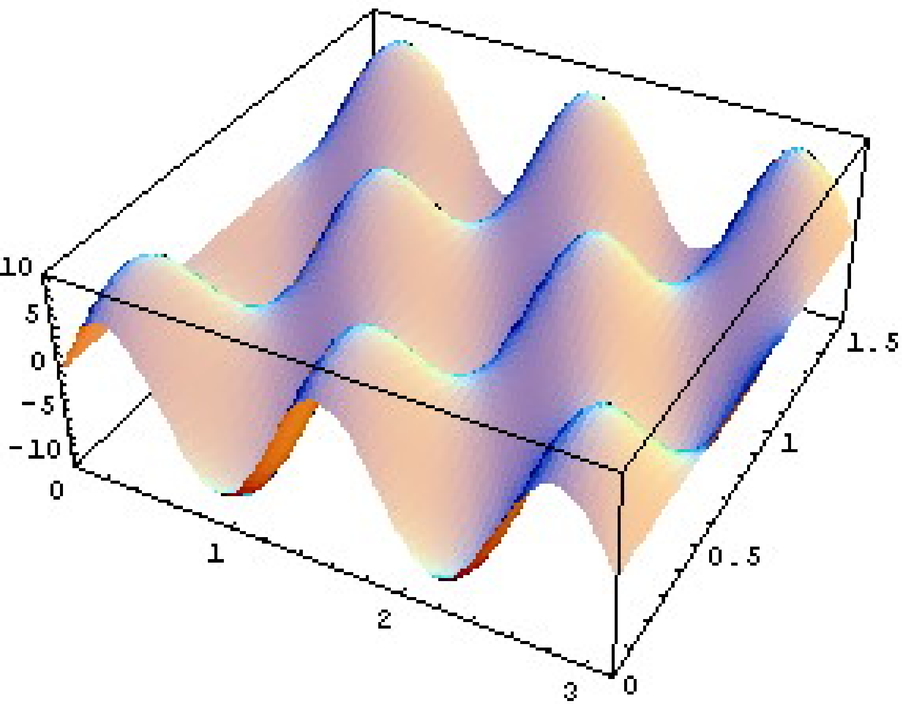
$$
B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,
$$

由于 $u_n(x,t)$ 可表为：

$$u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)$$
$$=N_n\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\alpha_n\right)$$

其中：

$$N_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2},\qquad \alpha_n=\arctan\frac{B_n}{A_n}.$$



$$u_n(x,t)=N_n\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\alpha_n\right).$$

$N_n=10,\ l=\pi,\ n=5,\ a=1,$

$\alpha_n=\pi/4.$

（一）驻波

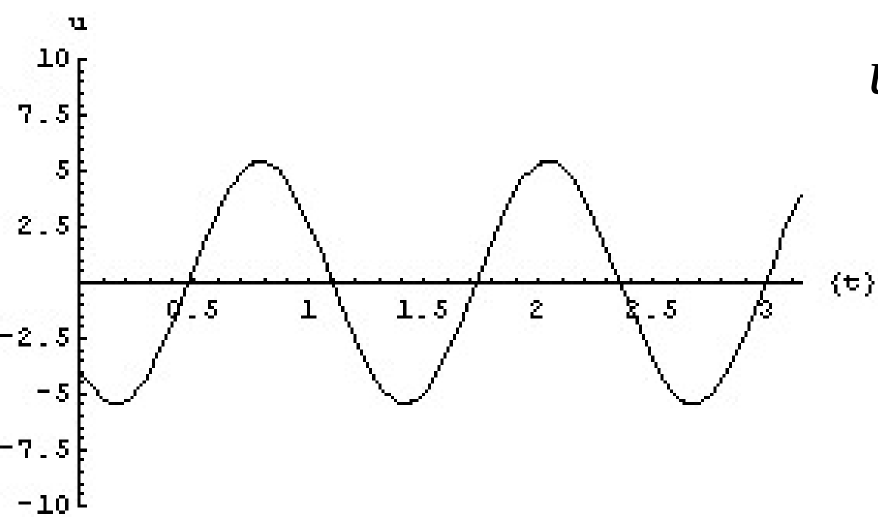
1、当 x_0 固定时，振动元素 $u_n(x_0,t)$ 它描述的是 x_0 这一点所作的运动为简谐振动，其振幅为

$$N_n \sin\frac{n\pi}{l}x_0,$$

频率为

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda} = \frac{an\pi}{l},$$

初位相为 α_n.



$$u_n(x_0,t) = N_n \sin\frac{n\pi}{l}x_0 \sin\left(\frac{an\pi}{l}t + \alpha_n\right).$$

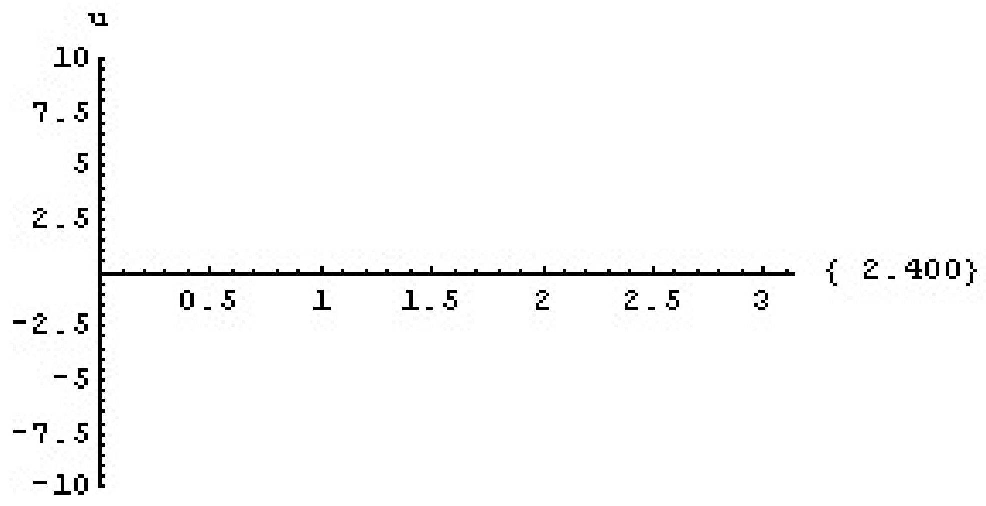
$$N_n = 10, l = \pi, n = 5, a = 1,$$
$$\alpha_n = \pi/4, x_0 = 2.$$

2、当 t 固定时，振动元素 $u_n(x,t_0)$ 它描述的是 t_0 这一时刻弦的形状。其特点是

①在 $x=0,\frac{l}{n},\frac{2l}{n},\frac{3l}{n},\cdots,\frac{(n-1)l}{n},l$ 时，弦上对应点保持不动，振幅为0。

②在 $x=0,\frac{l}{2n},\frac{3l}{2n},\frac{5l}{2n},\cdots,\frac{(2n-1)l}{2n}$ 时，弦上对应点保持振幅最大$\pm N_n$。

物理上，将具有1、2特点的弦的运动称为驻波。因此，在物理上也把分离变量法称为驻波法。



（二）弦乐演奏原理

弦乐发出声音的主要原理是弦的振动引起乐器共鸣箱的共鸣，从而发出声音。弦振动的频率大小对应着声音音调的高低，弦振动的振幅大小对应着声音的大小。

根据弦乐结构，其弦的运动为两端固定的波动问题，因此，当拨动弦引起弦振动时，弦的位移满足(1)-(5)，其解形为(6)，且由上节讨论我们可以得到

$$A_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = -\frac{l^3}{an^3\pi^3}a_n,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \to 0, \quad (n\to\infty).$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = -\frac{l^3}{n^3\pi^3}b_n,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \to 0, \quad (n\to\infty).$$

将波动分解成驻波叠加，各驻波的振幅为

$$N_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4},$$

因此，第一驻波的振幅比其余驻波叠加的振幅的四倍还要大，从而，第一驻波所引发的声音也比其余驻波合起来所发出的声音大几倍，于是，我们实际听到的主要声音是第一驻波所发出的声音，这一声音是乐器的基音，它决定了乐器的主音调，其频率为：

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

其中 T 为张力，ρ 为密度，乐器的音调可用弦的张力、密度及弦长来控制，弦拉得紧或弦长缩短音调随之升高，较粗弦则发出较低声音。

其余驻波合起来所发出的声音为泛音，它们构成了乐器的音色。

二、共振现象

对于两端固定处于静止状态的弦施加周期性外力时，弦的位移满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A(x)\sin\omega t, 0<x<l, t>0, & (1) \\ u(x,0)=0, \qquad 0 \le x \le l, & (2) \\ u_t(x,0)=0, \qquad 0 \le x \le l, & (3) \\ u(0,t)=0, \qquad t \ge 0, & (4) \\ u(l,t)=0, \qquad t \ge 0. & (5) \end{cases}$$

用分离变量法求其解得：

当 $\omega \ne \omega_n = \dfrac{an\pi}{l}, n=1,2,\cdots$ 时，

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{la_n}{an\pi} \sin\frac{n\pi}{l} x \int_0^t \sin\omega\tau \sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n \sin\omega t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l A(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx.$ 当 $A(x)\in C^1[0,l]$ ，且 $A(0)=A(l)=0$ 时，上述形式解确实为问题的解。其振幅

$$N\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\omega_n\,|\,\omega^2-\omega_n^2\,|}(\omega+\omega_n),$$

为有界，不随时间变化。

当 $\omega=\omega_k=\dfrac{ak\pi}{l}$ 时

$$u(x,t)=\sum_{\substack{n=1\\n\ne k}}^{\infty}\frac{a_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t-\omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$+\left(\frac{a_k}{2\omega_k}\sin\omega_k t-\frac{a_k}{2\omega_k}t\cos\omega_k t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

当 t 充分大时有

$$N \geq \frac{a_k}{2\omega_k} t \cos \omega_k t - \frac{a_k}{2\omega_k} |\sin \omega_k t| - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n |\omega^2 - \omega_n^2|} (\omega + \omega_n),$$

在一些特定的时间段振幅会越来越大，这就是共振。

$\omega_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ —— 物体的固有频率；

ω —— 外力的频率。

共振现象 —— 当外力的频率等于物体的固有频率时，物体的振幅随时间增加而趋于无穷。

共振的利用 —— 乐器的共鸣箱、收音机选台等等。

共振的避免 —— 建筑等等。

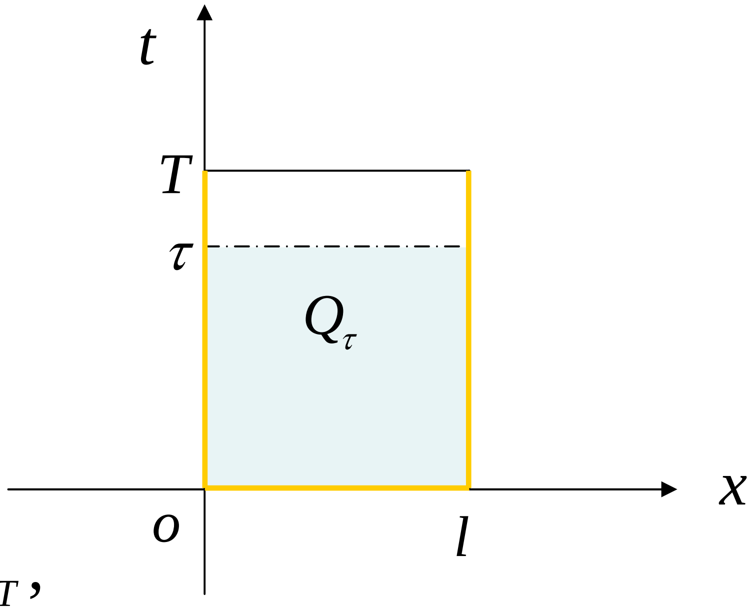
4.3 能量不等式

为研究波动方程混合问题解的唯一性和稳定性，本节我们将对一维波动方程混合问题建立能量不等式。

一、记号

对于任意的 $T \geq 0$ ，及 $0 \leq \tau \leq T$，记：

$$Q_\tau = \left\{(x,t) \middle| 0 < x < l, 0 < t \leq \tau\right\},$$



本节讨论 Q_T上的混合问题：

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{1}$$

注意：在上边界不能施加条件！！

二、能量不等式

定理4.3 设 $u\in C^1(\overline{Q_T})\cap C^2(Q_T)$为定解问题(1)的解, 则存在只依赖于$T$ 的常数 M ，使得：

$$\int_0^l\left[u_t^2(x,\tau)+a^2u_x^2(x,\tau)\right]dx\le M\left[\int_0^l\left[\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx+\iint_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]$$

$$\iint_{Q_\tau}\left[u_t^2(x,t)+a^2u_x^2(x,t)\right]dxdt\le M\left[\int_0^l\left[\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx+\iint_{Q_\tau} f^2(x,t)dxdt\right]$$

其中$0\le\tau\le T$, 且在第一个不等式中，当 $f=0$ 时，$M=1$, 不等式成为等式。

本定理的证明与§2.4 中定理2.3中的能量不等式证明类似。

证明：　　Step1　方程两边同乘以 $\frac{\partial u}{\partial t}$，并且在 Q_τ 上积分得：

$$\iint_{Q_\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\iint_{Q_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}f(x,t)dxdt, \qquad (2)$$

Step2　应用Green公式计算左式积分

$$\begin{aligned}\iint_{Q_\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt &=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dtdx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)^2dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l\psi^2(x)dx\end{aligned}$$

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt = \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt$$

$$= -\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dxdt + \int_0^\tau \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=l} dt$$

由边界条件 $u(0,t)=u(l,t)=0,$ 得： $u_t(0,t)=u_t(l,t)=0,$

所以，

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt = -\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dxdt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dtdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\right)^2 dx$$

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \varphi^2(x)dx$$

代入方程，得：

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\psi^2(x) + a^2\varphi_x^2(x)\right]dx + \iint_{Q_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}f(x,t)dxdt,$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^l\left[\psi^2 + a^2\varphi_x^2\right]dx + \iint_{Q_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + f^2(x,t)\right]dxdt$$

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau) \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) \right)^2 \right] dx$$

$$\le \int_0^l \left[\psi^2 + a^2 \varphi_x^2 \right] dx + \iint_{Q_\tau} 2 \frac{\partial u}{\partial t} f(x,t) dxdt$$

$$\le \int_0^l \left[\psi^2 + a^2 \varphi_x^2 \right] dx + \int_0^\tau \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + f^2(x,t) \right] dxdt$$

$$= F(\tau) + G(\tau),$$

其中

$$F(\tau) = \int_0^l \left[\psi^2 + a^2 \varphi_x^2 \right] dx + \iint_{Q_\tau} f^2(x,t) dxdt,$$

$$G(\tau) = \int_0^\tau \left\{ \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} dt,$$

因此有

$$G'(\tau) = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \Bigg|_{t=\tau} dx,$$

从而不等式(2)可以表为：

$$G'(\tau) \le F(\tau) + G(\tau), \tag{3}$$

——Gronwall不等式。由Gronwall不等式解法，(3)两边同乘以 $e^{-\tau}$ 得：

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\tau} G(\tau) \right] \le e^{-\tau} F(\tau),$$

在 $[0, \tau]$ 积分得

$$e^{-\tau} G(\tau) \le \int_0^\tau e^{-s} F(s) ds$$

$$G(\tau) \le \int_0^\tau e^{\tau - s} F(s) ds \le \int_0^\tau e^{\tau - s} F(\tau) ds$$

$$\le F(\tau) \int_0^\tau e^{\tau - s} ds \le F(\tau)\left(e^\tau - 1 \right). \tag{4}$$

结合(2)(3)(4)得：

$$\begin{aligned} G(\tau) &\le F(\tau)\left(e^{\tau}-1\right) \\ &\le e^{\tau}F(\tau) \le e^{t_0}F(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg|_{t=\tau} dx &= G'(\tau) \le F(\tau)+G(\tau) \\ &\le F(\tau)+F(\tau)\left(e^{\tau}-1\right) \\ &\le e^{\tau}F(\tau) \le e^{t_0}F(\tau), \end{aligned}$$

定理得证。

三、波动方程混合问题解的唯一性和稳定性

定理 设 $u\in C^1(\overline{Q_T})\cap C^2(Q_T)$ 为定解问题(1)的解

$$\begin{cases}\Box u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),(x,t)\in Q_T,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),0\le x\le l,\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\qquad 0\le t\le T.\end{cases}\tag{1}$$

则对于任意的 $\tau\in[0,T]$, 有以下估计

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx\le M_1\left[\int_0^l\left[\varphi^2(x)+\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx+\iint_{Q_\tau}f^2(x,t)dxdt\right]$$

$$\iint_{Q_\tau}u^2(x,t)dxdt\le M_1\left[\int_0^l\left[\varphi^2(x)+\psi^2(x)+a^2\varphi_x^2(x)\right]dx+\iint_{Q_\tau}f^2(x,t)dxdt\right]$$

其中 $M_1=\mathrm{e}^{2T}$.

证明：　对于任意的 $0 \le \tau \le T$，　由于

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) - u^2(x,0) \right] dx = \int_0^l \left[\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} u^2(x,t) dt \right] dx$$

$$\le \iint_{Q_\tau} \left| 2u(x,t) \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right| dxdt \le \iint_{Q_\tau} \left[u^2(x,t) + u_t^2(x,t) \right] dxdt$$

由能量不等式(定理4.3)得：

$$\int_0^l u^2(x,\tau) dx \le \iint_{Q_\tau} \left[u^2(x,t) + u_t^2(x,t) - u^2(x,0) \right] dxdt$$

$$\le M \left[\int_0^l \left[\varphi^2(x) + \psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx + \iint_{Q_\tau} f^2(x,t) dxdt \right]$$

$$+ \iint_{Q_\tau} u^2(x,t) dxdt = MF(\tau) + \iint_{Q_\tau} u^2(x,t) dxdt \qquad (4)$$

其中

$$F(\tau) = \int_0^l \left[\varphi^2(x) + \psi^2(x) + a^2 \varphi_x^2(x) \right] dx + \iint_{Q_\tau} f^2(x,t) dxdt,$$

$$M = e^T.$$

记
$$G(\tau)=\iint_{Q_\tau} u^2(x,t)dxdt \ =\int_0^\tau\left[\int_0^l u^2(x,t)dx\right]dt,$$
则有
$$G'(\tau) \ =\int_0^l u^2(x,\tau)dx,$$
于是得Gronwall不等式：
$$G'(\tau)\le MF(\tau)+G(\tau),$$
类似于前面处理法可得：
$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\tau}G(\tau)\right]\le e^{-\tau}MF(\tau),$$
积分得
$$e^{-\tau}G(\tau)\le\int_0^\tau e^{-s}MF(s)ds$$

$$G(\tau)\le M\int_0^\tau e^{\tau-s}F(s)ds\le MF(\tau)\int_0^\tau e^{\tau-s}ds\le MF(\tau)\left(e^\tau-1\right).$$
于是有
$$\iint_{Q_\tau} u^2(x,t)dxdt=G(\tau) \ \le MF(\tau)\left(e^\tau-1\right) \ \le MF(\tau)\left(e^T-1\right).$$

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx \le MF(\tau)+\iint_{Q_\tau} u^2(x,t)dxdt$$

$$\le MF(\tau)+MF(\tau)\left(e^T-1\right)$$

$$\le e^{2T}F(\tau),$$

$$\iint_{Q_\tau} u^2(x,t)dxdt \le MF(\tau)\left(e^T-1\right)\le e^{2T}F(\tau).$$

本定理即表明问题(1)解的唯一性和稳定性。

事实上，若有$u_i \in C^1(\overline{Q_T})\cap C^2(Q_T),\ (i=1,2)$ 为如下问题之解

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = f_i(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \\ u_i(x,0)=\varphi_i(x),\quad u_{it}(x,0)=\psi_i(x),\ 0\le x\le l, \\ u_i(0,t)=u_i(l,t)=0,\qquad 0\le t\le T. \end{cases}$$

则对于 $u=u_1-u_2$ 满足

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x,t) - f_2(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u_t(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u(0,l) = u(l,0) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

由定理知：

$$\iint_{Q_\tau} u^2(x,t)dxdt \le e^{2T} F(\tau)$$

$$= e^{2T} \int_0^l \left\{ \left[\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \right]^2 + a^2 \left[\varphi_{1x}(x) - \varphi_{2x}(x) \right]^2 \right\} dx$$

$$+ e^{2T} \int_0^l \left[\psi_1(x) - \psi_2(x) \right]^2 dx$$

$$+ e^{2T} \iint_{Q_\tau} \left[f_1(x,t) - f_2(x,t) \right]^2 dxdt.$$

作　业

- Page 115, 28

第三章　热传导方程

本章讨论：

(1)　热传导方程定解问题的解法，主要采用Fourier变换法及分离变量法。

(2)　热传导方程定解问题的解的性质，主要介绍极值原理及最大模估计。

(3)　系统地介绍Fourier变换及其运算、广义函数理论，作为本章工具。

§1.初值问题

本节主要讨论以下问题：

求解一维热传导方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

§1.1. Fourier变换

作为求解热传导方程初值问题主要求解工具，本节将系统地介绍Fourier变换及其运算。

一、Fourier变换定义

定义1.1　对于 $f(x)\in L(-\infty,\infty)$, 定义变换 F

$$F:\quad L(-\infty,\infty)\to L^{\infty}(-\infty,\infty),$$

$$F:\quad f(x)\mapsto \hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

称此变换为Fourier变换，$f(x)$的Fourier变换的象 $\hat{f}(\lambda)$ 称为 $f(x)$ 的Fourier变式。

类似定义变换 G:

$$G:\quad f(x)\mapsto f^{\vee}(\lambda)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(x)e^{i\lambda x}dx,$$

称此变换为Fourier逆变换。

二、Fourier积分定理

定理1.1 若 $f(x)\in L(-\infty,\infty)\cap C^1(-\infty,\infty)$，则有：

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=f(x).$$

即：$[\hat{f}(\lambda)]^{\vee}(x)=f(x).$

证明： 由于 $f(x)\in L(-\infty,\infty)\cap C^1(-\infty,\infty)$ ，因此，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx\quad\left(=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\lambda)\right)$$

对于λ 一致收敛，且为 λ 的连续函数，从而积分

$$\int_{-N}^{N}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

有意义。将Fourier变式代入得：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right]e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\int_{-N}^{N} e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{e^{i(x-\xi)N}-e^{-i(x-\xi)N}}{i(x-\xi)}d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{\sin(x-\xi)N}{(x-\xi)}d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta \qquad\qquad (\xi-x=\eta) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-M}+\int_{-M}^{M}+\int_{M}^{\infty}\right) f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta \\
&= J_1+J_2+J_3,
\end{aligned}
$$

其中 M 待定。以下分别讨论 $N\to\infty$ 时 $J_i\ (i=1,2,3)$ 的极限。易知

$$
\begin{aligned}
|J_1+J_3| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{-M} f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta+\int_{M}^{\infty} f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-M}\left|f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}\right|d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{M}^{\infty}\left|f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}\right|d\eta
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{\pi M}\int_{-\infty}^{-M}\left|f(\eta+x)\right|d\eta+\frac{1}{\pi M}\int_{M}^{\infty}\left|f(\eta+x)\right|d\eta$$

$$\leq \frac{1}{\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\eta+x)\right|d\eta=\frac{1}{\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\eta)\right|d\eta, \tag{1.6}$$

而

$$J_2=\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M} f(\eta+x)\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}\frac{f(\eta+x)-f(x)}{\eta}\sin\eta N d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M} f(x)\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M} g(x,\eta)\sin\eta N d\eta+\frac{f(x)}{\pi}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta, \tag{1.7}$$

其中

$$g(x,\eta)=\frac{1}{\eta}\big(f(x+\eta)-f(x)\big)=\int_{0}^{1} f'(x+\tau\eta)d\tau,$$

为 x,η 的连续函数，这是因为 $f(x)\in C^1(-\infty,\infty)$.

由以上运算得：

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda - f(x)\right| = \left|J_1 + J_2 + J_3 - f(x)\right|$$

$$\leq \left|J_1 + J_3\right| + \left|J_2 - f(x)\right| \leq \frac{1}{\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\eta + x)\right|d\eta$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}g(x,\eta)\sin\eta N d\eta + \frac{f(x)}{\pi}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta - f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\eta)\right|d\eta \quad + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}g(x,\eta)\sin\eta N d\eta\right|$$

$$+\left|f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta - 1\right]\right|, \qquad (1.8)$$

由(1.8)可得，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，我们可以取 $M_0 > 0$，使得(1.8)的第一个项小于 $\varepsilon / 4$ 。又由Riemann-Lebesgue引理知，对于给定的区间 $[-M_0, M_0]$ ，及关于 η 的连续函数 $g(x,\eta)$ 有

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-M_0}^{M_0}g(x,\eta)\sin\eta N d\eta = 0.$$

因此，存在 $N_1>0$ ，当 $N>N_1$ 时，(1.8)的第二项也小于$\varepsilon/4$。

而第三项是由于

$$\left|f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-M_0}^{M_0}\frac{\sin\eta N}{\eta}d\eta-1\right]\right| =\left|f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-NM_0}^{NM_0}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi-1\right]\right|,$$

根据数学分析中熟知的积分公式：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\frac{\pi}{2},$$

得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=1,$$

从而存在 $N_2>0$ ，当 $N>N_2$ 时，(1.8)的第三项小于 $\varepsilon/4$ 。

于是得：对于任意给定的 $\varepsilon>0$ ，存在 $N_0=\max(N_1,N_2)>0$ ，当 $N>N_0$ 时有：

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda-f(x)\right|<\varepsilon.$$

定理得证。

总结：

$$
\begin{tikzcd}
L(-\infty,\infty) \ni f(x) \arrow[rr, bend left, "F"] & & \hat{f}(\lambda) \in L^{\infty}(-\infty,\infty) \arrow[ll, bend left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

当 $f \in C^1(-\infty,\infty)$

$$F: \quad f(x) \mapsto \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

$$G: \quad f(\lambda) \mapsto f^{\vee}(x) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

一般地记为：$\left[[f(x)]^{\wedge}(\lambda)\right]^{\vee}(x) = f(x), \quad \left[[f(x)]^{\vee}(\lambda)\right]^{\wedge}(x) = f(x).$

即， $\wedge$ 与 $\vee$ 互逆运算。

三、Fourier变换性质

(1)线性性质

若 $f_i(x) \in L(-\infty, \infty),\ a_i \in \mathbb{C}(i=1,2)$，则：

$$\left(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\right)^\wedge(\lambda) = a_1 \hat{f}_1(\lambda) + a_2 \hat{f}_2(\lambda).$$

(2)微商性质

若 $f(x), f'(x) \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty),$ 则：

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^\wedge(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda).$$

一般有：若 $f(x), f^{(k)}(x) \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty)(k=1,2,\cdots m),$
则：

$$\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)^\wedge(\lambda) = (i\lambda)^m \hat{f}(\lambda).$$

证明：　分析：直接计算可得

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^{\wedge}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(A)e^{-i\lambda A}-\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(B)e^{-i\lambda B}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}i\lambda f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

只须证明：

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(A)e^{-i\lambda A}=0,\quad \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(B)e^{-i\lambda B}=0,$$

只要证：　$\lim\limits_{A\to\infty}f(A)=0,\quad \lim\limits_{B\to-\infty}f(B)=0.$

由假设 $f'(x)\in C(-\infty,\infty)\cap L(-\infty,\infty)$，故有

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt,$$

因此有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=a_{\pm}=f(0)+\int_0^{\pm\infty}f'(t)dt$ 存在。

又根据 $f(x)\in C(-\infty,\infty)\cap L(-\infty,\infty)$，利用反证法可得 $a_{\pm}=0.$

事实上，若有 $a_{\pm} \neq 0$ ，无妨设 $a_{+} > 0,$ 则存在 $M > 0$ ，当 $x > M$ 时有 $f(x) > a_{+}/2 >,0$ 于是有：

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^M f(x)dx + \lim_{A \to +\infty} \int_M^A f(x)dx = +\infty,$$

与假设矛盾，命题得证。

(2补充)积分性质

若 $f(x), \int_0^x f(t)dt \in C(-\infty,\infty) \cap L(-\infty,\infty),$ 则：

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{\wedge}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

这是由于函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

满足：

$$F'(x) = f(x),$$

从而有：

$$\left(f(x)\right)^{\wedge}(\lambda) = \left(F'(x)\right)^{\wedge}(\lambda) = i\lambda\left(F(x)\right)^{\wedge}(\lambda),$$

即：

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^{\wedge}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

(3)乘多项式性质

若 $f(x), xf(x) \in L(-\infty, \infty)$，则有：

$$\left(xf(x)\right)^{\wedge}(\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

证明： 由于 $f(x), xf(x) \in L(-\infty, \infty)$，由Weierstrass判别法知

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\lambda}\left(f(x)e^{-i\lambda x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}-ixf(x)e^{-i\lambda x}dx$$

$$= -i\left(xf(x)\right)^{\wedge}(\lambda),$$

从而有

$$\left(xf(x)\right)^{\wedge}(\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda).$$

一般当 $f(x), xf(x), \cdots, x^m f(x) \in L(-\infty, \infty)\ (m \geq 1)$，时有：

$$\left(x^m f(x)\right)^{\wedge}(\lambda) = i^m\frac{d^m}{d\lambda^m}\hat{f}(\lambda).$$

(4)平移性质

若 $f(x)\in L(-\infty,\infty),\ a\in\mathbb{R}$ ，则有：

$$\left(f(x-a)\right)^{\wedge}(\lambda)=e^{-ia\lambda}\hat{f}(\lambda),$$

$$\left(e^{iax}f(x)\right)^{\wedge}(\lambda)=\hat{f}(\lambda-a).$$

(5)伸缩性质

若 $f(x)\in L(-\infty,\infty),\ k\in\mathbb{R}, k\neq 0,$ 则有：

$$\left(f(kx)\right)^{\wedge}(\lambda)=\frac{1}{|k|}\hat{f}(\frac{\lambda}{k}).$$

证明：无妨设 $k<0$，由定义可得：

$$\begin{aligned}\left(f(kx)\right)^{\wedge}(\lambda)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(kx)e^{-i\lambda x}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\frac{\xi}{k}}d\frac{\xi}{k}\qquad(kx=\xi)\\&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\xi\frac{\lambda}{k}}d\xi=\frac{1}{|k|}\hat{f}(\frac{\lambda}{k}).\end{aligned}$$

(6)对称性质

若 $f(x)\in L(-\infty,\infty)$，则有：

$$\left(f(x)\right)^{\vee}(\lambda)=\left(f(x)\right)^{\wedge}(-\lambda)=\left(f(-x)\right)^{\wedge}(\lambda).$$

$$\left(f(x)\right)^{\wedge}(\lambda)=\left(f(x)\right)^{\vee}(-\lambda)=\left(f(-x)\right)^{\vee}(\lambda).$$

(7)卷积性质

1、**卷积定义：**若 $f(x),g(x)\in L(-\infty,\infty)$，则定义 $f(x),g(x)$ 的卷积为

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt.$$

2、**性质：**若 $f(x),g(x)\in L(-\infty,\infty)$，则 $f*g(x)\in L(-\infty,\infty)$ 。

证明：由Fubini定理直接计算得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f*g(x)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt\right|dx$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x-t)g(t)\right|dtdx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x-t)g(t)\right|dxdt\qquad\text{Fuibni}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)|dxdt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|d\xi dt \qquad x-t=\xi$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|d\xi\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt\right)<\infty.$$

3、Fourier变换的卷积性质：若 $f(x),g(x)\in L(-\infty,\infty)$，则

$$\left(f*g(x)\right)^{\wedge}(\lambda)=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda).$$

证明：利用Fubini定理直接计算得：

$$\left(f*g(x)\right)^{\wedge}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f*g(x)e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt\right)e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)e^{-i\lambda x}g(t)dx\right)dt \qquad \text{Fubini}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)}dx\right)g(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) g(t) e^{-i\lambda t} dt \qquad x - t = \xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right)$$

$$= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda).$$

例题：

例1：设

$$f_1(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le A, \\ 0, & |x|>A, \end{cases}$$

求 $\hat{f}_1(\lambda)$.

解：由定义

$$\hat{f}_1(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} e^{-i\lambda x}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda A}{\lambda}.$$

例2：设

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

求 $\hat{f}_2(\lambda)$.

解：由定义

$$\hat{f}_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\lambda}.$$

例3：设 $f_3(x)=e^{-|x|}$， 求 $\hat{f}_3(\lambda)$.

解：由于 $f_3(x)=f_2(x)+f_2(-x)$,

由线性性质和伸缩性质，得：

$$\hat{f}_3(\lambda)=\hat{f}_2(\lambda)+\left[f_2(-x)\right]^{\wedge}$$

$$=\hat{f}_2(\lambda)+\hat{f}_2(-\lambda)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\lambda}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i\lambda}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+\lambda^2}.$$

例4：设 $f_4(x)=e^{-x^2}$， 求 $\hat{f}_4(\lambda)$.

解：由定义及分部积分公式

$$\hat{f}_4(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\lambda}\left[e^{-x^2}e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+2\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx\right]$$

$$=\frac{2i}{\lambda}\left[xe^{-x^2}\right]^{\wedge}=\frac{2i}{\lambda}\left[i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}_4(\lambda)\right]=-\frac{2}{\lambda}\frac{d\hat{f}_4(\lambda)}{d\lambda}.$$

$$\hat{f}_4(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以，

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{f}_4(\lambda)}{d\lambda} = -\dfrac{\lambda}{2}\hat{f}_4(\lambda), \\ \hat{f}_4(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

解之得：

$$\hat{f}_4(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

例5：设 $f_5(x)=e^{-Ax^2}\ (A>0)$，求 $\hat{f}_5(\lambda)$.

解：由伸缩性质

$$\hat{f}_5(\lambda)=\left[f_4(\sqrt{A}x)\right]^{\wedge}(\lambda)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\hat{f}_4\left(\frac{\lambda}{\sqrt{A}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2A}}e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}.$$

作　业

- Page 173, 1 (1)、(3)、(5)；
- Page 174, 2 (2)、(4)、(5)、(6)、(9)；
- Page 174, 3 (1)、(2)、(3)。

§1.2 Poisson公式

一、问题：

求解一维热传导方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

二、解：

对方程及初始条件关于x作Fourier变换得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}(\lambda,t)}{\partial t} + \lambda^2 a^2 \hat{u} = \hat{f}(\lambda,t),\ t > 0, \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

这是关于t的一阶线性常微分方程，求解得：

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\varphi}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau) e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} d\tau.$$

作Fourier逆变换得：

$$u(x,t)=\left(\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\right)^{\wedge}(x)+\left(\int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau\right)^{\wedge}(x)$$

$$=\left(\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\right)^{\wedge}(x)+\int_0^t\left(\hat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right)^{\wedge}(x)d\tau.$$

注意到：

$$(e^{-Ax^2})^{\wedge}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2A}}e^{-\lambda^2/(4A)},$$

或

$$e^{-\lambda^2/(4A)}=\sqrt{2A}(e^{-Ax^2})^{\wedge}(\lambda),$$

令：$\dfrac{1}{4A}=a^2t,$ 即：$A=\dfrac{1}{4a^2t},$ 则有：

$$e^{-a^2\lambda^2 t}=e^{-\lambda^2/(4A)}=(\sqrt{2A}e^{-Ax^2})^{\wedge}(\lambda)=\left(\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right)^{\wedge}(\lambda).$$

代入得：

$$\left(\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}\right)^{\vee}(x)=\left(\hat{\varphi}(\lambda)\left(\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right)^{\wedge}(\lambda)\right)^{\vee}(x)$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\left(\hat{\varphi}(\lambda)\left(e^{-x^2/\left(4a^2t\right)}\right)^{\wedge}(\lambda)\right)^{\vee}(x)$$

应用Fourier变换的卷积性质

$$=\frac{1}{a\sqrt{2t}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\varphi * g)^{\wedge}(\lambda)\right)^{\vee}(x)$$

这里

$$g(x,t)=e^{-x^2/\left(4a^2t\right)}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\varphi * g(x,t)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)g(x-\xi,t)d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

类似可得：

$$\left(\hat{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right)^{\vee}(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi.$$

代入得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi,$$

记

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

则有

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)K(x-\xi,t)d\xi \tag{1.24}$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)K(x-\xi,t-\tau)d\xi.$$

通常称(1.24)式为Poisson公式，而函数 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)$
称为**热传导方程的基本解**。

三、验证

以上所得到的公式完全是形式的，我们必须加以证明，这里我们对 $f(x,t)=0,\varphi(x)$ 适合一定条件时，验证Poisson公式(1.24)确实为热传导方程初值问题的解。

定理1.3 若(1). $\varphi(x)\in C(-\infty,\infty)$ 且有界。
(2). $f(x,t)=0$ 。

则由Poisson公式(1.24)确定的函数是热传导方程初值问题(1.1)(1.2)的有界解。

证明： 由于$f(x,t)=0$，(1.24)给出的函数为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi,$$

我们需要证明：

(1). 当 $t>0$ 时 $u(x,t)$ 关于 x 有连续二阶导数，关于 t 有连续一阶导数（事实上，我们可证明 $u(x,t)$ 为任意阶可导），且可在积分号下关于 x,t 求任意阶导数。

(2). 验证 $u(x,t)$ 满足方程(1.1)。

(3). 验证 $u(x,t)$ 按以下极限形式满足初始条件(1.2)，

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ t\to 0+}} u(x,t)=\varphi(x_0).$$

这一极限，表明 $u(x,t)$ 从上半平面连续到边界 $t=0$。

(1).任意阶可导性：

记$Q=\{(x,t)\,|\,x\in\mathbf{R},t>0\}$，则对于$Q$的内闭子集$M$

$$M=\{(x,t)\,|\,x_1\le x\le x_2,0<t_1\le t\le t_2\},$$

有

$$\frac{\partial^{m+n}K(x-\xi,t)}{\partial t^m\partial x^n}=P\left(x-\xi,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

其中$P(x,y)$为关于x,y的多项式，在M上有界，因此积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{m+n}K(x-\xi,t)}{\partial t^m\partial x^n}\varphi(\xi)d\xi$$

关于x,t在 M 上一致收敛，于是对于任意的$m,n\ge 0$，有

$$\frac{\partial^{m+n}u(x,t)}{\partial t^m\partial x^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{m+n}K(x-\xi,t)}{\partial t^m\partial x^n}\varphi(\xi)d\xi,\quad(\forall m,n\ge 0).$$

(2).验证$u(x,t)$满足方程(1.1).

直接计算可得：

$$\frac{\partial K(x-\xi,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 K(x-\xi,t)}{\partial x^2}=0,\quad x\in\mathbf{R},t>0.$$

因此，当 $t>0$ 时有：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial K(x-\xi,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 K(x-\xi,t)}{\partial x^2}\right)\varphi(\xi)d\xi=0,\quad x\in\mathbf{R},t>0.$$

(3).验证$u(x,t)$按极限形式满足初始条件(1.2).

由于

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)e^{-\eta^2}d\eta,\quad\left(\eta=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

由φ 的连续有界性知：积分关于 x,t在 Q 上一致收敛，从而积分与极限可交换，于是有：

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to x_0,\\ t\to 0+}} u(x,t) &= \lim_{\substack{x\to x_0,\\ t\to 0+}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)e^{-\eta^2}d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\substack{x\to x_0,\\ t\to 0+}}\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)e^{-\eta^2}d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_0)e^{-\eta^2}d\eta \\
&= \varphi(x_0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta \\
&= \varphi(x_0).
\end{aligned}
$$

四、Poisson公式性质

(1).奇偶性与周期性

若 $f(x,t)=0,\varphi(x)$ 关于其自变量为奇函数、偶函数或周期 l 函数则由(1.24)所得到的函数关于 x 也为奇函数、偶函数或周期 l 函数。

证明：不妨设 $\varphi(x)$ 为偶函数，则有

$$u(-x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(-x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{-\infty}\varphi(-\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}d-\eta \qquad (\xi=-\eta)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta$$

$$=u(x,t).$$

(2).无穷传播速度

若$\varphi(x)$满足 $\varphi(x)>0, x\in(x_1,x_2); \varphi(x)=0, x\notin(x_1,x_2)$, 则当$t>0$时有$u(x,t)>0.$

这是由于

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi>0.$$

(3).任意阶可导性

若$\varphi(x)$连续，则当$t>0$时，$u(x,t)$关于x,t有任意阶导数。

作　业

- Page 175, 4 (2)

§1.3 广义函数简介

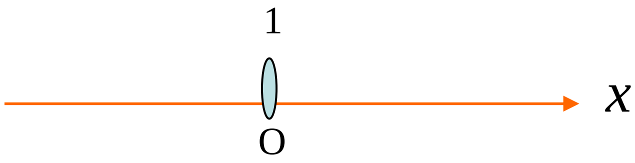
一、广义函数的引入

单位质点的密度函数问题：

在数轴的原点上放置一单位质点，讨论数轴上的密度函数。

设 $m(x)$ 为 $(-\infty, x]$ 上的全部质量（质量分布函数），则

$$m(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}$$



由密度计算公式：

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x-\Delta x)}{2\Delta x},\quad x\in(-\infty,\infty),$$

得：

$$\rho(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ +\infty, & x=0.\end{cases}$$

根据质量分布函数与密度函数关系

$$m(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(s)ds,$$

特别有总质量计算公式：

$$M=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)ds,$$

将单位质点情形代入得：

$$M=1=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)ds,$$

另一方面，由于函数$\rho(x)$仅在一点非0，由积分性质得：

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)ds,$$

两式矛盾。产生这一矛盾的原因是由于函数 $\rho(x)$ 不是通常意义上的函数而是一种全新意义的函数——广义函数。

二、广义函数定义

1、基本空间、试验函数

定义1.3 如果 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi_n(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ n=1,2,3,\cdots$，且：

(1)存在$M>0$，使得当$|x|\geq M$ 时$\varphi(x)\equiv 0,\ \varphi_n(x)=0,\ n=1,2,3,\cdots$ ，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{[-M,M]}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=0,$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{[-M,M]}|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi^{(k)}(x)|=0,\ k=1,2,3,\cdots,$

则称序列 $\{\varphi_n(x)\}$收敛于$\varphi(x)$，按这种方法定义了线性空间 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 中函数的收敛性的，此时称 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 为基本空间，记作$\mathfrak{D}(\mathbb{R})$，函数 $\varphi(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ 称为试验函数。

2、广义函数

定义1.4 如果 $f:\mathfrak{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$是连续线性泛函，则称 f 是一个广义函数。设 $\varphi(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ 是一个试验函数，用$\langle f,\varphi\rangle$表示它所对应的泛函值，称为对偶积。$\mathbb{R}$上广义函数全体组成集合记作$\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$。

按以上定义，我们也可对广义函数作以下详细定义：

如果泛函 $f:\mathfrak{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 满足：

(1)，f 为线性泛函，即任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\rangle=\alpha\langle f,\varphi_1\rangle+\beta\langle f,\varphi_2\rangle$$

(2)，f 为连续泛函，即任意的 $\varphi_n(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}),n=1,2,3,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)\quad 于\ \mathfrak{D}(\mathbb{R}),$$

都有：
$$\lim_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle=\langle f,\varphi\rangle.$$

3、广义函数例

例1，Dirac函数 δ ,也称为 δ 函数。

定义广义函数 δ 为：

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

显然 δ 为 $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ 上的泛函，且

1， δ 为线性泛函：对于任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ 有

$$\langle \delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\langle \delta, \varphi_1 \rangle + \beta\langle \delta, \varphi_2 \rangle,$$

2， δ 为连续泛函：对于任意的 $\varphi_n(x) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}), n = 1, 2, 3, \cdots$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

有 $$\lim_{n\to\infty} \langle \delta, \varphi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

所以 δ 为连续，从而 δ 为广义函数。

例2　局部可积函数对应的广义函数

(1) 局部可积函数

若函数 $f(x)$ 对于 $\mathbb{R}$ 上任意的有限区间 (a,b) ，积分

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

存在且为有限，则称 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的局部绝对可积函数。

$\mathbb{R}$ 上局部可积函数全体记作 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 。

注：两个按Lebsgue测试几乎处处相等的函数在 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 中看着同一函数。

(2) 局部可积函数对应的广义函数

若 $f(x) \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, 则定义泛函 F 为：

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx, \quad \forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

显然 $\langle F, \varphi \rangle$ 有意义，F 为泛函。下面证明 F 为广义函数。

$$\langle F,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx,\quad \forall\varphi(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

1， F 为线性泛函： $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$， $\forall\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle F,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\big(\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)\big)dx\\&=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_1(x)dx+\beta\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_2(x)dx\\&=\alpha\langle F,\varphi_1\rangle+\beta\langle F,\varphi_2\rangle.\end{aligned}$$

2， F 为连续泛函： $\forall\varphi_n(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}),n=1,2,3,\cdots$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)\quad 于\ \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

有 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle F,\varphi_n\rangle&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi_n(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx=\langle F,\varphi\rangle。\end{aligned}$$

所以，F 为广义函数。

所以，任一局部可积函数，按以上做法都有唯一的广义函数与之对应；并且，我们还可以证明，不同的局部可积函数，按上述对应方法对应于不同的广义函数，即：我们得到了一个从 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 映到 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, 单射 T：

$$\begin{array}{ccc} L_{\text{loc}}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad T \quad} & \mathfrak{D}'(\mathbb{R}), \\ f & \longmapsto & Tf = F \end{array}$$

且 T 保持 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 线性运算不变。因此，按这种对应关系，我们可以将局部可积函数 f 与其对应的广义函数 F 看作是同一函数，这样，我们可以将局部可积函数空间视为广义函数空间的子集，即

$$L_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}'(\mathbb{R})。$$

我们很容易验证这一包含关系为真包含，事实上，广义函数 δ 没有局部可积函数与之对应。

这样，我们可以将局部可积函数看作广义函数，从而我们可以认为广义函数为通常意义下的函数的推广。

注意：若 f 为局部可积函数，则它作为的广义函数在$\varphi(x)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$上的取值为（对偶积）：

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx.$$

δ 函数为典型的非局部可积的广义函数。

三、广义函数运算

(1). 线性运算

对于 $f,g\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}),\alpha,\beta\in\mathbb{R},$ 定义广义函数 $\alpha f+\beta g\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$为：

$$\langle\alpha f+\beta g,\varphi(x)\rangle=\alpha\langle f,\varphi(x)\rangle+\beta\langle g,\varphi(x)\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}).$$

(2). C^∞ 函数乘广义函数

对于 $f\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}),\ g\in C^\infty(\mathbb{R}),$ 定义广义函数 $fg\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 为：

$$\langle fg,\varphi(x)\rangle=\langle f,g(x)\varphi(x)\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}).$$

(3).广义函数的极限

设 $f\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}),\{f_n\}\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}),$ 如果

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi(x)\rangle=\langle f,\varphi(x)\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}).$$

则称广义函数 f 是广义函数序列$\{f_n\}$当 $n\to\infty$ 时的极限，记作

$$f_n\longrightarrow f$$ （在$\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$的意义下）。

对于广义函数族，类似定义。

(4).广义函数的导数

对于 $f\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, 定义广义函数 f'

$$\langle f',\varphi(x)\rangle=-\langle f,\varphi'(x)\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}),$$

称为广义函数 f 的一阶广义导数。一般可定义广义函数 $f^{(k)}$

$$\langle f^{(k)},\varphi(x)\rangle=(-1)^k\langle f,\varphi^{(k)}(x)\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}),$$

称为广义函数 f 的 k 阶广义导数 $k=1,2,\cdots.$

注：广义函数有任意次导数。

(5).广义函数的平移

对于 $f\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, 定义广义函数 $f(x-\xi)$

$$\langle f(x-\xi),\varphi(x)\rangle=\langle f,\varphi(x+\xi)\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}),$$

称为广义函数 f 的一个右平移 ξ 的广义函数。

(6).广义函数的伸缩

对于 $f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, 及 $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,$ 定义广义函数 $f(kx)$

$$\langle f(kx), \varphi(x) \rangle = \langle f, \ \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}),$$

称为广义函数 f 的一个伸缩广义函数。

注：广义函数的运算定义(1)-(6)，与常义函数的相应运算的定义是一致的。例如：若 f 有连续的导数 f'，则 f' 就是 f 的广义导数。

(6).广义函数的张量积

类似于一维的广义函数定义，我们可以定义二维的广义函数 f

$$f:\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R},$$

同理可以定义相应的广义函数运算，特别对于二维的Dirac函数$\delta(x,y)$ 可定义为

$$<\delta,\varphi(x,y)>=\varphi(0,0),\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2),$$

$$<\delta(x-\xi,y-\eta),\varphi(x,y)>$$

$$=<\delta,\varphi(x+\xi,y+\eta)>=\varphi(\xi,\eta),\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2),$$

可以验证

$$\delta(x-\xi,y-\eta)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta).$$

注意这不是广义函数的乘积，它是两个广义函数的张量积或直积，一般记作

$$\delta(x-\xi)\otimes\delta(y-\eta).$$

其定义为：

设 $f(x)\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}_x)$ 及 $g(y)\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}_y)$，则 $f\otimes g\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$，定义为：

$$
\begin{aligned}
&< f(x)\otimes g(y),\varphi(x,y)>\\
=&< f(x),\ < g(y),\varphi(x,y)>>.
\end{aligned}
$$

附注：将广义函数定义中的 $\mathbb{R}$ 换成任意的区间(a,b)，或换成任意的区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，我们可以完全类似地定义基本空间 $\mathfrak{D}(a,b)$ 或 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 以及相应的广义函数空间 $\mathfrak{D}'(a,b)$ 或 $\mathfrak{D}'(\Omega)$。本节中有关广义函数的讨论、定义对于 $\mathfrak{D}'(a,b)$ 或 $\mathfrak{D}'(\Omega)$ 广义函数可同样进行。

例题：

例1：若 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ，则 $f \neq \delta$ 于 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$。

证明：反证。若存在这样的 f ，则对 $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

记：

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}+1}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 0, \end{cases}$$

则对任意的正整数 n，$\rho(nx) \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$， 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(nx)dx = \rho(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

但

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(nx)dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)\rho(nx)dx\right|$$

$$\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left|f(x)\right| dx$$

$$\to 0,\ \text{当}\ n \to \infty\text{。}$$

这与

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(nx)dx = \rho(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

矛盾。　证毕

例2：δ 函数就是位于直线上原点的单位质量产生的质量分布密度。

解： 对任意正整数 n ，在区间 $\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$ 上均匀地放置单位质量，所产生的质量分布密度记为 $Q_n(x)$ ，则

$$Q_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & |x| < \frac{1}{n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

显然，$Q_n(x) \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, 对任意的 $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ ，有

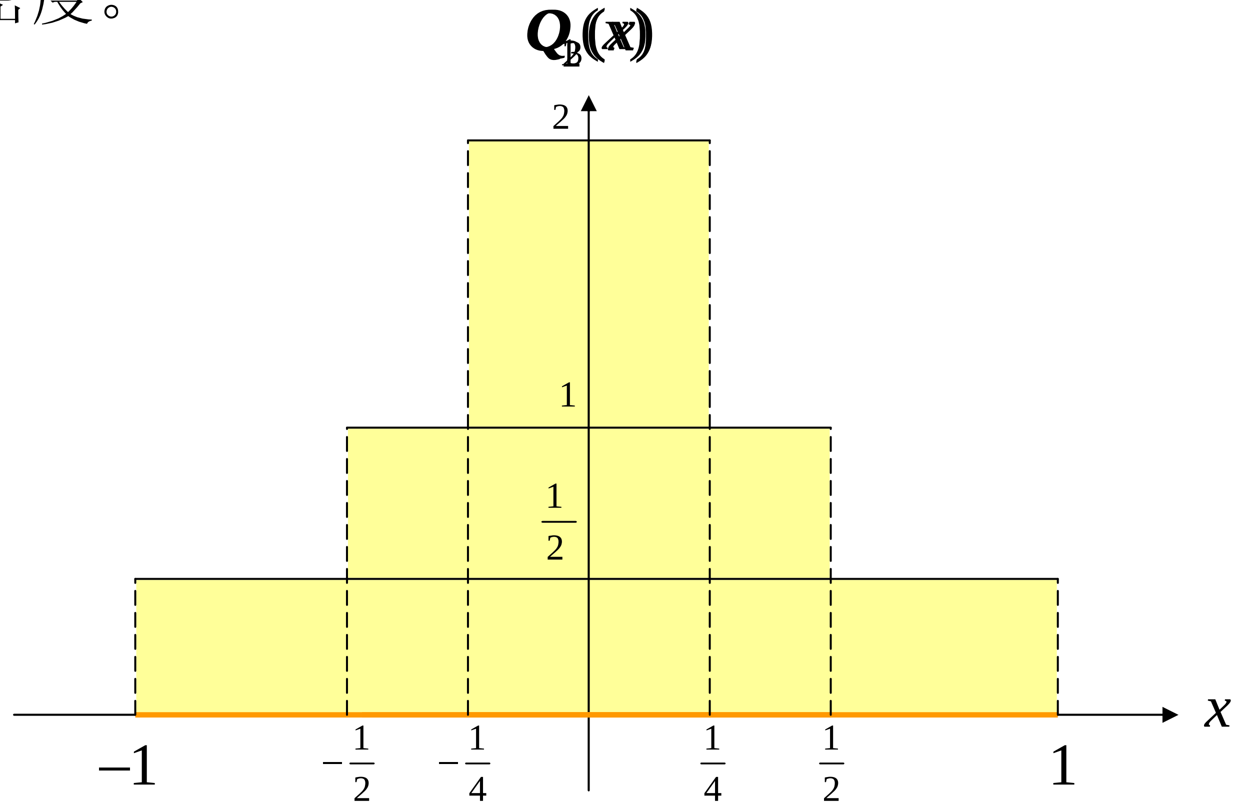
$$\langle Q_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x)\varphi(x)dx = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)dx$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\langle Q_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

于是，在广义函数意义下 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \delta$。

因为 $Q_n(x)$ 是在区间 $\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$ 上均匀地放置单位质量所产生的质量分布密度，其极限就是在原点上放置单位质量所产生的质量分布密度。因此，δ 就是在原点上放置单位质量所产生的质量分布密度。



例3：热传导方程基本解的广义极限是 δ 函数。

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

显然，对任意的 $t>0$, $K_t(x)\equiv K(x,t)\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,

由定理1.3的证明，

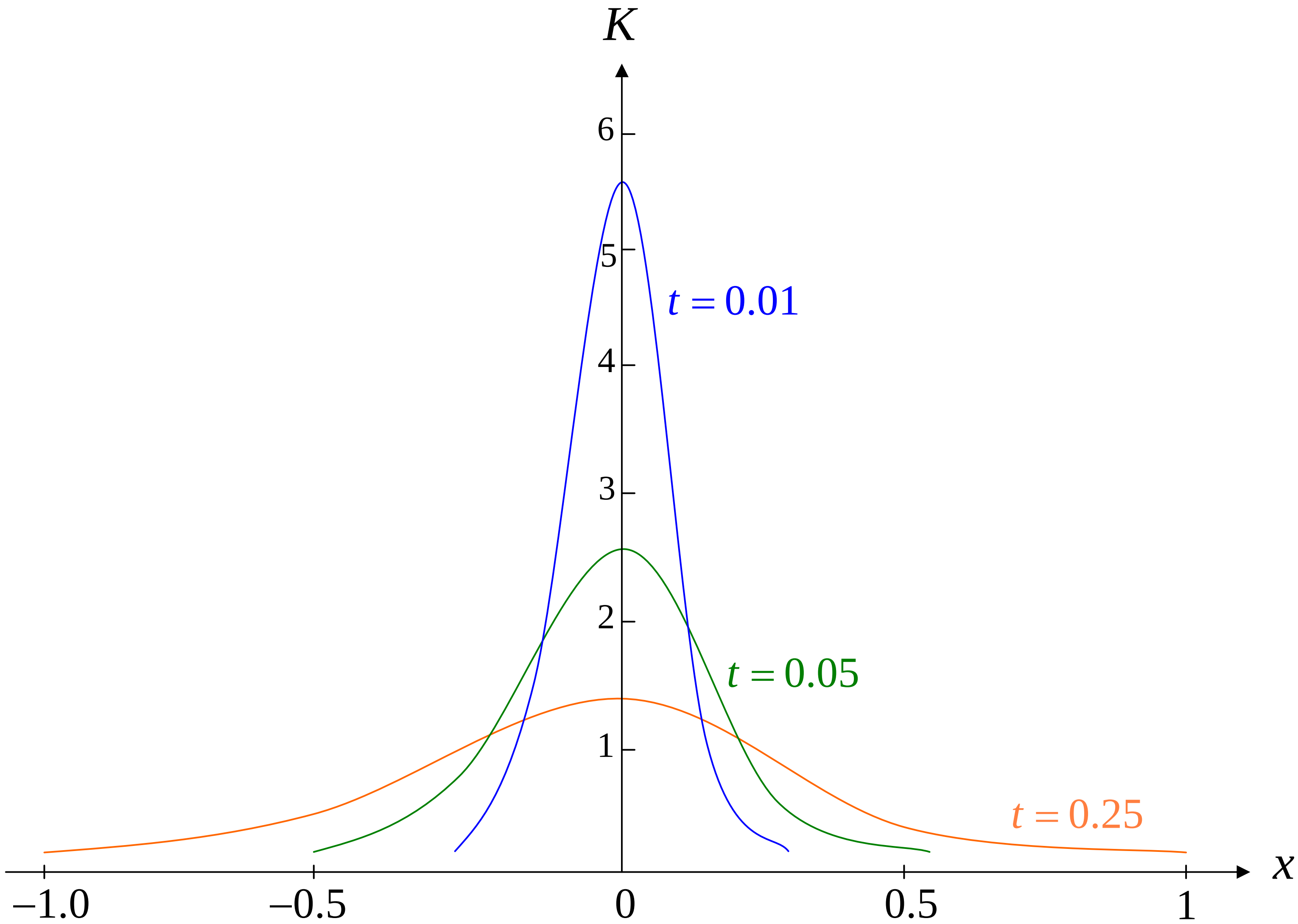
$$\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\varphi(x)dx=\varphi(0),\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

所以，

$$\lim_{t\to 0+}<K_t,\varphi>=\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\varphi(x)dx$$

$$=\varphi(0)=<\delta,\varphi>,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

于是，在广义函数意义下 $\lim\limits_{t\to 0+}K_t=\delta$。



K
6
5
4
3
2
1
t = 0.01
t = 0.05
t = 0.25
x
−1.0
−0.5
0
0.5
1

例4：若 $f \in C^1(\mathbb{R})$，则 f 的广义导数就是其常义导数 f'。

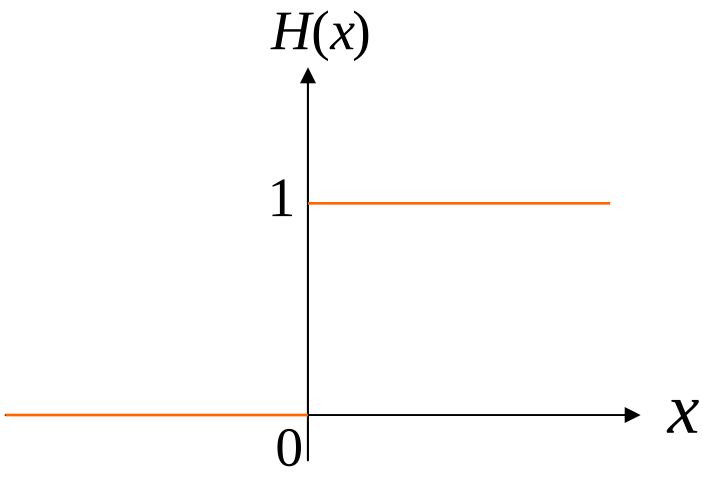
证明：对 $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
< f', \varphi > &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx + f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= (-1)^1 < f, \varphi' >,
\end{aligned}
$$

由广义函数的导数的定义，知 f' 就是 f 的广义导数。

例5：求Heviside函数 $H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$

的广义导数。



解：对 $\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$,

$$<H',\varphi>=-<H,\ \varphi'>$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\varphi'(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx$$

$$=-\left[\varphi(\infty)-\varphi(0)\right]$$

$$=\varphi(0)=<\delta,\varphi>$$

所以， $H'=\delta$。

例5：求函数$|x|$的第 $m\ (m\geq 1)$ 阶广义导数。

解：对 $\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$,

$$<|x|',\varphi>=-<|x|,\varphi'>=-\int_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi'(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{\infty}x\varphi'(x)dx+\int_{-\infty}^{0}x\varphi'(x)dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}\varphi(x)dx-x\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty}-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx+x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=\int_{0}^{\infty}\varphi(x)dx-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\varphi(x)dx=<g,\varphi>$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

所以，

$$|x|' = g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$= 2H(x) - 1$$

其中，

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

而，

$$|x|'' = \left[2H(x) - 1\right]' = 2H'(x) = 2\delta.$$

一般地：

$$|x|^{(m)} = 2\delta^{(m)}, \quad m \geq 2.$$

注：从上例子看到

$|x|$ 广义导数为： $g(x)=\begin{cases} 1\,, & x\geq 0, \\ -1\,, & x<0, \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，其常义导数为

$$f(x)=\begin{cases} 1\,, & x>0, \\ -1\,, & x<0, \end{cases}$$

而作为 $L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 中的函数，$f=g$，即

$|x|$ 的广义导数就是其通常的导数。

一般地，若 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ ，且除有限个点外处处常义可导且常义导数 $f' \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$，则 f' 就是 f 的广义导数。

例：求 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

的广义导数。

解：显然 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, 且除 $x = 0$ 外均可导，且

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

显然 $f' \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$。所以，它就是 f 的广义导数。

作　业

- Page 175, 5 (1)、(3)、(5)；
- Page 175, 6 (2)、(3)；
- Page 175, 7 (1)、(2)、(3)。

§1.4 基本解

一、基本解的定义（关于方程的非齐次项）

定义1.9（基本解） 设 $Q=\left\{(x,t)\middle|-\infty<x<\infty,\ t>0\right\}$，对于任意的 $(\xi,\tau)\in Q$，如果函数 $u(x,t)\in L_{loc}(Q)\cap C\left(\overline{Q}\setminus(\xi,\tau)\right)$，且在广义意义下满足以下方程及初始条件

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\delta(x-\xi,t-\tau), & (x,t)\in Q, \\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

则称它为热传导方程的基本解，且记作 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$.

二、基本解的表示

命题： 基本解有表达式

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & t>\tau \\ 0, & t\le\tau \end{cases}$$

证明：易见，作为$(x,t)\in\mathbb{R}^2$的函数，$K\in L_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)\bigcap C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\setminus(\xi,\tau)\right)$，只须证明其在广义函数意义下满足偏微分方程，即只要证明：对于任意的$\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$，有：

$$<K_t-a^2K_{xx},\ \ \varphi(x,t)>=\varphi(\xi,\tau).$$

由广义导数的定义，我们只要证明：

$$<K(x-\xi,t-\tau),\ \ -\varphi_t-a^2\varphi_{xx}>=\varphi(\xi,\tau),\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2).$$

由广义函数性质得：

$$\begin{aligned}
&<K(x-\xi,t-\tau),-\varphi_t-a^2\varphi_{xx}>\\
&=\iint_{\mathbb{R}^2}K(x-\xi,t-\tau)(-\varphi_t-a^2\varphi_{xx})dxdt\\
&=\int_{\tau}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t-\tau)(-\varphi_t-a^2\varphi_{xx})dx\\
&=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{\tau+\varepsilon}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t-\tau)(-\varphi_t-a^2\varphi_{xx})dx
\end{aligned}$$

注意到$K(x-\xi,t-\tau)$在$t>\tau$ 时关于x 和t 的任意可导性及

$$K_t(x-\xi,t-\tau)-a^2K_{xx}(x-\xi,t-\tau)=0,\quad t>\tau,$$

应用分部积分得：

$$\begin{aligned}
&< K(x-\xi,t-\tau),-\varphi_t-a^2\varphi_{xx}> \\
&=\lim_{\varepsilon\to0+}\left\{\int_{\tau+\varepsilon}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}\left[K_t(x-\xi,t-\tau)-a^2K_{xx}(x-\xi,t-\tau)\right]\varphi dx\right. \\
&\quad\left.-\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t-\tau)\varphi(x,t)\Big|_{t=\tau+\varepsilon}^{t=\infty}dx\right\} \\
&=-\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,t-\tau)\varphi(x,t)\Big|_{t=\tau+\varepsilon}^{t=\infty}dx \\
&=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,\varepsilon)\varphi(x,\tau+\varepsilon)dx \\
&=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{2a\sqrt{\pi\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\tau+\varepsilon)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\varepsilon}}dx
\end{aligned}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi+2a\sqrt{\varepsilon}\eta,\tau+\varepsilon)e^{-\eta^2}d\eta,\quad \left(\eta=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+}\varphi(\xi+2a\sqrt{\varepsilon}\eta,\tau+\varepsilon)e^{-\eta^2}d\eta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\tau)e^{-\eta^2}d\eta=\varphi(\xi,\tau).$$

因此函数 $K\in L_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)\bigcap C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\setminus(\xi,\tau)\right)$,满足

$$<K_t-a^2K_{xx},\varphi(x,t)>=\varphi(\xi,\tau),$$

即在广义意义下满足方程

$$u_t-a^2u_{xx}=\delta(x-\xi,t-\tau),\quad (x,t)\in Q,$$

所以$K(x-\xi,t-\tau)$ 为热传导方程的基本解。

三、基本解的另一种定义（关于初值）

定义1.10 设$Q=\left\{(x,t)\middle|-\infty<x<\infty,\ t>0\right\}$， 对于任意的$\xi,\in\mathbb{R}$, 如果函数$u(x,t)\in L_{loc}\left(Q\right)\bigcap C\left(\overline{Q}\setminus(\xi,0)\right)$,且在广义意义下满足以下方程及初始条件

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & (x,t)\in Q, \\ u(x,0)=\delta(x-\xi), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

则称它为热传导方程的基本解，且记作$\Gamma(x,t;\xi,0)$.

同样我们可以证明：

$$\Gamma(x,t;\xi,0)=K(x-\xi,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, & t>0, \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$$

四、基本解的物理意义

(1). $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 的物理意义

在非齐次热传导方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

中，右端项反映的是无穷杆上的热源强度，其表达式为：

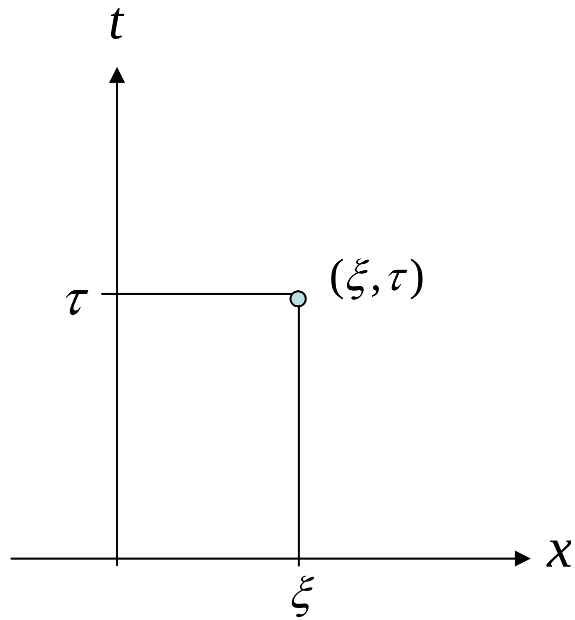
$$f(x,t) = \frac{f_0(x,t)}{c} = \frac{\rho f_0(x,t)}{c\rho},$$

其中c为比热，ρ为物体的密度kg/m， $f_0(x,t)$ 为热源强度J/kg.s，当 $c\rho = 1$时

$$f(x,t) = \rho f_0(x,t),$$

其反映的是单位时间单位长度的细杆产生的热量，当其为Dirac函数 $\delta(x-\xi,t-\tau)$ 时，它表示在τ 时刻，在杆上ξ处的一个瞬时单位热源，因此，基本解$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$表示这个瞬时单位点热源在杆上所引起的温度分布。

设无穷长杆在初始时刻温度为零，到时刻 τ 在点 ξ 处有一个瞬时热源放出一个单位的热量，则它在平面上引起的热量强度为 $\delta(x-\xi,t-\tau)$，在杆上产生的温度分布满足：



$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \delta(x-\xi,t-\tau), & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

其解为：

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & t>\tau \\ 0, & t\le\tau \end{cases}$$

显然，当 $0\le t\le\tau$，因为没有热源，杆的温度保持为零。

(2). $\Gamma(x,t;\xi,0)$的物理意义

$\Gamma(x,t;\xi,0)$ 反映的是一个初始温度为

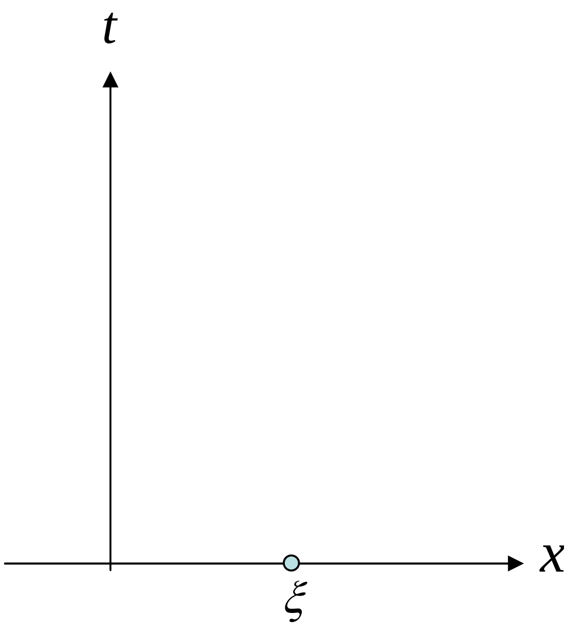
$$u(x,0)=\delta(x-\xi),$$

的无热源的热传导过程，在$c\rho=1$时，由于无穷长杆的热量计算公式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}c\rho u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)dx=1,$$

因此，它表示初始时刻，在ξ处含有一个单位热量的无穷长杆的温度分布。

设无穷长杆在初始时刻在点 ξ 处有一个热源放出一个单位的热量，则它在 $t=0$ 时在杆上产生的温度分布为 $\delta(x-\xi)$。因此，在 $u(x,t)$ 时杆上的温度分布满足：



$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = \delta(x-\xi), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

其解为：

$$\Gamma(x,t;\xi,0) = K(x-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \quad t>0,$$

当 $t\to 0+$ 时，$K(x-\xi,t)$在广义函数意义下以 $\delta(x-\xi)$ 为极限。

五、基本解的性质

(1).当 $t>\tau$ 时 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)>0.$

(2).$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\Gamma(\xi,t;x,\tau).$

(3).当 $t>\tau,\ x\in\mathbb{R}$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau)d\xi=1.$$

证明：当 $t>\tau$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau)d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta,\quad\left(\eta=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right),$$

$$=1.$$

(4).当 $t>\tau,\ x,\xi\in\mathbb{R}$ 时

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(x,t;\xi,\tau)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma(x,t;\xi,\tau)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Gamma(x,t;\xi,\tau)+a^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Gamma(x,t;\xi,\tau)=0,$$

(5).当 $\varphi(x)\in C(\mathbb{R})$ 时

$$\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(x).$$

(6).当 $(x,t)\neq(\xi,\tau)$ 时， $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 无穷次连续可微，且有估计

$$\left|\Gamma(x,t;\xi,\tau)\right|\le\frac{M}{\sqrt{t-\tau}},\quad t>\tau,$$

其中M为常数。

六、利用基本解求解热传导方程初值问题的解

通过将已知函数分解为点热源的和，并利用叠加原理，我们可以从基本解导出热传导方程初值问题解的Poisson公式。我们将在下节说明这种思想和方法。

§1.5 半无界问题

一、Poisson公式的物理意义

对于一维热传导方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

有Poisson公式：

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \Gamma(x,t;\xi,0) d\xi, \tag{2}$$

将无穷杆分割成长度为$\Delta\xi$ 的小段

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (\xi_{i-1}, \xi_i],$$

则(2)式可表为

$$u(x,t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\varphi(\xi)\Gamma(x,t;\xi,0)d\xi$$

$$\approx\sum_{i=-\infty}^{\infty}\varphi(\overline{\xi}_i)\Gamma(x,t;\overline{\xi}_i,0)\Delta\xi \qquad (3)$$

这里 $\overline{\xi}_i\in(\xi_{i-1},\xi_i]$，在 $c\rho=1$ 时，$\varphi(\overline{\xi}_i)\Delta\xi$ 为 $(\xi_{i-1},\xi_i]$段含有的热量，而 $\Gamma(x,t;\overline{\xi}_i,0)$ 表示初始时刻，在 $\overline{\xi}_i$ 处含有一个单位热量的无穷长杆在无热源的热传导过程中的温度分布，因此

$$\varphi(\overline{\xi}_i)\Gamma(x,t;\overline{\xi}_i,0)\Delta\xi,$$

表示初始时刻，在 $\overline{\xi}_i$ 处含有 $\varphi(\overline{\xi}_i)\Delta\xi$ 个单位热量的无穷长杆在无热源的热传导过程中的温度分布。而(3)式表明，$u(x,t)$ 可表为所有小段杆拥有的热量在无热源的热传导方程中的温度分布的叠加。

$\Delta\xi \quad \xi_{i-1} \quad \xi_i$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (\xi_{i-1}, \xi_i], \\ 0, & x \notin (\xi_{i-1}, \xi_i]. \end{cases} \end{cases}$$

含有热量：$\varphi(\bar{\xi}_{i-1})\Delta\xi$ $\quad \varphi(\bar{\xi}_i)\Delta\xi$ $\quad \varphi(\bar{\xi}_{i+1})\Delta\xi$ $\quad \varphi(\bar{\xi}_{i+2})\Delta\xi$

引起温度分布：

$\varphi(\bar{\xi}_i)\Gamma(x,t;\bar{\xi}_i,0)\Delta\xi$

$\varphi(\bar{\xi}_{i-1})\Gamma(x,t;\bar{\xi}_{i-1},0)\Delta\xi$ $\quad \varphi(\bar{\xi}_{i+1})\Gamma(x,t;\bar{\xi}_{i+1},0)\Delta\xi$

$$u(x,t) \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi(\bar{\xi}_i)\Gamma(x,t;\bar{\xi}_i,0)\Delta\xi$$

二、半无界问题解法1——Green函数法

利用Poisson公式的物理意义，我们可以求解以下半无界问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x>0, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), x\geq 0, \\ u(0,t)=0, \quad t\geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

首先，对一端温度保持为0的半无界杆，构造单位点热源所产生的温度分布，即求解以下半无界问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x>0, t>0, \\ u(x,0)=\delta(x-\xi), x\geq 0, \\ u(0,t)=0, \quad t\geq 0. \end{cases}$$

其中 $\xi>0$ 为固定。

按对称开拓原理，把初值$\delta(x-\xi)$关于 $x=0$ 作奇延拓，即在 $x=-\xi$ 处放置一个单位热汇 $-\delta(x+\xi)$并求解无穷杆上的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \delta(x-\xi) - \delta(x+\xi), \ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

由线性叠加原理或前面的讨论可得，这一问题之解可表为：

$$G(x,t;\xi,0) = \Gamma(x,t;\xi,0) - \Gamma(x,t;-\xi,0).$$

将 $G(x,t;\xi,0)$ 限制在 $x \geq 0$ 上，我们就得到了一端为温度0的半无界杆上单位热源所产生的温度分布函数。

重复前面的讨论可得半无界问题的解表达式为：

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \int_0^{\infty} (\Gamma(x,t;\xi,0) - \Gamma(x,t;-\xi,0))\varphi(\xi)d\xi.$$

方法总结：把求解热传导方程具有任意初始条件的解的问题归结为求满足齐次边界条件 $u(0,t)=0$ 时单位点热源所产生的温度分布函数 $G(x,t;\xi,0)$ 的问题，我们把这个函数 $G(x,t;\xi,0)$ 称为相应的半无界问题的Green函数，把这种求解方法称为Green函数法。

三、半无界问题解法2——对称延拓法

类似于弦振动方程半无界问题的解法，我们可以用对称延拓方法求解热传导方程的半无界问题。

对于热传导方程的半无界问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

作$\varphi(x)$与 $f(x,t)$ 的奇延拓：

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$\overline{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0, t \geq 0, \\ -f(-x,t), & x < 0, t \geq 0; \end{cases}$$

构造热传导方程的Cauchy问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} = \overline{f}(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \overline{u}(x,0) = \overline{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

由于 $\overline{\varphi}(x)$ 及 $\overline{f}(x,t)$ 关于 x 为奇函数，因此，$\overline{u}(x,t)$ 关于 x 也为奇函数，自然有

$$\overline{u}(0,t) = 0.$$

因此：$$u(x,t) = \overline{u}(x,t), \quad x \geq 0.$$

由热传导方程的Cauchy问题的求解公式得

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi,$$

因此当 $x \geq 0$ 时

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{\infty}\overline{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_{-\infty}^{0}\overline{\varphi}(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right]$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\left[\int_{-\infty}^{0}\overline{f}(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi+\int_0^{\infty}\overline{f}(\xi,\tau)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_0^{\infty}f(\xi,\tau)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

$$=\int_0^{\infty}(\Gamma(x,t;\xi,0)-\Gamma(x,t;-\xi,0))\varphi(\xi)d\xi.$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} f(\xi,\tau)(\Gamma(x,t;\xi,\tau)-\Gamma(x,t;-\xi,\tau))d\xi$$

$$=\int_0^{\infty}G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi,$$

这里 $G(x,t;\xi,\tau)$ 为Green函数：

$$G(x,t;\xi,\tau)=\Gamma(x,t;\xi,\tau)-\Gamma(x,t;-\xi,\tau)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right],$$

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

一般热传导方程的Green函数：

是指在广义意义下满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \delta(x-\xi, t-\tau), \; x \in \Omega, \, t > 0, \\ \qquad\qquad u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \qquad\qquad \text{齐次边界条件.} \end{cases}$$

的局部可积函数。

作　　业

- Page 176, 8 (4)；
- Page 178, 8 (3)　（选做）

§ 2.混合问题

§ 2.1 有界杆的热传导问题

一、问题

求解一维热传导方程混合问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), 0 < x < l, t > 0, & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, & (2) \\ u(0,t) = 0, \qquad t \ge 0, & (3) \\ u(l,t) = 0, \qquad t \ge 0. & (4) \end{cases}$$

注意问题中的边界条件为齐次。

二、分离变量法

1.导出特征问题

将变量分离形式解$u(x,t)=X(x)T(t)$代入方程(1)对应的齐次方程得

$$T'(t)X(x)-a^2T(t)X''(x)=0,$$

除以$a^2X(x)T(t)$得：

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (5)$$

(5)中，左式仅依赖于t，它与x无关，而右式则相反，由二式相等知它们与x,t均无关，因而为常数，记作$-\lambda$，于是得：

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad (6)$$

由(3)(4)得：

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0. \qquad (8)$$

由于我们所关心的是问题的非零解，因此$T(t)\neq 0.$，由(8)得

$$X(0)=X(l)=0. \qquad (9)$$

(6)(9)构成一个特征问题。

2.解特征问题

对于特征问题(6)(9)

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & (6) \\ X(0)=X(l)=0. & (9) \end{cases}$$

由第二章定理4.1知，其所有特征值均为正数，因此(6)有通解：

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

由(9)得：

$$C_1=0,$$
$$C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

所以： $$\sqrt{\lambda}l=n\pi,\quad n=1,2,\cdots.$$

从而得： $$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots.$$

对应特征函数为： $$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

3.特征展开

令：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{an\pi}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

代入方程及初始条件得：

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\end{cases}$$

比较系数得：

$$\begin{cases} T_n'(t)+a^2T_n(t)=f_n(t), \quad t>0, \\ T_n(0)=\varphi_n, \end{cases} \tag{10}$$

4.求解

求解(10)得

$$T_n(t)=\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau,$$

于是得：

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}+\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \end{aligned}$$

二、分离变量法步骤总结

1.齐次问题：

Step1.令 $u(x,t)=X(x)T(t)$适合方程及边界条件，得特征问题。

Step2. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数，并求出相应的$T(t)$.

Step3.将所有的变量分离形式的特解叠加起来，并利用初值定出所有待定常数。

2.分离变量法一般求解步骤

Step1.边界条件齐次化。

作函数变换

$$v(x,t)=u(x,t)+P_1(x)g_1(t)+P_2(x)g_2(t),$$

$v(x,t)$ 满足齐次边界条件。

其中 $$P_i(x)=\begin{cases} a_i x+b_i, & \beta_1+\beta_2>0, \\ x(a_i x+b_i), & \beta_1=\beta_2=0. \end{cases}$$

Step2.将 $v(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程对应的齐次方程及边界条件，得特征问题。

Step3. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数 $\lambda_n, X_n(x)$.

Step4. 特解展开，将问题中所有的已知、未知函数用特征函数展开。代入方程及初始条件建立$T_n(t)$所满足的常微分方程定解问题。

Step5. 求解 $T_n(t)$ 即得问题之解，从而由得原问题之解。

六、非齐次问题处理法

1.带非齐次边界条件问题

方法：边界条件齐次化

对于问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ 0<x<l,t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l, \\ u_t(x,0)=\psi(x), \qquad 0\le x\le l, \\ -\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=g_2(t), \qquad t\ge 0, & (15) \\ \alpha_2 u_x(l,t)+\beta_2 u(l,t)=g_2(t), \qquad t\ge 0. & (16) \end{cases}$$

作函数变换

$$v(x,t)=u(x,t)+P_1(x)g_1(t)+P_2(x)g_2(t), \tag{17}$$

其中 $P_1(x), P_2(x)$是关于 x 的次数不超过二次的多项式。

$v(x,t)$ 满足齐次边界条件，即：

$$-\alpha_1 v_x(0,t)+\beta_1 v(0,t)=0, \qquad t\ge 0, \tag{18}$$

$$\alpha_2 v_x(l,t)+\beta_2 v(l,t)=0, \qquad t\ge 0. \tag{19}$$

将(17)代入(18)(19)并利用(15)(16)，根据 $P_1(x), P_2(x)$ 的多项式假设，可用待定系数法确定$P_1(x), P_2(x)$ 的系数，从而确定函数变换(17).

于是问题转化为以下形式的带齐次边界条件的非齐次方程定解问题。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\bar{f}(x,t), 0<x<l, t>0, & (20)\\
v(x,0)=\bar{\varphi}(x), \qquad 0\le x\le l, & (21)\\
v_t(x,0)=\bar{\psi}(x), \qquad 0\le x\le l, & (22)\\
-\alpha_1 v_x(0,t)+\beta_1 v(0,t)=0, \qquad t\ge 0, & (23)\\
\alpha_2 v_x(l,t)+\beta_2 v(l,t)=0, \qquad t\ge 0. & (24)
\end{cases}
$$

$P_1(x), P_2(x)$ 取法：

$$
P_i(x)=\begin{cases} a_i x+b_i, & \beta_1+\beta_2>0,\\ x(a_i x+b_i), & \beta_1=\beta_2=0.\end{cases}
$$

2.非齐次方程情形

步骤：

Step1.将 $v(x,t)=X(x)T(t)$代入方程(20)对应的齐次方程及边界条件，得特征问题。

Step2. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数 $\lambda_n, X_n(x)$.

Step3. 特解展开，将问题中所有的已知、未知函数用特征函数展开。

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t),$$

$$\overline{f}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)f_n(t),$$

$$\overline{\varphi}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),\qquad \overline{\psi}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n X_n(x),$$

其中

$$f_n(t)=\frac{\int_0^l \overline{f}(x,t)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},$$

$$\varphi_n=\frac{\int_0^l \overline{\varphi}(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},\ \psi_n=\frac{\int_0^l \overline{\psi}(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx}.$$

将它们代入(20)(21)(22)即得$T_n(t)$所满足的常微分方程定解问题。

Step4. 求解 $T_n(t)$ 即得问题(20)-(24)之解，从而由(17)得原问题之解。

分离变量法求解步骤

Step1.边界条件齐次化。

作函数变换

$$v(x,t)=u(x,t)+P_1(x)g_1(t)+P_2(x)g_2(t),$$

$v(x,t)$ 满足齐次边界条件。

其中 $$P_i(x)=\begin{cases} a_i x+b_i, & \beta_1+\beta_2>0, \\ x(a_i x+b_i), & \beta_1=\beta_2=0. \end{cases}$$

Step2.将 $v(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程(20)对应的齐次方程及边界条件，得特征问题。

Step3. 解特征问题，求出所有特征值和特征函数 $\lambda_n, X_n(x)$.

Step4. 特解展开，将问题中所有的已知、未知函数用特征函数展开。代入方程及初始条件建立$T_n(t)$所满足的常微分方程定解问题。

Step5. 求解 $T_n(t)$ 即得问题(20)-(24)之解，从而由(17)得原问题之解。

作　业

- Page 176, 9 (1), (6)。

§3　极值原理与最大模估计

- 极值原理－讨论的是方程的解的最大值和最小值的分布位置；

- 最大模估计－方程的解的绝对值的上界估计，它在偏微分方程理论中具有基本的重要的作用。得到最大模估计的常用方法是利用极值原理。

- 从实际问题中看极值原理：

设有一物体，内部没有热源，则该物体的温度的最大值和最小值必在初始时刻或在该物体的边界上取到。

可以设想：一块0℃的冰，放在0℃到10℃的空气中，这块冰内部的温度，永远不会超过10℃，也不会低于0℃。

其原因是：热量总是从温度高的地方流向温度低的地方。因此，温度高的点有温度降低的趋势，温度低的点有温度升高的趋势，（如果没有热量流入）。

- 数学表述：

设 Ω 为物体占据的空间区域，$T>0,\ \Omega_T=\Omega\times(0,\ T)$，$u(x,t)$ 是物体的温度，且 $u\in C(\overline{\Omega_T})\cap C^{2,1}(\Omega_T)$，满足

$$u_t-\Delta u=0,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

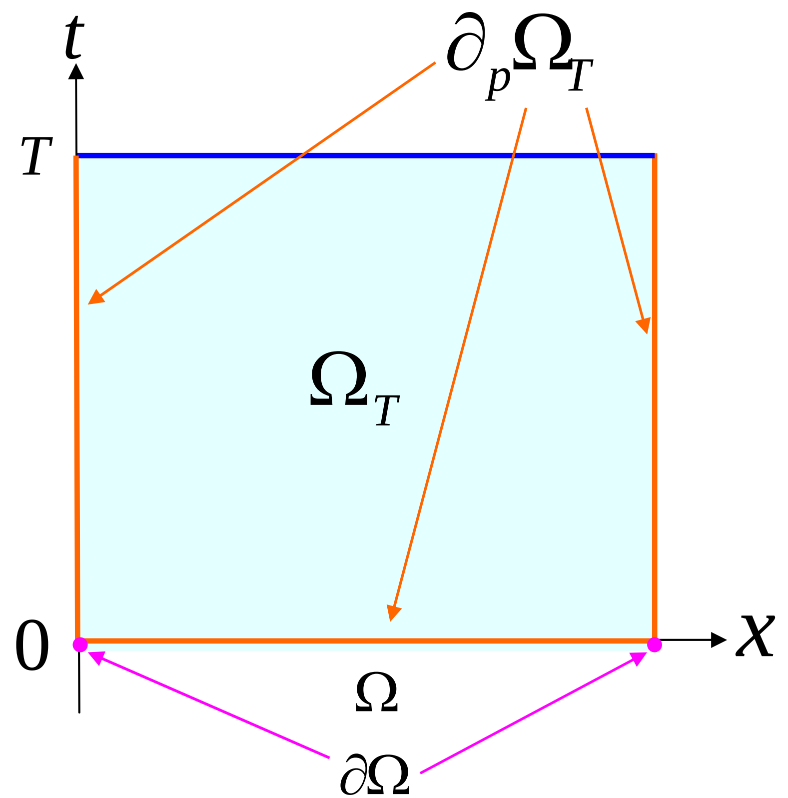
则 $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u=\max\limits_{\partial_p\Omega_T} u,$

$\min\limits_{\overline{\Omega}_T} u=\min\limits_{\partial_p\Omega_T} u,$

其中，

$$\partial_p\Omega_T=\left(\partial\Omega\times[0,T]\right)\cup\left(\Omega\times\{0\}\right),$$

称为 Ω_T 的抛物型边界。



§ 3.1　弱极值原理

记　$Q=\{(x,t)\mid 0<x<l,\ 0<t\le T\}$,

$\Gamma=\partial_p Q=\{(x,t)\in\partial Q\mid x=0,\ 或\ x=l,\ 或\ \ t=0.\}$,

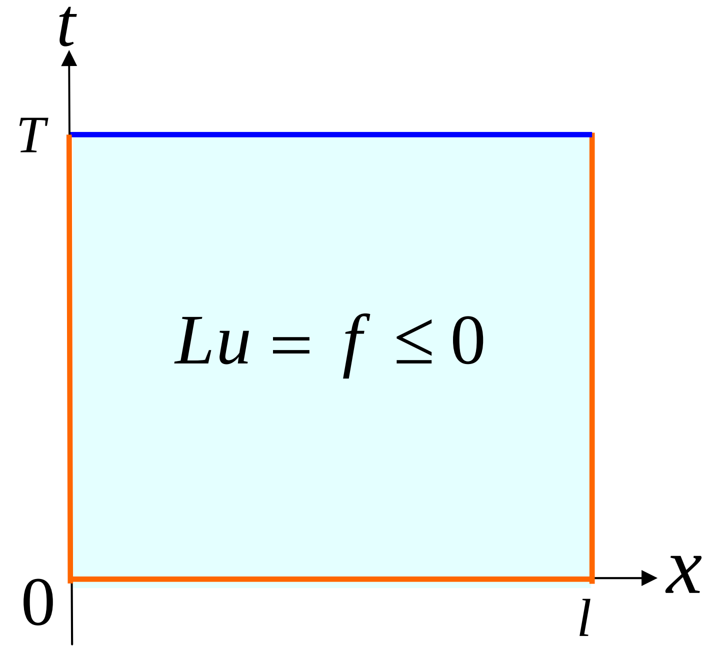
$Lu=u_t-a^2u_{xx}$, $(a>0\ 常数)$

定理 3.1: （弱极值原理）

设 $u\in C(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$,

且 $Lu=f\le 0$ 于Q,

则 $\max\limits_{\overline{Q}} u=\max\limits_{\Gamma} u$ 。



注: $f\le 0$ 表示吸热,

因此不会使内部温度升高。

证明：因为 $\overline{Q}$ 是有界闭集，而 $u \in C(\overline{Q})$，故 u 在 $\overline{Q}$ 上的最大值存在。 下面分两种情况来证明最大值必在抛物型边界上取到。

情形 1：$f < 0$ 于 $\overline{Q}$ 。此时，u 不能在 $Q - \Gamma$ 内取最大值。

否则，存在 (x_0, t_0)，使得：

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q}} u,$$

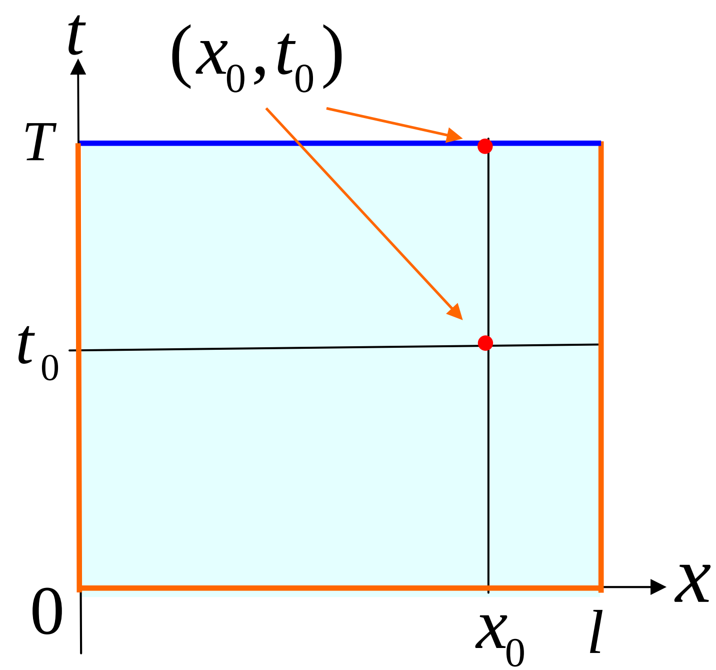
且 $0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \le T,$

令：$\varphi(x) \equiv u(x, t_0)\ (0 < x < l),$

$$\psi(t) \equiv u(x_0, t)\ (0 < t \le T),$$

则：$\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 取到最大值，

$\psi(t)$ 在 $t = t_0$ 取最大值，



从而：

$$\begin{cases} 0=\varphi'(x_0)=u_x(x_0,t_0), \\ 0\geq\varphi''(x_0)=u_{xx}(x_0,t_0), \\ 0\geq\psi(t_0)=u_t(x_0,t_0), \end{cases}$$

于是：$$Lu\big|_{(x_0,t_0)}=\left(u_t-a^2u_{xx}\right)\Big|_{(x_0,t_0)}\geq 0.$$

但由假设：$$Lu=f<0,\ \text{于}\ \overline{Q}.$$

这就得出矛盾。 所以

u 在 $\overline{Q}$ 中的最大值只能在 Γ 内取到，从而

$$\max_{\overline{Q}} u=\max_{\Gamma} u\ 。$$

情形 2：$f \le 0$ 于 $\overline{Q}$ 。

此时，通过适当的函数变换，可以化为情形1。

对任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $v = u - \varepsilon t$, 则 $v \in C(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$,

且 $Lv = v_t - av_{xx} = u_t - au_{xx} - \varepsilon = f - \varepsilon < 0$ 于 Q,

对 v 用情形 1 的结论，就有

$$\max_{\overline{Q}} v = \max_{\Gamma} v \text{ 。}$$

而
$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\overline{Q}} \left(v + \varepsilon t\right) \le \max_{\overline{Q}} v + \max_{\overline{Q}} \varepsilon t$$
$$\le \max_{\Gamma} v + \varepsilon T$$

$$\max_{\Gamma} v = \max_{\Gamma} \left(u - \varepsilon t\right) \le \max_{\Gamma} u + \varepsilon T.$$

所以，

$$\max_{\overline{Q}} u \le \max_{\Gamma} u + 2\varepsilon T.$$

令 $\varepsilon \to 0,$ 就得到. $\max_{\overline{Q}} u \le \max_{\Gamma} u.$

另一方面， 因为 $\Gamma \subset \overline{Q}$， 总有

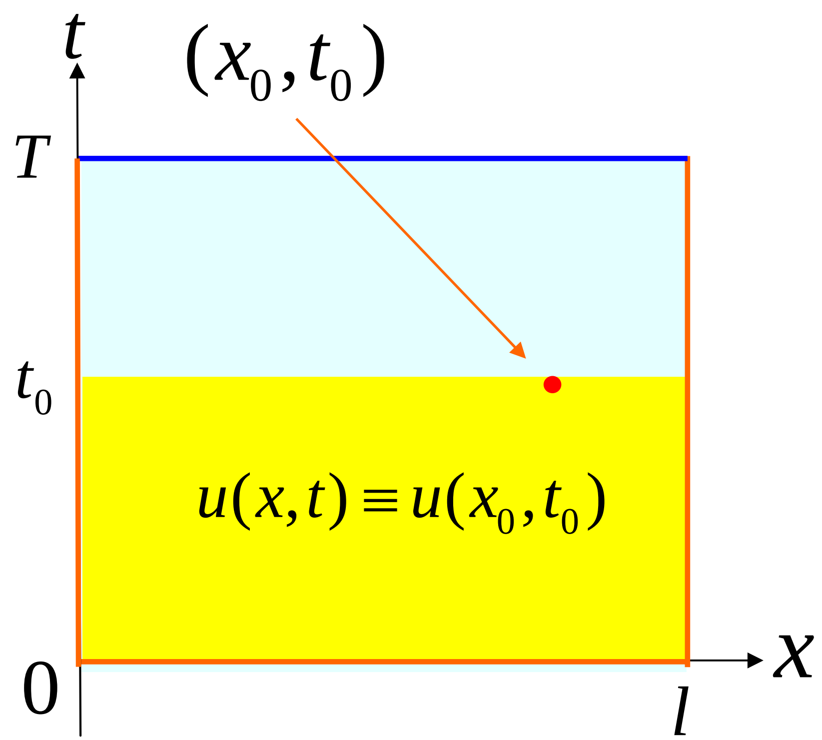
$$\max_{\overline{Q}} u \ge \max_{\Gamma} u.$$

所以， $\max_{\overline{Q}} u = \max_{\Gamma} u.$ 证毕。

注1： 上面证明中，所用的函数 $v = u - \varepsilon t$ 称为辅助函数，这一证明方法称为辅助函数法，它是偏微分方程理论中经常使用的一种技巧。

注：还可以进一步证明，如果 u 的最大值在 $\overline{Q}-\Gamma$ 中的某点 (x_0,t_0) 取到，则 u 在 $\{(x,t)\mid 0\geq x\geq l, 0\geq t\geq t_0\}$ 中必恒等于常数。

这个结论比定理3.1要强，因此定理3.1 称为弱极值原理。



推论1： 设 $u\in C(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$， 且 $Lu=f\geq 0$ 于Q,
则 u 在 $\overline{Q}$ 上的最小值必在抛物边界 Γ 上取到，即

$$\min_{\overline{Q}} u=\min_{\Gamma} u$$ 。

如果 $Lu=0$ 于Q,
则 u 在 $\overline{Q}$ 上的最大值与最小值都必在抛物边界 Γ 上取到。

证明： 作变换 $v=-u$ ， 则 设 $v\in C(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$，
且 $Lv=-f\leq 0$ 于Q, 由定理3.1： $\max_{\overline{Q}} v=\max_{\Gamma} v.$

即
$$\max_{\overline{Q}}(-u)=\max_{\Gamma}(-u),$$

而
$$\max_{\overline{Q}}(-u)=-\min_{\overline{Q}}u,\qquad \max_{\Gamma}(-u)=-\max_{\Gamma}u,$$

所以
$$-\min_{\overline{Q}}u=-\min_{\Gamma}u,$$

于是
$$\min_{\overline{Q}}u=\min_{\Gamma}u.$$

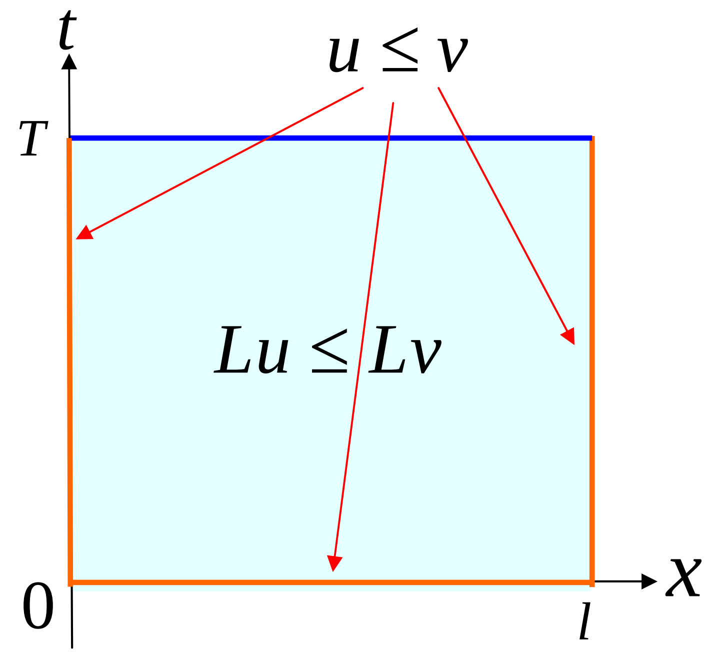
因此，推论1的第一部份结论成立，再结合定理3.1，就得出推论1的第一部份结论。

证毕

推论2：（比较原理）

设 u、$v\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$，

且 $\begin{cases} Lu\le Lv, \text{ 于}Q, \\ u\le v, \text{ 于}\Gamma, \end{cases}$ 则 $u\le v$, 于Q,



证明： 令 $w=u-v$,

则 $Lw=Lu-Lv\le 0$ 于Q,

$w\le 0$, 于Γ,

由定理1.3，$\max\limits_{\overline{Q}} w=\max\limits_{\Gamma} w\le 0.$

所以，$w\le 0$ 于Q, 即，$u\le v$ 于Q。 证毕。

注： 由推论2的证明，我们得到一个更常用的结论，即

设 $u \in C(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$，

$$\text{且}\quad \begin{cases} Lu \le 0, \ \text{于} Q, \\ u \le 0, \ \text{于} \Gamma, \end{cases} \quad \text{则} \quad u \le 0 \ \text{于} Q,$$

注意1： 若 $0 \le x \le l$ 换为 $\mathrm{c} \le x \le d$, 相应的极值原理及其推论同样成立。

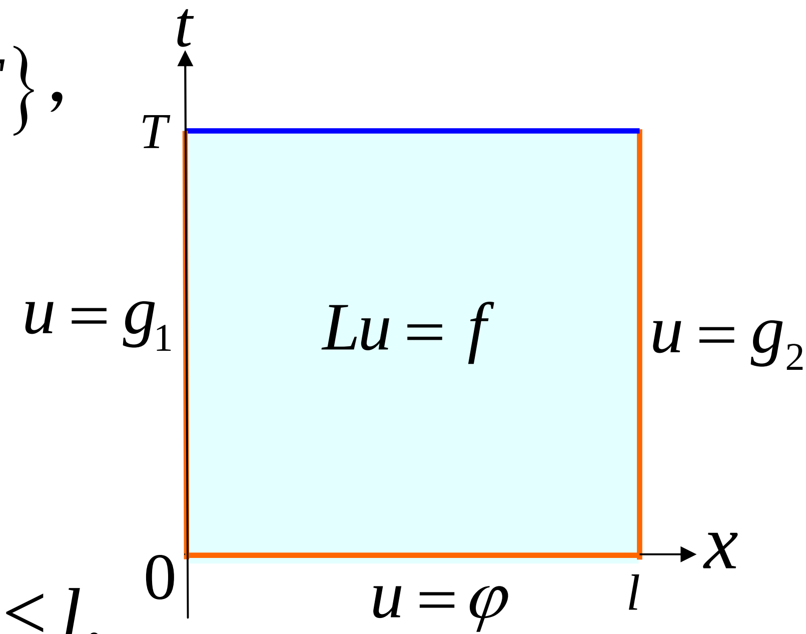
注意2： 一般来说，热传导方程和位势方程都有相应的极值原理，而波动方程没有极值原理。

作业：　　Page 179, 16.

§ 3.2 第一边值问题解的最大模估计

记 $Q=\{(x,t)\ |\ 0<x<l,\ 0<t\le T\}$,

$Lu=u_t-a^2u_{xx}$, ($a>0$ 常数)



考虑第一边值问题:

$$
(3.4)\quad \begin{cases} Lu=f, & (x,t)\in Q, \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l, \\ u(0,t)=g_1(t),\quad u(l,t)=g_2(t), & 0\le t\le T, \end{cases}
$$

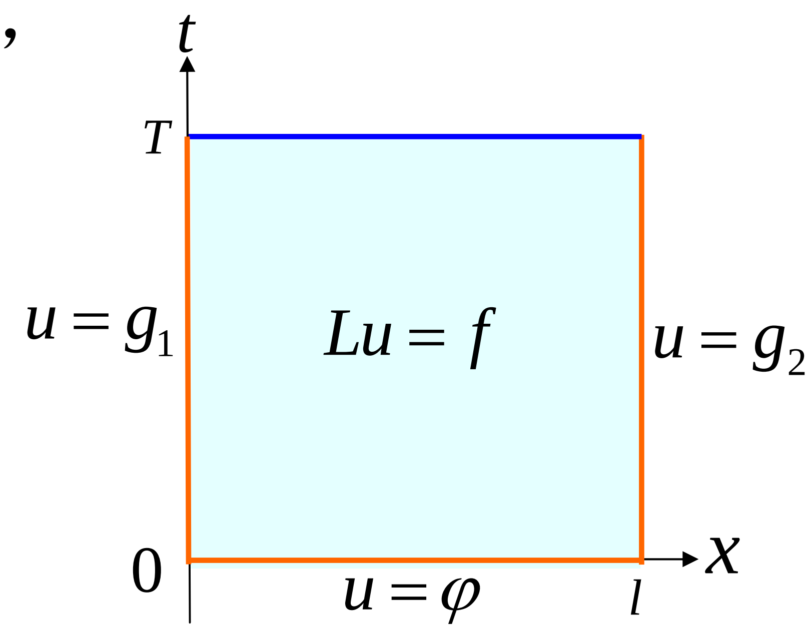
记 $F\equiv\sup\limits_{Q}|f|$,

$$
B\equiv\max\left\{\max_{[0,l]}|\varphi|,\max_{[0,T]}|g_1|,\max_{[0,T]}|g_2|\right\}
$$

定理 3.2： 设 $u\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$,

且是边值问题（3.4）的解，则

$$\max_{\overline{Q}}|u|\le FT+B。$$



其中 $F\equiv\sup\limits_{Q}|f|,$

$$B\equiv\max\left\{\max_{[0,l]}|\varphi|,\max_{[0,T]}|g_1|,\max_{[0,T]}|g_2|\right\}$$

证明：通过构造适当的辅助函数与问题的解作比较，再用比较原理得出结论。

如果 $F=+\infty$，定理自然成立。所以我们只需考虑

$F<+\infty$ 的情况。

找 v，使得：$v\in C(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$，且

$$\begin{cases} L(\pm u)=\pm f\le Lv & 于\ Q, \\ \pm u\le v & 于\ \Gamma, \end{cases}$$

则由比较原理，得 $\pm u\le v$ 于 $\overline{Q}$,

从而 $|u|\le v$ 于 $\overline{Q}$。

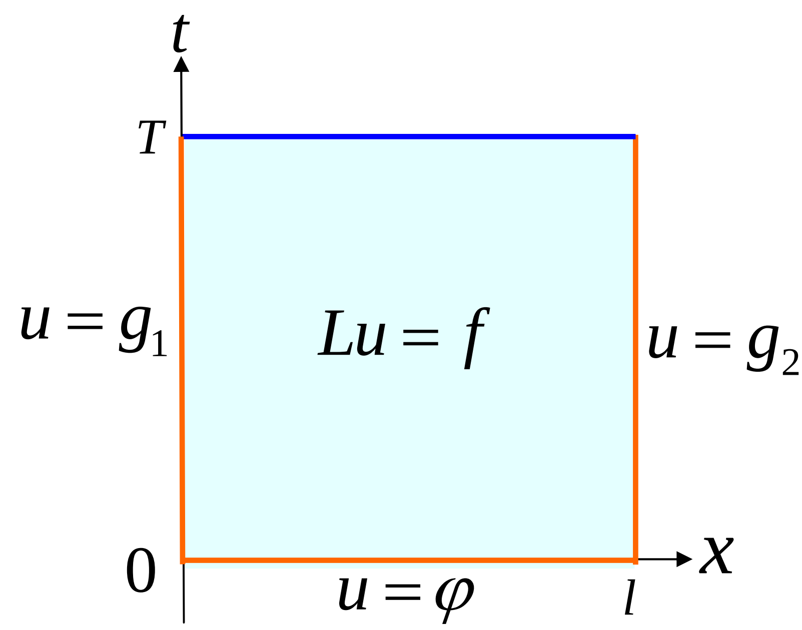
取 $v=Ft+B$, 则

$$Lv=v_t-a^2\mathrm{v}_{\mathrm{xx}}=F=\sup_{\overline{Q}}|f|\ge\pm f=L(\pm u)\quad 于\ Q,$$

$$v\ge B\ge\pm u\quad 于\ \Gamma,$$

所以 $v=Ft+B$ 满足要求，且 $|u|\le v\le FT+B$ 于 $\overline{Q}$。

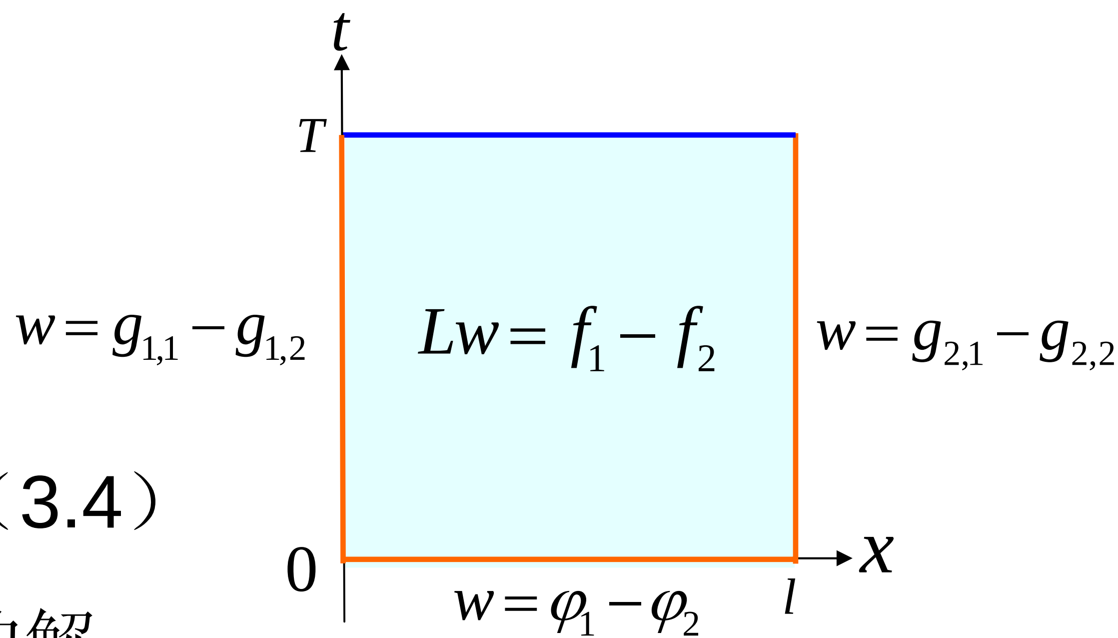
推论 1： 边值问题（3.4）的在 $C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 的解，连续依赖于 f、φ、g_1 和 g_2 。



即，若 u_1、u_2 为（3.4）在 $C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 中分别对应于非齐次项 f_1 和 f_2 、初值 φ_1 和 φ_2 、边值 $g_{1,1}$ 和 $g_{1,2}$ 及 $g_{2,1}$和 $g_{2,2}$，则

$$\max_{\overline{Q}}|u_1-u_2|\le T\sup_{Q}|f_1-f_2|$$
$$+\max\left\{\max_{[0,l]}|\varphi_1-\varphi_2|,\max_{[0,T]}|g_{1,1}-g_{1,2}|,\max_{[0,T]}|g_{2,1}-g_{2,2}|\right\}$$

证明： 令 $w=u_1-u_2$，再应用定理3.2的最大模估计即可。



推论 2： 边值问题（3.4）

在 $C(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$ 的解

是唯一的。

证明： 直接由推论1得出。

作业：**Page 178, 13**。

§3.3 第二、三边值问题解的最大模估计

第二、三边值问题可以写成统一的形式：

$$
(3.6)\quad \begin{cases}
Lu = f, \quad (x,t)\in Q, \\
u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \\
\left.\left[-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha(t)u\right]\right|_{x=0} = g_1(t), \quad 0\le t\le T, \\
\left.\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta(t)u\right]\right|_{x=l} = g_2(t), \quad 0\le t\le T,
\end{cases}
$$

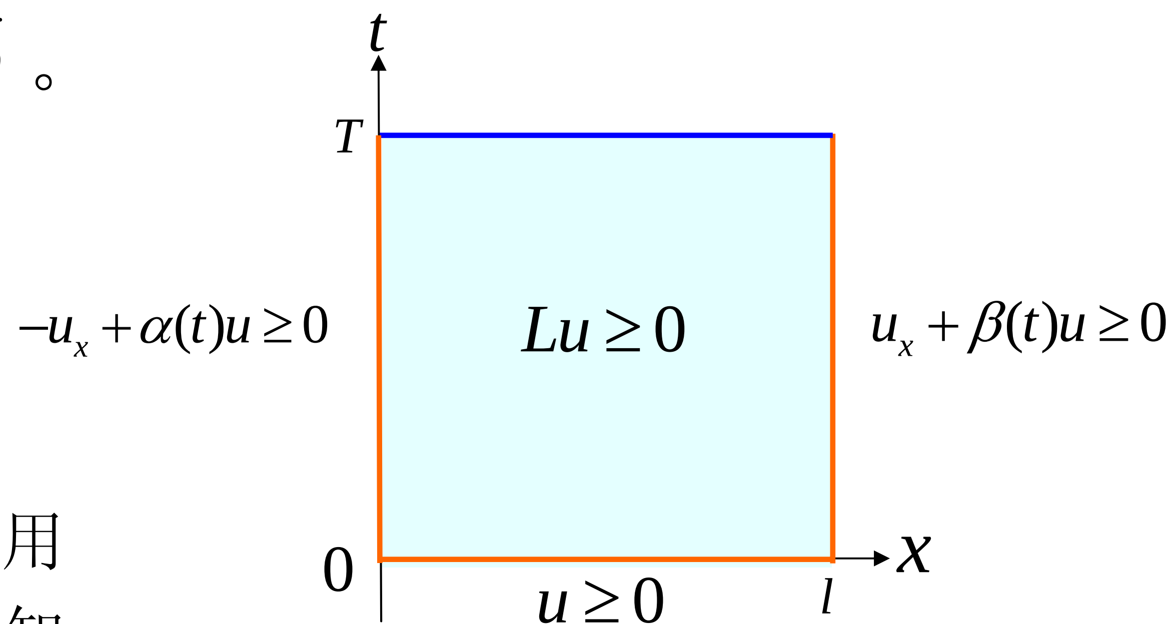
其中：$\alpha(t)\ge 0,\ \beta(t)\ge 0$ 。当 $\alpha(t)\equiv\beta(t)\equiv 0,$

（3.6）就是第二类边值问题。

引理3.3： 设 $f \geq 0$、$\varphi \geq 0$、 $g_1 \geq 0$、$g_2 \geq 0$；

$u \in C^{0,1}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$ 且为（3.6）的解，

则 $u \geq 0$ 于 $\overline{Q}$ 。



证明思路：

由定理的条件，可利用弱极值原理的推论，知 u 在 $\overline{Q}$ 中的最小值在 $\overline{Q}$ 的抛物型边界 Γ 上取到。再用 Γ 上的条件，来讨论最小值分别在三条直线段上取到的情况，就可得出引理的结论。

证明： 分两种情况来证明。

情形1：

$$\begin{cases} \left[-u_x+\alpha(t)u\right]\Big|_{x=0}>0, \quad 0\le t\le T, \\ \left[u_x+\beta(t)u\right]\Big|_{x=l}>0, \quad 0\le t\le T, \end{cases}$$

因 $u\in C^{0,1}(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})\supset C(\overline{\mathrm{Q}})\cap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$，

且 $Lu\ge 0$ 于 $\overline{Q}$ 。根据弱极值原理的推论1，知：

存在 $(x_0,t_0)\in\Gamma$，使得 $\min\limits_{\overline{Q}} u=u(x_0,t_0)$。

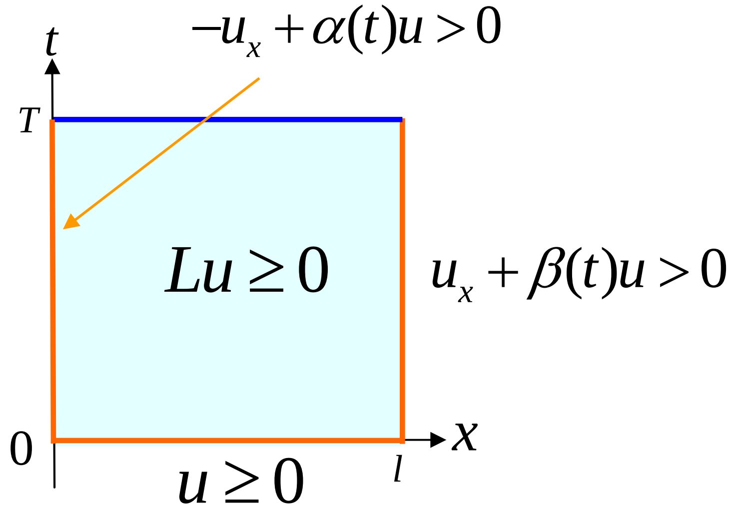
要证： $u(x_0,t_0)\ge 0$。

①，如果 $t_0=0$，则由初值条件得 $u(x_0,t_0)=u(x_0,0)\ge 0$。

②，如果 $x_0=0$, 则由边界条件得

$$-u_x(0,t_0)+\alpha(t_0)u(0,t_0)>0,$$

因为函数 $u(x,t_0)$ $(0\le x\le l)$ 在 $x=x_0=0$ 取到最小值， 故 $u_x(0,t_0)\ge 0$。 所以，由上式得：



$\alpha(t_0)u(0,t_0)>0$, 而由已知条件 $\alpha(t_0)\ge 0$, 因此必有 $\alpha(t_0)>0$,

从而必有 $u(0,t_0)>0$, 这就是 $u(x_0,t_0)>0$。

③，如果 $x_0=1$, 则由边界条件得 $u_x(1,t_0)+\beta(t_0)u(1,t_0)>0$,

因为函数 $u(x,t_0)$ $(0\le x\le l)$ 在 $x=x_0=1$ 取到最小值，

故 $u_x(0,t_0)\le 0$。 所以，$\beta(t_0)u(1,t_0)>0$, 再由 $\beta(t_0)\ge 0$,

得 $\beta(t_0)>0$ 及 $u(x_0,t_0)=u(1,t_0)>0$。

情形2：

$$\begin{cases} \left[-u_x+\alpha(t)u\right]\big|_{x=0}\geq 0, \quad 0\leq t\leq T, \\ \left[u_x+\beta(t)u\right]\big|_{x=l}\geq 0, \quad 0\leq t\leq T, \end{cases}$$

对任意的 $\varepsilon>0$，找一个与 ε 无关的辅助函数 $z(x,t)$, 使得函数 $v\equiv u+\varepsilon z$ 满足情形1的条件。如果这样的函数 z 已经找到，则由情形1证明的结果，得：

$$v\equiv u+\varepsilon z\geq 0, \quad 于\overline{Q}\ 。$$

在上式中，令 $\varepsilon\to 0$，就得所要证的结果：

$$u\geq 0, \quad 于\overline{Q}\ 。$$

下面来找 $z(x,t)$，$v\equiv u+\varepsilon z$ 要满足下述条件：

$$
\begin{cases}
0 \le Lv = Lu + \varepsilon Lz, \quad (x,t) \in Q\ ; \\
0 \le v(x,0) = u(x,0) + \varepsilon z(x,0), \quad 0 \le x \le l\ ; \\
0 < \left[-v_x + \alpha(t)v\right]\Big|_{x=0} \\
\quad = \left[-u_x + \alpha(t)u\right]\Big|_{x=0} + \varepsilon\left[-z_x + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=0}, \quad 0 \le t \le T; \\
0 < \left[v_x + \alpha(t)v\right]\Big|_{x=l} \\
\quad = \left[u_x + \alpha(t)u\right]\Big|_{x=l} + \varepsilon\left[z_x + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=l}, \quad 0 \le t \le T;
\end{cases}
$$

利用 u 满足的条件，为使上式成立，z 只需满足：

$$
Lz \ge 0, \quad (x,t) \in Q\ ; \quad z(x,0) \ge 0, \quad 0 \le x \le l\ ;
$$

$$
\left[-z_x + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=0} > 0, \quad \left[z_x + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=l} > 0, \quad 0 \le t \le T。
$$

可取为：$z=2a^2t+\left(x-l\right)^2$， 事实上，

$$Lz=z_t-a^2z_{xx}\ \ =2a^2-a^2\cdot 2\ \ =0\ ;$$

$$z(x,t)\geq 0,\ \ t\geq 0\ ;$$

$$\left[-z_x+\alpha(t)z\right]\Big|_{x=0}=\left[-2\left(x-\tfrac{l}{2}\right)+\alpha(t)z\right]\Big|_{x=0}\geq l>0\ ;$$

$$\left[z_x+\beta(t)z\right]\Big|_{x=l}=\left[2\left(x-\tfrac{l}{2}\right)+\beta(t)z\right]\Big|_{x=l}\ \ \geq l>0\ 。$$

于是 $z=2a^2t+\left(x-l\right)^2$ 满足要求。

引理3.3证毕。

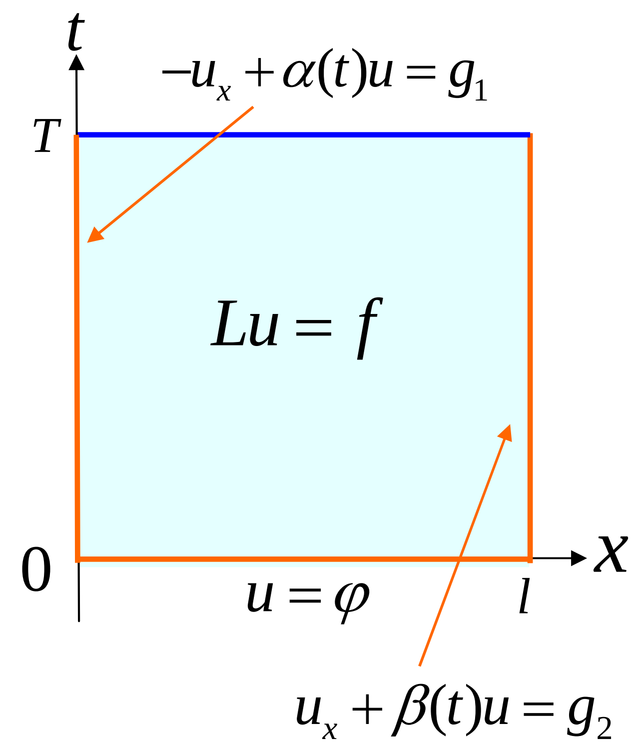
定理3.4: 设 $u\in C^{0,1}(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 是问题（3.6）的解，

则 $\max\limits_{\overline{Q}}|u|\le C(F+B)$ 。

其中， $F\equiv\sup\limits_{Q}|f|$,

$$B\equiv\max\left\{\max_{[0,l]}|\varphi|,\max_{[0,T]}|g_1|,\max_{[0,T]}|g_2|\right\},$$

常数 C 只依赖于 a 、l 和 T 。



证明思路： 找一个辅助函数 $w(x,t)$,

使得函数 $v\equiv w\pm u$ 满足引理3.3的条件，则由引理3.3，得：

$$v=w\pm u\ge 0,\quad (x,t)\in\overline{Q},$$

从而 $\max\limits_{\overline{Q}}|u|\le\max\limits_{\overline{Q}}w$, 这就得出了最大模估计。

证明： 若 $F=+\infty$, 定理自然成立。

所以，我们只需考虑 $F<+\infty$ 的情况。

令 $v=w\pm u$, （两个函数写在一起），$w(x,t)$ 待定。

我们要选取适当的 $w(x,t)$, 使得函数 $v(x,t)$

满足引理3.3的条件， 也即 $v\in C^{0,1}(\overline{\mathrm{Q}})\bigcap \mathrm{C}^{2,1}(\mathrm{Q})$,

且满足下述四个不等式：

$$
\begin{cases}
0 \le Lv = \pm Lu + Lw = \pm f + Lw, \quad (x,t) \in Q \ ; \\
0 \le v(x,0) = \pm u(x,0) + w(x,0) \\
\qquad\qquad = \pm \varphi(x) + w(x,0), \quad 0 \le x \le l \ ; \\
0 \le \left[-v_x + \alpha(t)v\right]\Big|_{x=0} = \left[-u_x + \alpha(t)u\right]\Big|_{x=0} + \left[-w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=0} \\
\qquad\qquad = g_1(t) + \left[-w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=0}, \quad 0 \le t \le T; \\
0 \le \left[v_x + \alpha(t)v\right]\Big|_{x=l} = \left[u_x + \alpha(t)u\right]\Big|_{x=l} + \left[w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=l} \\
\qquad\qquad = g_2(t) + \left[w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=l}, \quad 0 \le t \le T;
\end{cases}
$$

为使上式成立， w 只需满足：

$$
Lw \ge F, \quad (x,t) \in Q \ ; \quad w(x,0) \ge B, \quad 0 \le x \le l \ ;
$$

$$
\left[-w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=0} \ge B, \quad \left[w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=l} \ge B, \quad 0 \le t \le T。
$$

可取为：
$$w = Ft + B\left[\frac{1}{l}z + 1\right],$$

其中 $z = 2a^2t + \left(x - l/2\right)^2$ 是在引理3.3的证明中使用过的函数，

满足
$$\begin{cases} Lz = 0, \quad z(x,t) \ge 0, \ t \ge 0 \ ; \\ \left[-z_x + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=0} \ge l, \quad \left[z_x + \beta(t)z\right]\Big|_{x=l} \ge l。 \end{cases}$$

因此，$Lw = w_t - a^2 w_{xx} = F$； $w(x,t) \ge B, \ t \ge 0$ ；

$$\left[-w_x + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=0} = \frac{B}{l}\left[-z_x + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=0} + \alpha(t)(Ft + B)$$
$$\ge \frac{B}{l}l = B;$$
$$\left[w_x + \beta(t)w\right]\Big|_{x=l} = \frac{B}{l}\left[z_x + \beta(t)z\right]\Big|_{x=1} + \beta(t)(Ft + B)$$
$$\ge \frac{B}{l}l = B;$$

所以 $w = Ft + B\left[\frac{1}{l}z + 1\right]$ 满足要求。

因此 $v = w \pm u$ 满足引理3.3的条件。 由引理3.3得：

$$v = w \pm u \geq 0, \quad 于\ \overline{Q},$$

所以

$$|u| \leq w, \quad 于\ \overline{Q},$$

再由 w 的表达式，得：当 $(x,t) \in \overline{Q}$ 时，

$$|u(x,t)| \leq w(x,t) = Ft + B\left[\frac{1}{l}\left\{2a^2t + \left(x - l/2\right)^2\right\} + 1\right]$$
$$\leq \left[\frac{1}{l}\left\{2a^2T + \left(l/2\right)^2\right\} + 1\right](Ft + B) \equiv C(Ft + B)$$

定理3.4证毕。

作　业

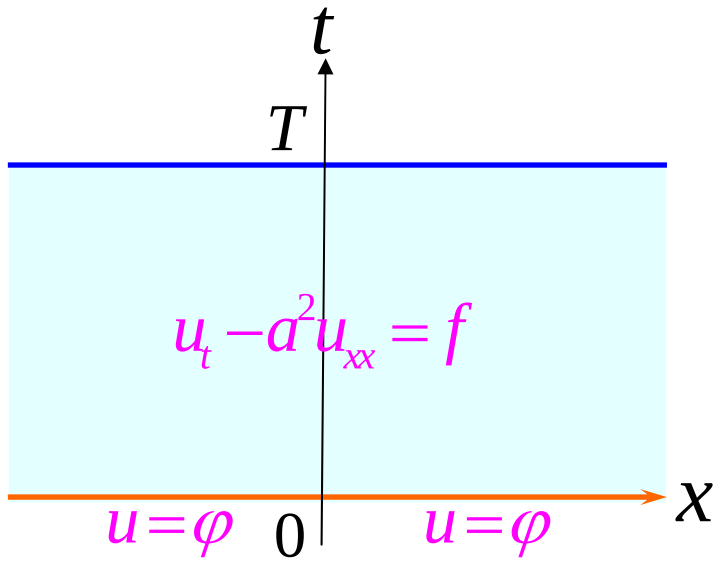
Page 180, 17, 19, 20。

§ 3.4　初值问题解的最大模估计

$$
(3.13)\qquad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x,t)\in Q, \\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty < x < +\infty。 \end{cases}
$$

这里　$Q=\{(x,t)\,|\,-\infty<x<+\infty,\quad 0<t\le T\}$。

我们前面已经在 $f\equiv 0$ 和 φ 有界连续时，用Poisson公式求出了(3.13)的有界解。本小节将证明(3.13)的解的最大模估计，由此可得出(3.13)的有界解的唯一性和关于 f 和 φ 的连续依赖性。



定理 3.5: 设 $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ 是问题（3.13）的有界解，则

$$\sup_{Q}|u| \le T\sup_{Q}|f| + \sup_{(-\infty,+\infty)}|\varphi|。$$

证明思路： 因为 Q 是无界区域，不好直接证明，我们先在 Q 的有界子区域中证明有关估计，再让该子区域趋向于 Q 得出所要求的估计。

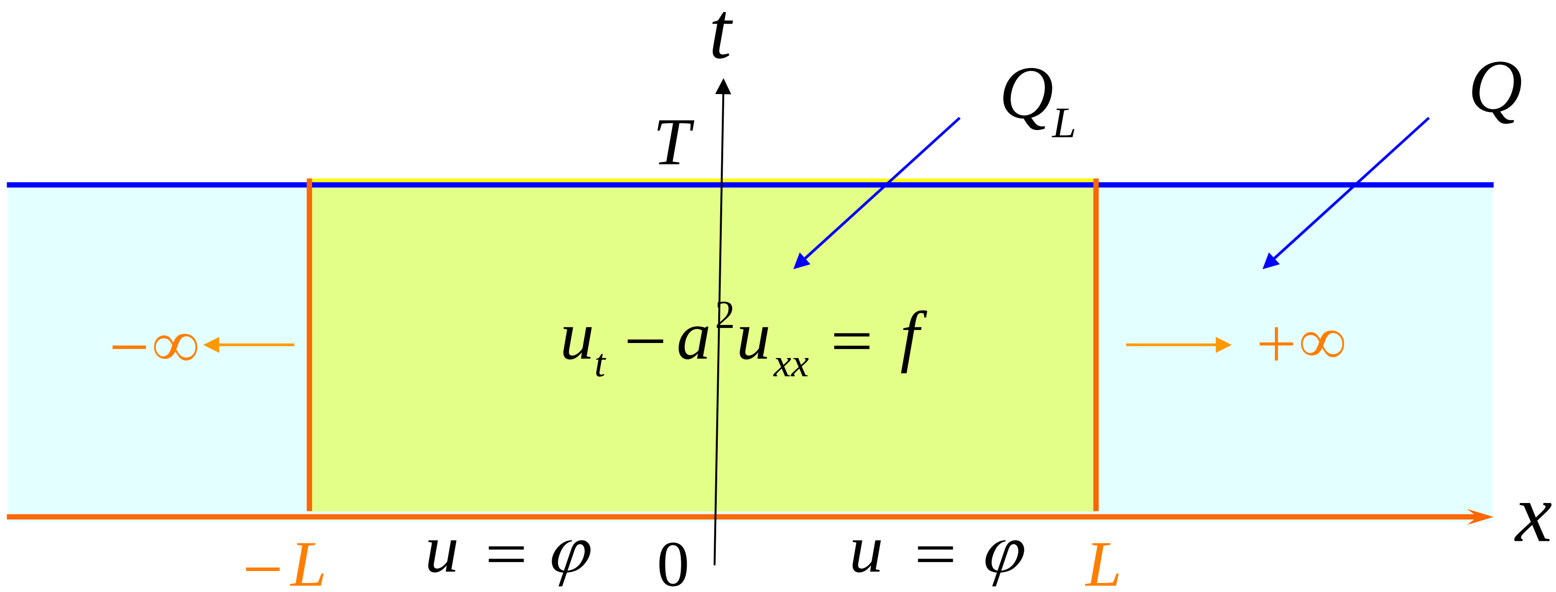
证明： 记 $F \equiv \sup_{Q}|f|$、$\Phi = \sup_{(-\infty,+\infty)}|\varphi|$、$K = \sup_{Q}|u|$。

若 $F = +\infty$ 或 $\Phi = +\infty$，定理3.5自然成立。所以，可设

$$F < +\infty, \qquad \Phi < +\infty。$$

另外，由题设 u 是有界的，所以也有 $K < +\infty$。

记 $Q_L \equiv \{(x,t) \mid |x|<L,\ 0<t\le T\}$



我们要证明： 对 $\forall\ (x,t)\in Q_L,\ \forall L>0,$ 成立：

$$(*) \qquad |u(x,t)| \le Ft + \Phi + \frac{K}{L^2}\left[x^2 + 2a^2 t\right]。$$

若 (*) 成立， 则对 $\forall\ (x_0,t_0)\in Q,$ 当 $L>|x_0|$ 时，

$(x_0,t_0)\in Q_L,$ 从而由 (*) 得：

$$|u(x_0,t_0)|\le Ft_0+\Phi+\frac{K}{L^2}\left[x_0^2+2a^2t_0\right],\qquad \forall L>|x_0|。$$

在上式中令 $L\to+\infty$，得：

$$|u(x_0,t_0)|\le Ft_0+\Phi\le FT+\Phi。$$

因为 (x_0,t_0) 是 Q 中任意一点， 所以

$$\sup_Q|u|\le TF+\Phi=T\sup_Q|f|+\sup_{(-\infty,+\infty)}|\varphi|。$$

因此，只要证明了$(*)$ 式，定理3.5就得证。

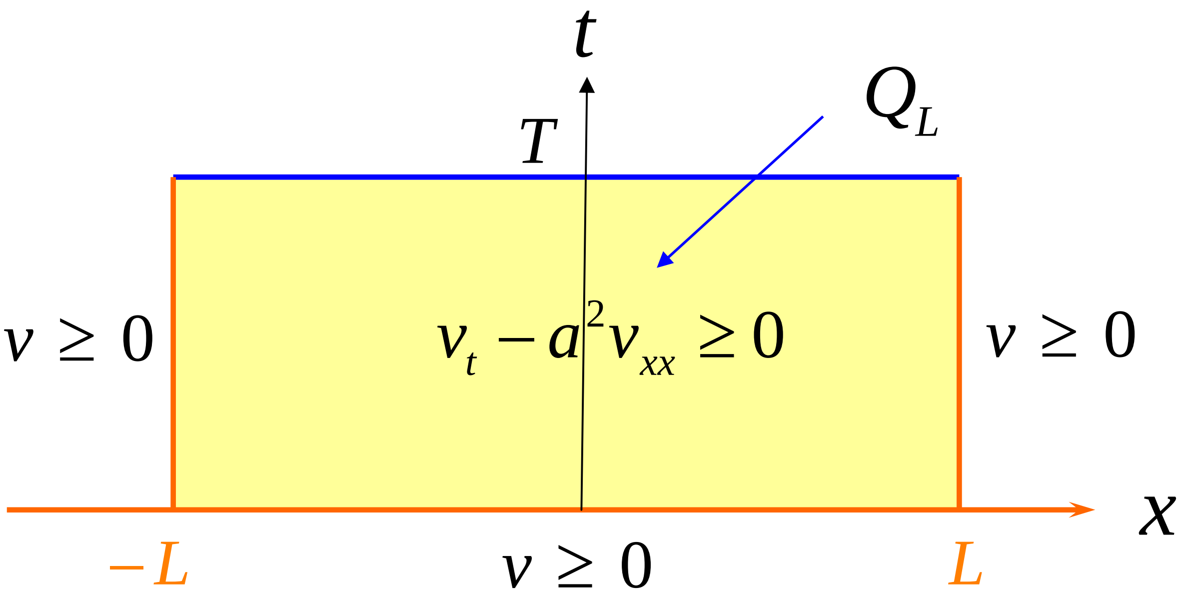
下面我们来证明 $(*)$ 式。

令

$$v(x,t)=Ft+\Phi+\frac{K}{L^2}\left[x^2+2a^2t\right]\pm u(x,t),\quad (x,t)\in\overline{Q_L}$$

则显然 $v\in C(\overline{Q_L})\cap C^{2,1}(Q_L)$, 且

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=F+\dfrac{K}{L^2}\left[2a^2-2a^2\right]\pm\left[u_t-a^2u_{xx}\right] \\ \qquad\qquad =F\pm f\geq 0,\quad \text{于 } Q_L, \\ v(x,0)=\Phi+\dfrac{K}{L^2}x^2\pm\varphi\geq\Phi\pm\varphi\geq 0,\quad -L\leq x\leq L, \\ v(\pm L,t)=K\pm u(\pm L,t)\geq 0,\quad 0\leq t\leq T。\end{cases}$$



由弱极值原理，得 $v \geq 0$， 于 $\overline{Q_L}$

所以， $$Ft + \Phi + \frac{K}{L^2}\left[x^2 + 2a^2 t\right] \pm u(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q_L}$$

于是， $$|u(x,t)| \leq Ft + \Phi + \frac{K}{L^2}\left[x^2 + 2a^2 t\right], \quad (x,t) \in \overline{Q_L}$$

即 (*) 式成立。

定理3.5证毕。

推论： 初值问题（3.13）在 $C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 中的有界解是唯一的，

证明： 假设（3.13）在 $C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 中有两个有界解，对这两个解差应用定理3.5的最大模估计，得出这的差在 $\overline{Q}$ 中恒等于零。

注： 初值问题（3.13）在 $C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)$ 中的解并不是唯一的！其原因是：在无穷远“边界”上，（3.13）对解没有限制，即对 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t)$ 的没有限制。如果要求：存在正常数 M 与 N ，使得

$$|u(x,t)|\le Me^{Nx^2},\quad (x,t)\in Q,$$

则可以证明，这样的解是唯一的。

本节练习：

Page 181，21。

§3.5　边值问题解的能量模估计

本节我们将对一维热传导方程的边值问题建立能量模估计，即能量不等式。

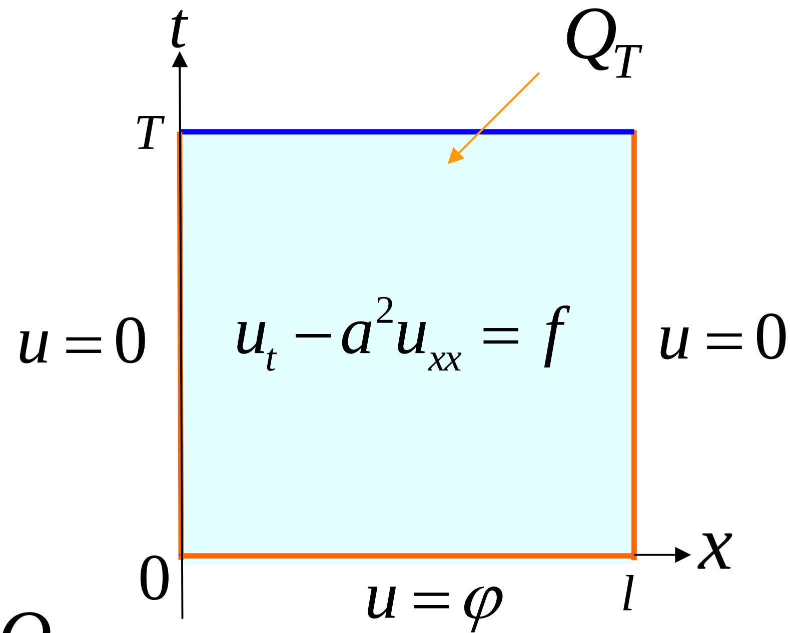
能量模估计方法与弦振动方程的情况是类似的。

我们仅以下述第一边值问题的情况为例，所用的方法也适合于其它边值问题。

记

$a>0$ 、$T>0$ 均为常数，

$$Q_T=\{(x,t)\mid 0<x<l,\ 0<t\le T\},$$



考虑第一边值问题：

$$(3.16)\quad \begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f, & (x,t)\in Q_T, \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l, \\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0, & 0\le t\le T, \end{cases}$$

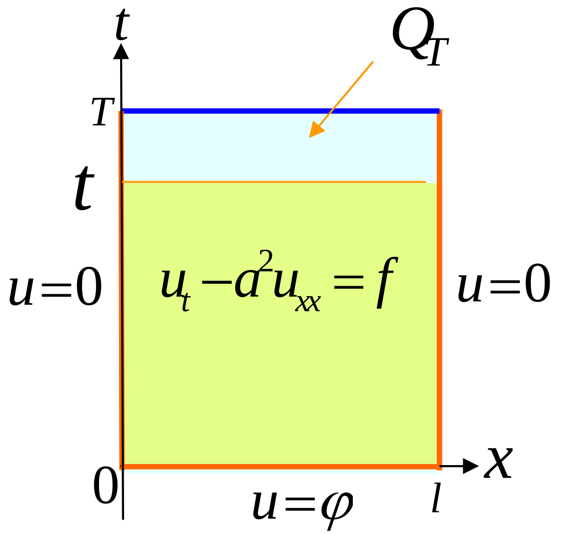
定理 3.6： 设 $u\in C^{1,0}(\overline{Q_T})\cap C^{2,1}(Q_T)$ 是（3.16）的解，

则下述能量估计成立：

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l u^2(x,t)dx+2a^2\int_0^T\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt$$

$$\le M\left(\int_0^l \varphi^2(x)dx+\int_0^T\int_0^l f^2(x,t)dxdt\right)。$$

其中 M 只与 T 有关。



证明： 方程两边乘 u 再在 $[0,l]\times[0,t]$ 上积分，得

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^t\left(u^2\right)_t dx-a^2\int_0^t\int_0^l uu_{xx}dxdt=\int_0^t\int_0^l ufdxdt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^t\left(u^2\right)_t dx=\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx-\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,0)dx$$

$$-a^2\int_0^t\int_0^l uu_{xx}dxdt=a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2dxdt-a^2\int_0^t\left(uu_x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^t\left(u^2\right)_t dx = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,0)dx$$

$$-a^2\int_0^t\int_0^l uu_{xx}dxdt = a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2 dxdt$$

所以，
$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx + a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,0)dx + a^2\int_0^t\int_0^l uf dxdt$$

而
$$2\int_0^t\int_0^l uf dxdt \le \int_0^t\int_0^l u^2 dxdt + \int_0^t\int_0^l f^2 dxdt$$

因此

(*)
$$\int_0^l u^2(x,t)dx + 2a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2 dxdt$$
$$\le \int_0^t\int_0^l u^2 dxdt + \left[\int_0^l \varphi^2(x)dx + \int_0^t\int_0^l f^2 dxdt\right] \quad \forall t\in[0,T],$$

令
$$\begin{cases}\Omega(t)=\int_0^t\int_0^l u^2dxdt,\\ F(t)=\int_0^l\varphi^2(x)dx+\int_0^t\int_0^l f^2dxdt\end{cases}$$

则
$$\begin{cases}\Omega'(t)\le\Omega(t)+F(t), & \forall 0\le t\le T;\\ \Omega(0)=0。\end{cases}$$

由第一式，$\left[e^{-t}\Omega(t)\right]'\le e^{-t}F(t),\qquad \forall 0\le t\le T;$

所以，$$e^{-t}\Omega(t)-\Omega(0)\le\int_0^t e^{-\tau}F(\tau)d\tau\ \le F(t)\int_0^t e^{-\tau}d\tau\le F(t)$$

于是，$$\Omega(t)\le e^tF(t),\qquad \forall 0\le t\le T。$$

代入 (*) 式，得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l u^2(x,t)dx + 2a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2 dxdt \\
&\le (1+e^t)\left[\int_0^l \varphi^2(x)dx + \int_0^t\int_0^l f^2 dxdt\right], \\
&\le (1+e^T)\left[\int_0^l \varphi^2(x)dx + \int_0^T\int_0^l f^2 dxdt\right], \qquad \forall t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

分另取左式两项的上确界，就得：

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\int_0^l u^2(x,t)dx + 2a^2\int_0^T\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt \\
&\le 2(1+e^T)\left[\int_0^l \varphi^2(x)dx + \int_0^T\int_0^l f^2 dxdt\right],
\end{aligned}
$$

所以定理成立，其中 $M = 2(1+e^T)$。 定理**3.6**证毕。

注1： 如果在方程两边乘 u_t 再在 $[0,l]\times[0,t]$ 上积分，

我们可以得到进一步的能量模估计：

$$a^2 \sup_{0\le t\le T}\int_0^l u_x^2(x,t)dx+2\int_0^T\int_0^l u_t^2(x,t)dxdt$$

$$\le M_1\left(\int_0^l[\varphi'(x)]^2dx+\int_0^T\int_0^l f^2(x,t)dxdt\right),$$

其中 M_1 只与 T 有关。

注2： 上述方法也可用于其它边界条件的边值问题，得出相应的能量模估计。

作　业

Page 181，22，23。

注：第22题的条件 $u \in C^{2,1}(\overline{Q})$,

改为　$u \in C^2(\overline{Q})$,

这里　$Q = (0,l) \times (0,T]$ 。

第四章　位势方程

本章讨论位势方程 $-\Delta u = f$ 的基本性质及有关技巧，

主要包括：　基本解， Green函数法，　极值原理，

最大模估计，等等。

术语：　$u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元函数，

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$ 称为Laplace算子，

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$ 称为Laplace方程，

Laplace方程 $\Delta u = 0$ 的解称为调和函数。

§1　基本解与Green函数

§1.1　基本解与Green公式

（1），基本解

与热传导方程类似，对于位势方程我们也可以通过广义函数来定义基本解，它在研究位势方程的研究中起着重要的作用。

①，基本解的定义

定义1.1： 若函数 $U \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 在广义函数意义下满足

$$-\Delta U = \delta(x-\xi), \qquad x、\xi \in \mathbb{R}^n$$

则称 U 为n维Laplace方程 $\Delta u = 0$（或位势方程 $\Delta u = f$）的基本解，记为 $\Gamma(x,\xi)$。　　注意：这里 ξ 是参量，U 的局部可积性及 ΔU 都是对于自变量 x 的。

②，基本解的物理意义

(1)，热传导方程的基本解的定义为：

$$U_t - a^2 \Delta U = \delta(x-\xi), \qquad x、\xi \in \mathbb{R}^n$$

它的物理意义是：位于 ξ 的单位点热源在空间产生的温度分布。当温度趋于平衡，不再随时间而变时，基本解定义的方程化为

$$-a^2 \Delta U = \delta(x-\xi), \qquad x、\xi \in \mathbb{R}^n$$

不妨设 $a=1$，这就得到Laplace方程的基本解，因此Laplace方程的基本解，可看着是：位于 ξ 的单位点热源在空间产生的稳定温度分布。

(2)，位于 ξ 的正单位点电荷在空间产生的电位势分布。

(3)，等等。

③，基本解的求法

先求Laplace方程 $\Delta u=0$ 的一些特殊解，如球对称的解。

记 $$r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

我们要寻求形如 $u(x)=v(r)=v(|x|)$，这样的解在以原点为心的球面上取常数值，因此称为球对称解。

计算：
$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}=\frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}v'(r), \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{1}{r}v'(r)-\frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r}v'(r)+\frac{x_i}{r}v''(r)\frac{x_i}{r},$$

代入方程，得：

$$0=\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{r}v'(r)-\frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r}v'(r)+\frac{x_i}{r}v''(r)\frac{x_i}{r}\right\}$$

$$=v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r)$$

所以Laplace方程在球对称情况下取如下常微分方程形式：

$$v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r)=0$$

求解：当 $v'(r)\neq 0$ 时写成

$$\frac{v''}{v'}=-\frac{n-1}{r},\qquad 即\quad \ln|v'|=-(n-1)\ln r+\ln C,$$

其中 C 为任意的正常数，故 $v'=\dfrac{\pm C}{r^{n-1}},$

结合 $v'(r)=0$ 的情形，就有：

$$v'(r)=\frac{C}{r^{n-1}},\qquad r\neq 0,\qquad C \text{ 为任意常数。}$$

从而

$$v(r)=\begin{cases} C_1\ln r + C_2, & n=2, \\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}}+C_2, & n\geq 3. \end{cases}$$

其中 $r\neq 0,$

C_1 、C_2 为任意常数。

取

$$v(r)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln r, & n=2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n\geq 3. \end{cases}$$

其中 $\omega_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ 是 n 维单位球面的面积，如 $\omega_2=2\pi$，$\omega_3=4\pi$。

所以

$$u(x)=v(|x|)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n\geq 3. \end{cases}$$

除原点外满足Laplace方程 $\Delta u=0$。

对任意的 $\xi\in\mathbb{R}^n$，令

$$\Gamma(x,\xi)=u(x-\xi)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, & n=2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|x-\xi|^{n-2}}, & n\geq 3. \end{cases}$$

则 $\Gamma(x,\xi)$ 就是我们要找的基本解。 我们在后面要给出证明。

④，Green公式

定理1.1: 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 分片光滑的。

u、$v\in C^2(\overline{\Omega})$。则下述Green公式成立：

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)ds。$$

这里，$\mathbf{n}=(n_x,n_y)$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

证明： 由分部积分公式，

$$\iint_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dxdy + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}n_x ds,$$

$$\iint_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dxdy + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}n_y ds,$$

因此，$$\iint_{\Omega} u\Delta v dxdy = \iint_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dxdy + \iint_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dxdy$$

$$= -\iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v dxdy + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}ds,$$

同理

$$\iint_{\Omega} u\Delta v dxdy = -\iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v dxdy + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds,$$

两式相减，得：

$$\iint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds。$$

证毕。

⑤，$\Gamma(x,\xi)$ 的性质

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, & n=2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|x-\xi|^{n-2}}, & n\geq 3. \end{cases}$$

Ⅰ. $\Gamma(x,\xi)\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\backslash\{\xi\}\right)$, $\Gamma(x,\xi)\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$;

Ⅱ. $\Delta\Gamma(x,\xi)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^n\backslash\{\xi\}$, $\lim\limits_{x\to\xi}\Gamma(x,\xi)=+\infty$;

Ⅲ. $\Gamma(x,\xi)$ 是Laplace方程的基本解，即

$$-\Delta\Gamma(x,\xi)=\delta(x-\xi),\qquad x、\xi\in\mathbb{R}^n$$

Ⅰ和Ⅱ可以直接计算验证，下面我们来证明Ⅲ（即书上定理1.2）。

III的证明： 为简单起见，我们只证 $n=2$ 的情况，$n\geq 3$ 的证明是类似的。

要证 $$-\Delta\Gamma(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta),\quad (x,y)、(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$$

即 $$\left\langle-\Delta\Gamma(x,y;\xi,\eta),\varphi(x,y)\right\rangle=\left\langle\delta(x-\xi,y-\eta),\varphi(x,y)\right\rangle$$

$$=\varphi(\xi,\eta),\qquad \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$$

即 $$\left\langle\Gamma(x,y;\xi,\eta),-\Delta\varphi(x,y)\right\rangle=\varphi(\xi,\eta),\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$$

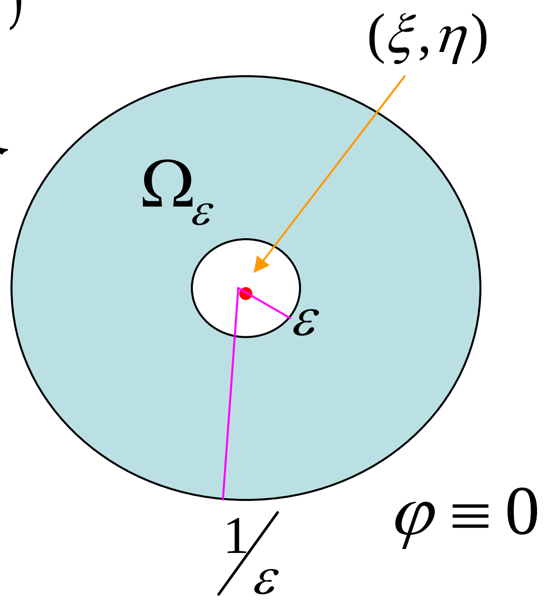
因为 $$\Gamma(x,y;\xi,\eta)\in L_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

等价于要证

$$(*)\qquad \begin{cases}-\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma(x,y;\xi,\eta)\Delta\varphi(x,y)dxdy=\varphi(\xi,\eta),\\ \qquad\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)\end{cases}$$

我们要设法利用定理1.1的Green公式。 对 $\forall\varepsilon>0$，令

$$\Omega_\varepsilon=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \varepsilon^2<(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<1/\varepsilon^2\right\}$$



则 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)\in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$，由 $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ 的定义

对 $\forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$，总可取 ε 足够小，使得

$$\varphi\equiv 0,\quad \text{当 } (x-\xi)^2+(y-\eta)^2\geq 1/\varepsilon^2\text{。}$$

在 Ω_ε 上对 Γ 和 φ 应用Green公式，得

$$\iint_{\Omega_\varepsilon}\left(\Gamma\Delta\varphi-\varphi\Delta\Gamma\right)dxdy=\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)ds\text{。}$$

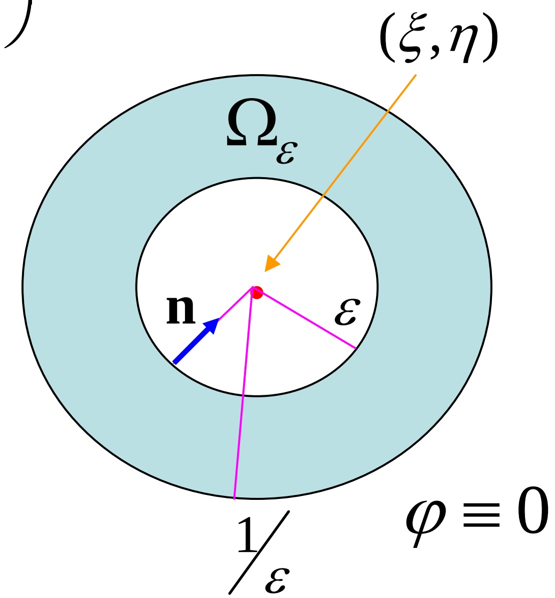
注意到：

$$\begin{cases}\Delta\Gamma=0,\quad (x,y)\in\Omega_\varepsilon,\\ \varphi=0,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=0,\quad \text{当 } (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=1/\varepsilon^2\text{。}\end{cases}$$

就有：
$$\iint_{\Omega_\varepsilon}\Gamma\Delta\varphi dxdy=\int_{\rho=\varepsilon}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)ds,$$

这里 $\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$。所以

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma\Delta\varphi dxdy=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\Omega_\varepsilon}\Gamma\Delta\varphi dxdy$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\rho=\varepsilon}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)ds,$$



注意到 $\mathbf{n}$ 是 Ω_ε 在 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上的单位外法向量，

故在圆 $\rho=\varepsilon$ 上，
$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}=-\frac{\partial}{\partial\rho}$$

而由 Γ 的表达式

$$\Gamma=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=-\frac{1}{2\pi}\ln\rho,\qquad n=2,$$

所以在 $\rho=\varepsilon$ 上，

$$\begin{cases} \Gamma = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\varepsilon, \\ \dfrac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\rho=\varepsilon} = -\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\varepsilon} = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\varepsilon} = -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}, \end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned} \left|\int_{\rho=\varepsilon}\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}ds\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\ln\varepsilon\right|\left|\int_{\rho=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}ds\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\left|\ln\varepsilon\right|\max_{\rho=\varepsilon}\left|\nabla\varphi\right|\left|\int_{\rho=\varepsilon}ds\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\ln\varepsilon\right|\max_{\rho=\varepsilon}\left|\nabla\varphi\right|\cdot 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

故，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho=\varepsilon}\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}ds = 0;$$

$$\int_{\rho=\varepsilon}\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}ds=-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\rho=\varepsilon}\varphi ds$$

由积分中值定理， 存在(x_1,y_1) 满足 $(x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2=\varepsilon^2$

使得

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\rho=\varepsilon}\varphi ds=-\frac{\varphi(x_1,y_1)}{2\pi\varepsilon}\int_{\rho=\varepsilon}ds=-\varphi(x_1,y_1)$$

所以，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\rho=\varepsilon}\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}ds=-\lim_{\varepsilon\to0}\varphi(x_1,y_1)=\varphi(\xi,\eta)。$$

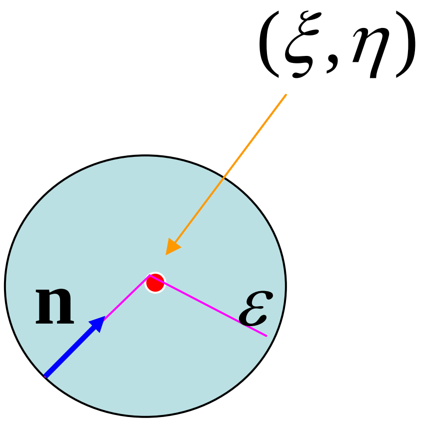
于是，

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma\Delta\varphi dxdy&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\rho=\varepsilon}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)ds,\\&=-\varphi(\xi,\eta)。\end{aligned}$$

证毕。

注： 在上面的证明中我们已证

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho=\varepsilon}\Gamma\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}ds=0; \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho=\varepsilon}\varphi\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}ds=\varphi(\xi,\eta)。\end{cases}$$



其中

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\ \Gamma=\Gamma(x,y;\xi,\eta)\ \text{是基本解}, \\ \varphi=\varphi(x,y)\ \text{在}\ (\xi,\eta)\ \text{的一个领域内有连续偏导数。} \\ \mathbf{n}\ \text{在为圆}\ \rho=\varepsilon\ \text{的单位内法向量。} \end{cases}$$

这两个结果我们后面还要用。

④，Green（第二）公式

定理1.3： 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 分片光滑的。

$u \in C^2(\overline{\Omega})$，$\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 是Laplace方程的基本解。

则对 $\forall(\xi,\eta)\in\Omega$ 成立：

$$u(\xi,\eta) = -\iint_\Omega \Gamma \Delta u dxdy + \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right)ds。$$

这里，$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

证明： 与前面的证明是类似的解。 对 $\forall \varepsilon > 0$, 令

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(x,y)\in\Omega \mid \varepsilon^2 < (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right\}$$

取 ε 足够小，使

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \rho \equiv \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = \varepsilon\right\} \subset \Omega$$

在 Ω_ε 上对 Γ 和 u 应用Green公式，得

$$\iint_{\Omega} \Gamma \Delta u dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Omega_\varepsilon} \Gamma \Delta u dxdy$$

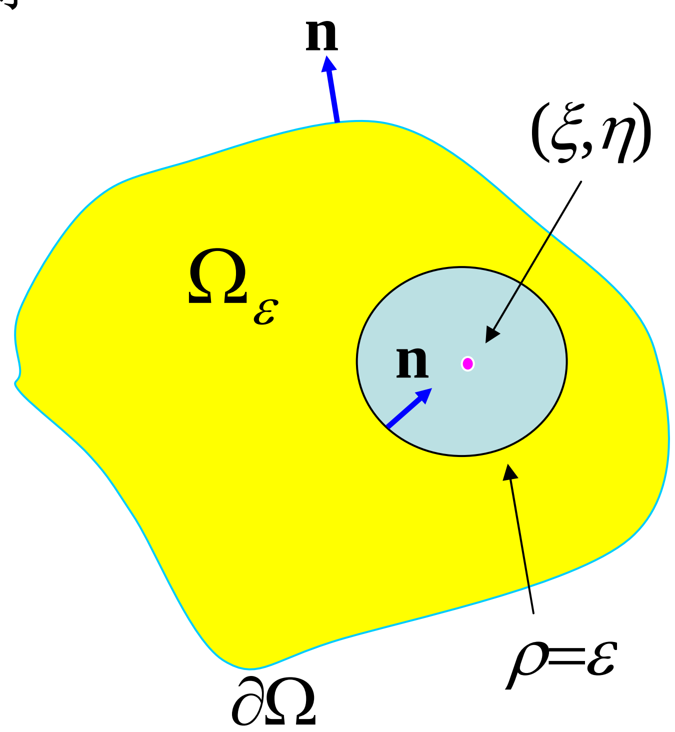
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Omega_\varepsilon} \left(\Gamma \Delta u - u\Delta\Gamma\right) dxdy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right) ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right) ds$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho=\varepsilon} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right) ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right) ds + 0 - u(\xi,\eta)。$$



证毕。

注1：　　定理1.3在空间维数大于2时也成立。

注2：　公式

$$u(\xi,\eta)=-\iint_{\Omega}\Gamma\Delta u dxdy+\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right)ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega,$$

说明了：u 在 Ω 中任一点的值可由其在 Ω 中的 Δu 以及在 $\partial\Omega$ 上的值 u 及 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 确定，这为我们求解位势方程的边值问题提供了重要的思路。

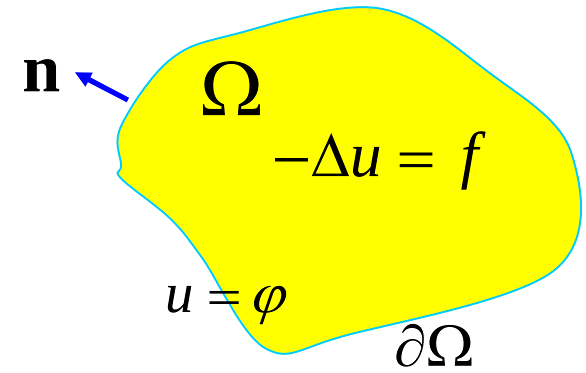
作　业

对n=3详细写出定理1.3的证明

§ 1.2　Green函数

现在我们来讨论位势方程第一边值问题（Dirichlet问题）的求解，我们仅以二维问题为例，三维以上问题的讨论是类似的。

设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 分片光滑的，$u \in C^2(\overline{\Omega})$，满足：



$$(1.16)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in\Omega, \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

设 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 是Laplace方程的基本解，$\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位的外法向量。 由Green第二公式：

$$u(\xi,\eta) = -\iint_\Omega \Gamma\Delta u\,dxdy + \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right)ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega,$$

因此，

$$u(\xi,\eta)=\iint_\Omega \Gamma f dxdy+\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}\right)ds,\ \forall(\xi,\eta)\in\Omega,$$

上式中 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是未知，需要设法消去。为此，我们求解下述问题：

$$(1.23)\qquad \begin{cases} -\Delta g=0, & (x,y)\in\Omega, \\ g=-\Gamma, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

先假设上述问题有解 $g\in C^2(\overline{\Omega})$，则由Green公式，我们有：

$$\iint_\Omega (u\Delta g-g\Delta u)\,dxdy=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}-g\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)ds。$$

即

$$0=\iint_\Omega gf dxdy+\int_{\partial\Omega}\left(g\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right)ds。$$

记 $G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma+g$，将上式与顶上式子相加，得

$$u(\xi,\eta)=\iint_{\Omega}(\Gamma+g)\,fdxdy+\int_{\partial\Omega}\left((\Gamma+g)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-\varphi\frac{\partial(\Gamma+g)}{\partial\mathbf{n}}\right)ds$$

即

$$u(\xi,\eta)=\iint_{\Omega}Gfdxdy-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega, \tag{1.20}$$

因此，只要求出了G（等价于求出了g），u 就出上式给出。

总结： 为求解问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega,\\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.16}$$

只要求出 $G=\Gamma+g$，u 由（1.20）给出。 而求 G 等价于求出 g，即求解问题

$$\begin{cases}-\Delta g=0, & (x,y)\in\Omega,\\ g(x,y)=-\Gamma(x,y;\xi,\eta), & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.23}$$

（1.23）是一个特定的边界问题，而（1.16）与 f 和 φ 有关，这样我们就将求解所有（1.16）的问题，转化为求解一特定的边值问题（1.23）。

因为 $G=\Gamma+g$， 而 $-\Delta\Gamma(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta)$，所以对任意的 $(\xi,\eta)\in\Omega$， 有

$$(1.22)\qquad \begin{cases} -\Delta G(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta),\ (x,y)\in\Omega; \\ G(x,y;\xi,\eta)=0,\ (x,y)\in\partial\Omega。\end{cases}$$

求解（1.23），等价于求解（1.22）。

一般来说，我们不能求出 G 的显式表达式，而只能证明 G 的存在性， 但当 Ω 的形状比较特殊时，如半平面、圆等，我们容易求出它的显示表达式。

①，Green函数的定义

定义1.3：设函数 $g=g(x,y;\xi,\eta)$ 对任意的 $(\xi,\eta)\in\Omega$ 关于 (x,y) 在 $\overline{\Omega}$ 上有任意的二阶连续偏导数且满足

$$(1.23)\qquad \begin{cases} -\Delta g=0, & (x,y)\in\Omega, \\ g(x,y)=-\Gamma(x,y;\xi,\eta), & (x,y)\in\partial\Omega。\end{cases}$$

则称函数 $G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)+g(x,y;\xi,\eta)$ 为边值问题

$$(1.16)\qquad \begin{cases} -\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega, \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

的Green函数。由前面的讨论，若 $G(x,y;\xi,\eta)$ 已经找到，则

定理1.5：设 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 是（1.16）的解，则有

$$(1.20)\qquad u(\xi,\eta)=-\iint_{\Omega}Gf\,dxdy-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega。$$

注1： 也可以用

$$(1.22)\qquad \begin{cases} -\Delta G(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta), & (x,y)\in\Omega; \\ G(x,y;\xi,\eta)=0, & (x,y)\in\partial\Omega。\end{cases}$$

在 $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}-\{(x,y)=(\xi,\eta)\}$ 中的连续解，作为Green函数的定义，与前面的定义是等价的。

注2：Green 函数的物理意义：

①，在物体内部 (ξ,η) 处放置单位点热源，并保持物体表面温度恒为0，则物体的温度分布就是Green函数；

②，某空心导体的表面接地（电位势保持为0），在其内部某点 (ξ,η) 处放置一单位正电荷，则该导体内部产生的电位势分布就是Green函数。

注3： 引入Green函数的重要意义在于把具有任意非齐次项 f 和任意边值 φ 的定解问题归结为求解一个特定的边值问题。

注4： 对其它边值问题，以及高维问题，也可用与前面类似的方法定义函数 g，并由此得出该边值问题解的表达式以及相应的Green 。

注5： 由于 $g \in C^2(\overline{\Omega})$，$\Gamma$ 在 $(x,y)=(\xi,\eta)$ 有奇性。而 $G=\Gamma+g$，所以 Γ 为 G 的奇性部份，g 为 G 的光滑部份。

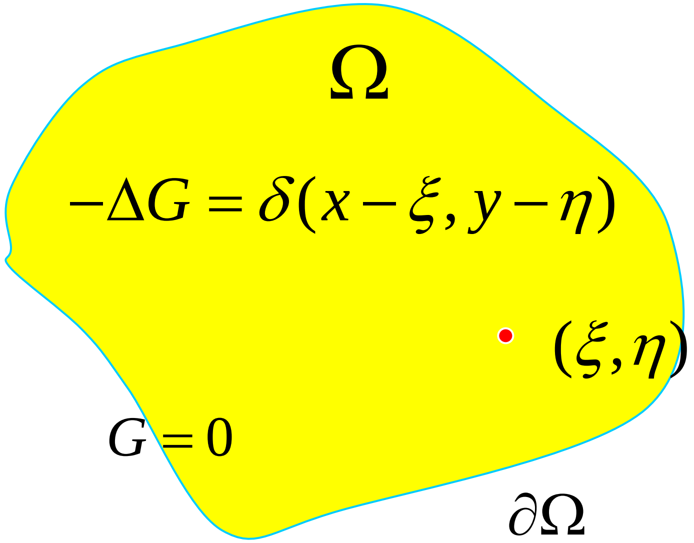
②，Green函数的性质

Ⅰ.
$$\begin{cases} -\Delta G(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta),\ \ (x,y)\in\Omega; \\ G(x,y;\xi,\eta)=0,\ \ (x,y)\in\partial\Omega。\end{cases}$$

Ⅱ. 对任意的$(\xi,\eta)\in\Omega$， 在通常意义下，

$$-\Delta G(x,y;\xi,\eta)=0,\ \ (x,y)\in\Omega-\{(\xi,\eta)\}。$$

证明：由 Γ 和 g 和性质即得。



III.

$$\begin{cases} G(x,y;\xi,\eta)>0, \quad (x,y)\in\Omega-\{(\xi,\eta)\}, \\ \lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} G(x,y;\xi,\eta)=+\infty。\end{cases}$$

证明：　由于 $g\in C^2(\overline{\Omega})$、$\lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)}\Gamma(x,y;\xi,\eta)=+\infty$、

及 $G=\Gamma+g$，　我们得出上面的第二式。

第一式的证明需要用到Laplace方程的极值原理。（见下节）

Ⅳ.

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial\mathbf{n}}ds=-1,\qquad \forall(\xi,\eta)\in\Omega。$$

证明：由

$$(1.20)\qquad u(\xi,\eta)=-\iint_{\Omega}Gfdxdy-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}ds,\ \forall(\xi,\eta)\in\Omega,$$

其中，$u\in C^2(\overline{\Omega})$ 且满足

$$(1.16)\qquad \begin{cases}-\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega,\\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases}$$

取 $f\equiv 0$、$\varphi\equiv 1$, 则 $u\equiv 1$ 满足（1.16）。代入（1.20）得：

$$1=0-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}ds,\ \forall(\xi,\eta)\in\Omega,$$

这就是要证的等式。

Ⅴ. Green函数的对称性

$$G(x,y;\xi,\eta)=G(\xi,\eta;x,y),\quad 于\ \Omega\times\Omega-\{(x,y)=(\xi,\eta)\}$$

证明：要证对 $\forall P(\xi,\eta)$、$P'(\xi,\eta)\in\Omega$，有

$$G(x,y;\xi,\eta)\Big|_{(x,y)=(\xi',\eta')}=G(x,y;\xi',\eta')\Big|_{(x,y)=(\xi,\eta)},$$

记 $B_\varepsilon(P)$、$B_\varepsilon(P')$ 分别为以 P、P' 为心以 ε 为半径的圆，

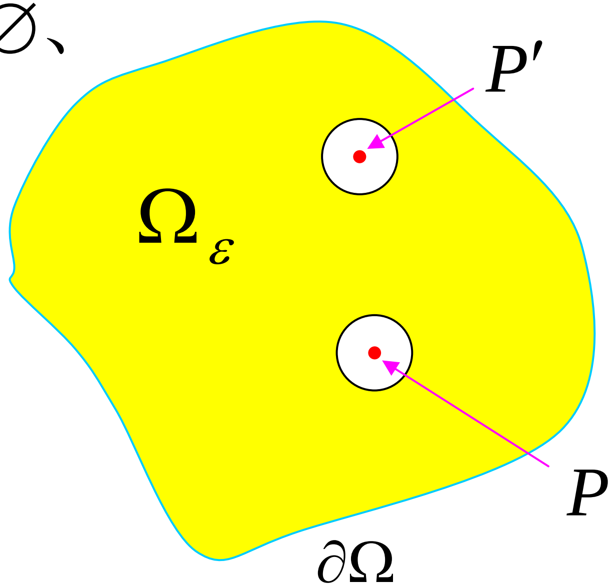
取 ε 足够小，使得 $B_\varepsilon(P')\cap B_\varepsilon(P)=\varnothing$、

$B_\varepsilon(P)\subset\Omega$、 $B_\varepsilon(P')\subset\Omega$，

记 $\Omega_\varepsilon=\Omega-\{B_\varepsilon(P)\cup B_\varepsilon(P')\}$，则

$$G(x,y;\xi,\eta)\in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon\cup B_\varepsilon(P')}),$$

$$G(x,y;\xi',\eta')\in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon\cup B_\varepsilon(P)}),$$



且 $$\Delta G(x,y;\xi,\eta)=0,\qquad (x,y)\in\Omega_\varepsilon,$$
$$\Delta G(x,y;\xi',\eta')=0,\qquad (x,y)\in\Omega_\varepsilon,$$

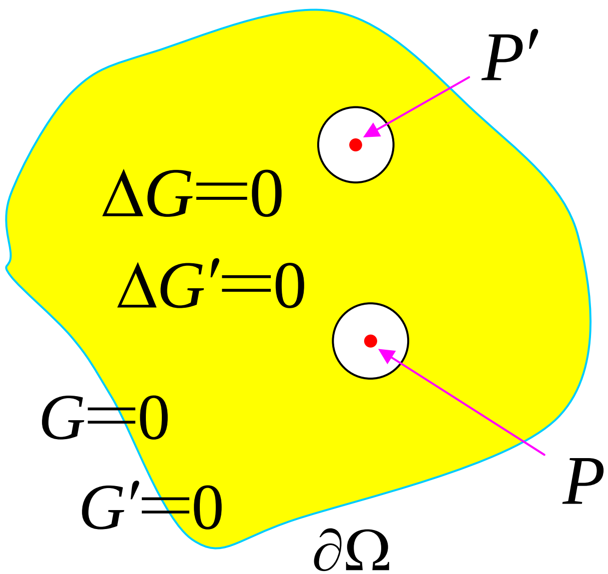
对这两个函数在Ω_ε 上应用Green公式，有

$$\iint_{\Omega_\varepsilon}[G\Delta G'-G'\Delta G]\,dxdy=\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(G\frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}}-G'\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right)ds。$$

这里 $G\equiv G(x,y;\xi,\eta)$、$G'\equiv G(x,y;\xi',\eta')$,

所以

$$\begin{aligned}0=&\int_{\partial\Omega}\left(G\frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}}-G'\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right)ds。\\&+\int_{\partial B_\varepsilon(P)}\left(G\frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}}-G'\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right)ds\\&+\int_{\partial B_\varepsilon(P')}\left(G\frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}}-G'\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\right)ds\end{aligned}$$



由于 $G(x,y;\xi,\eta)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega,$

$$G(x,y;\xi',\eta')=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega,$$

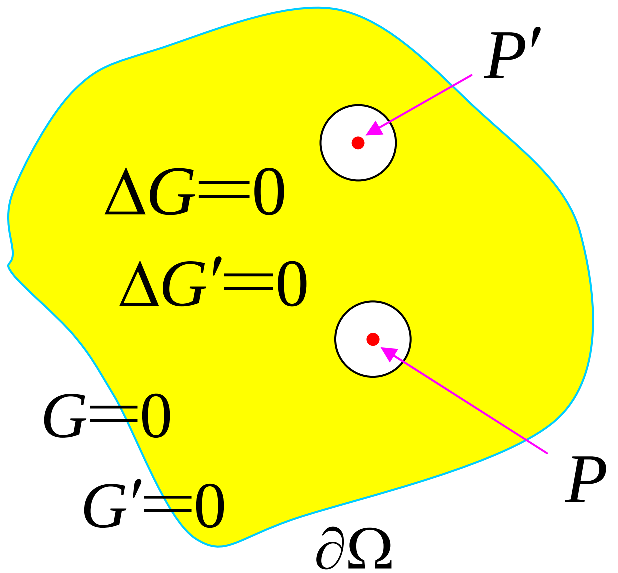
所以，

$$0=\int_{\partial B_\varepsilon(P)}\left(G\frac{\partial G'}{\partial\mathbf{n}}-G'\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}\right)ds+\int_{\partial B_\varepsilon(P')}\left(G\frac{\partial G'}{\partial\mathbf{n}}-G'\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}}\right)ds$$

下面我们来计算积这4个积分。

在基本解的证明中我们已经得出：

$$\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(P)}\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}ds=0;\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(P)}\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}ds=\varphi(\xi,\eta)。\end{cases}$$



其中， $\Gamma=\Gamma(x,y;\xi,\eta),$

$\varphi=\varphi(x,y)$ 在 (ξ,η) 的一个领域内有连续偏导数。

因为，$G' = G(x, y; \xi', \eta')$ 在 (ξ, η) 的一个领域内有连续偏导数，所以，

$$\int_{\partial B_\varepsilon(P)} G \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} ds$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(P)} \left[\Gamma(x, y; \xi, \eta) + g(x, y; \xi, \eta)\right] \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} ds$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(P)} \Gamma(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} ds + \int_{\partial B_\varepsilon(P)} g(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} ds$$

$$\to 0 + 0 = 0, \quad \varepsilon \to 0。$$

这里我们利用了 $g(x, y; \xi, \eta) \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$。

$$\int_{\partial B_\varepsilon(P)} G' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} ds$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(P)} G' \frac{\partial \Gamma(x, y; \xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} ds + \int_{\partial B_\varepsilon(P)} G' \frac{\partial g(x, y; \xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} ds$$

$$\to G(\xi, \eta; \xi', \eta') + 0, \quad \varepsilon \to 0。$$

所以，$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(P)} \left(G \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} - G' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = -G(\xi, \eta; \xi', \eta')。$$

同理，$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(P')} \left(G' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = -G(\xi', \eta'; \xi, \eta)。$$

而，

$$0 = \int_{\partial B_\varepsilon(P)} \left(G \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} - G' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \int_{\partial B_\varepsilon(P')} \left(G \frac{\partial G'}{\partial \mathbf{n}} - G' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

于是，

$$0 = -G(\xi,\eta;\xi',\eta') + -\left[-G(\xi',\eta';\xi,\eta)\right],$$

即，

$$G(\xi,\eta;\xi',\eta') = G(\xi',\eta';\xi,\eta)。$$

证毕。

作　业

试对下述边值问题，给出Green函数的定义：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in\Omega, \\ u=\varphi, & (x,y)\in\gamma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = p, & (x,y)\in\Gamma. \end{cases}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向, $\partial\Omega=\Gamma\bigcup\gamma$。

特殊区域上Green函数的导出

我们现在来求一些特殊区域上的Green函数。

复习：Green函数及基本解的定义及性质

定义1.3：设函数 $g=g(x,y;\xi,\eta)$ 对任意的 $(\xi,\eta)\in\Omega$ 关于 (x,y) 在 $\overline{\Omega}$ 上有任意的二阶连续偏导数且满足

$$
(1.23)\qquad \begin{cases} -\Delta g=0, & (x,y)\in\Omega, \\ g(x,y)=-\Gamma(x,y;\xi,\eta), & (x,y)\in\partial\Omega。\end{cases}
$$

则称函数 $G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)+g(x,y;\xi,\eta)$ 为边值问题

$$
(1.16)\qquad \begin{cases} -\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega, \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}
$$

的Green函数。

由（**1.16**）的**Green**函数求解问题（**1.16**）**：**　（形式解）

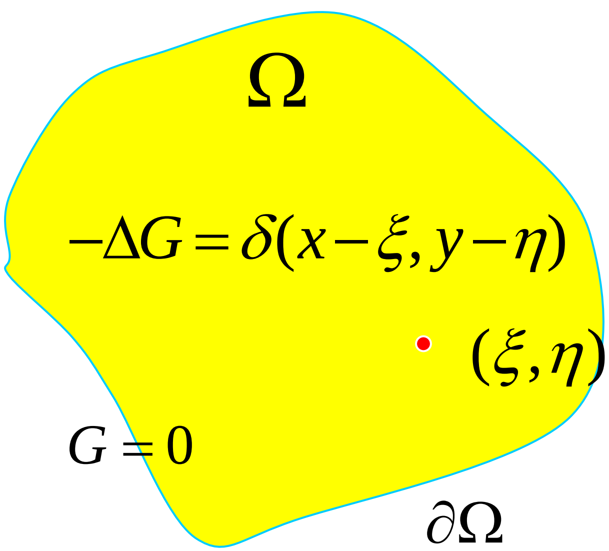
$$(1.20)\qquad u(\xi,\eta)=\iint_{\Omega}Gf\,dxdy\ -\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega。$$

Green函数性质：

Ⅰ.
$$\begin{cases} -\Delta G(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta),\ \ (x,y)\in\Omega; \\ G(x,y;\xi,\eta)=0,\ \ (x,y)\in\partial\Omega。\end{cases}$$

Ⅱ.　对任意的 $(\xi,\eta)\in\Omega$，在通常意义下，

$$-\Delta G(x,y;\xi,\eta)=0,\ \ (x,y)\in\Omega-\{(\xi,\eta)\}。$$



Ⅲ.

$$\begin{cases} G(x,y;\xi,\eta)>0, \quad (x,y)\in\Omega-\{(\xi,\eta)\}, \\ \lim\limits_{(x,y)\to(\xi,\eta)} G(x,y;\xi,\eta)=+\infty。\end{cases}$$

Ⅳ.

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial\mathbf{n}}ds=-1, \qquad \forall(\xi,\eta)\in\Omega。$$

Ⅴ. Green函数的对称性

$$G(x,y;\xi,\eta)=G(\xi,\eta;x,y), \quad 于\ \Omega\times\Omega-\{(x,y)=(\xi,\eta)\}$$

注2：Green 函数的物理意义：

①，在物体内部(ξ,η)处放置单位点热源，并保持物体表面温度恒为0，则物体的温度分布就是Green函数；

②，某空心导体的表面接地（电位势保持为0），在其内部某点(ξ,η)处放置一单位正电荷，则该导体内部产生的电位势分布就是Green函数。

注5： 由于$g\in C^2(\overline{\Omega})$，$\Gamma$在$(x,y)=(\xi,\eta)$有奇性。而$G=\Gamma+g$，所以$\Gamma$为$G$的奇性部份，$g$为$G$的光滑部份。

基本解的定义及性质：

①，

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, & n=2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|x-\xi|^{n-2}}, & n\geq 3. \end{cases}$$

其中 $\omega_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ 是 n 维单位球面的面积。

②，

$$-\Delta\Gamma(x,\xi)=\delta(x-\xi), \qquad x、\xi\in\mathbb{R}^n.$$

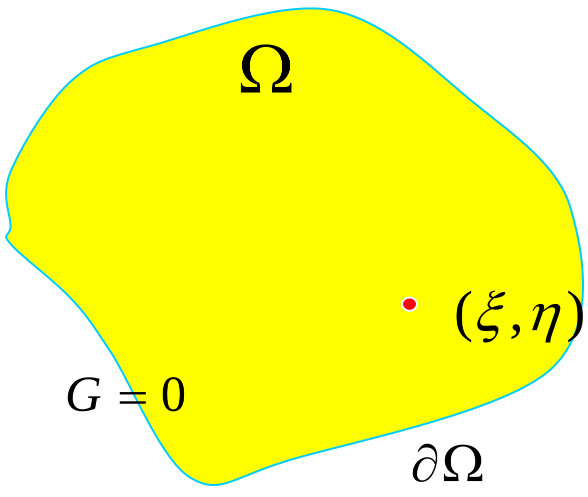
③，位于 ξ 的正单位点电荷在空间产生的电位势分布。

$n=2$ 时写成：

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}。$$

镜像法求特殊区域上的Green函数

求解思路：



由基本解的物理意义，$\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 可看着是位于 $(\xi,\eta)\in\Omega$ 的正单位点电荷在点 (x,y) 产生的电位势。而

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)+g(x,y;\xi,\eta)$$

中的 $g(x,y;\xi,\eta)$ 可看着是某些位于 Ω 外部的电荷在点 (x,y) 产生的电位势，它在 $\partial\Omega$ 上与 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 抵消而使得

$$G(x,y;\xi,\eta)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega。$$

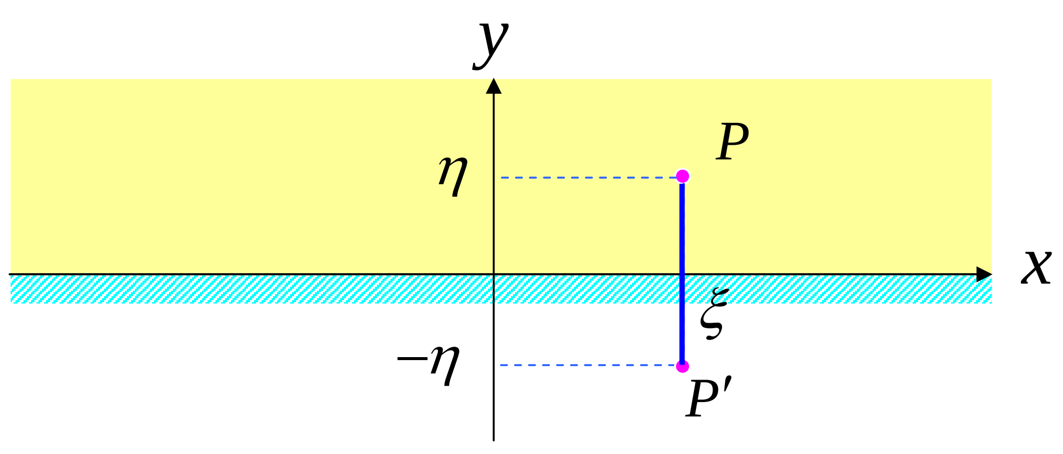
所以，只要找到了适当的位置，并在其上放置适当的电荷使得由这些电荷产生的电位势在 $\partial\Omega$ 上与 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 抵消，

则这些电荷产生的电位势就是 g，并由此得出 G。

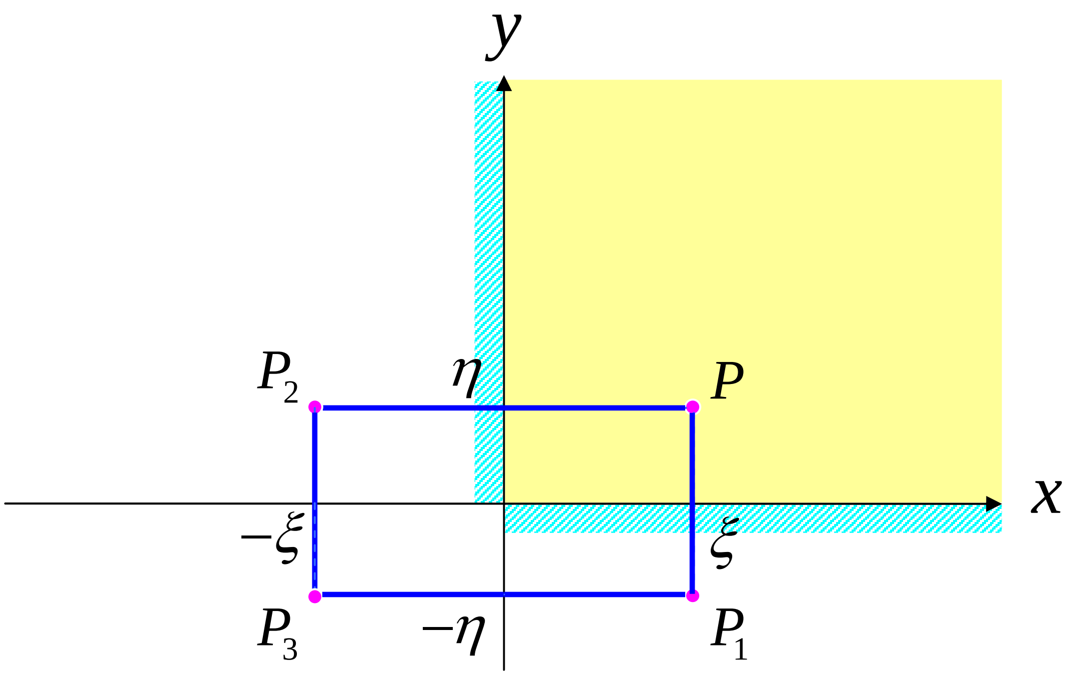
如果将 $\partial\Omega$ 设想为一镜面，则点 $(\xi,\eta)\in\Omega$ 在该镜面中的像所在的位置可能就是我们要找的放置适当电荷的位置。因此，这种求Green函数的方法就称为镜像法。

当镜面 $\partial\Omega$ 有一定的对称性时，容易确定(ξ,η)在该镜面中像的位置。

例1：上半平面 $\Omega=\{(x,y)\,|\,-\infty<x<+\infty,\ y>0\}$

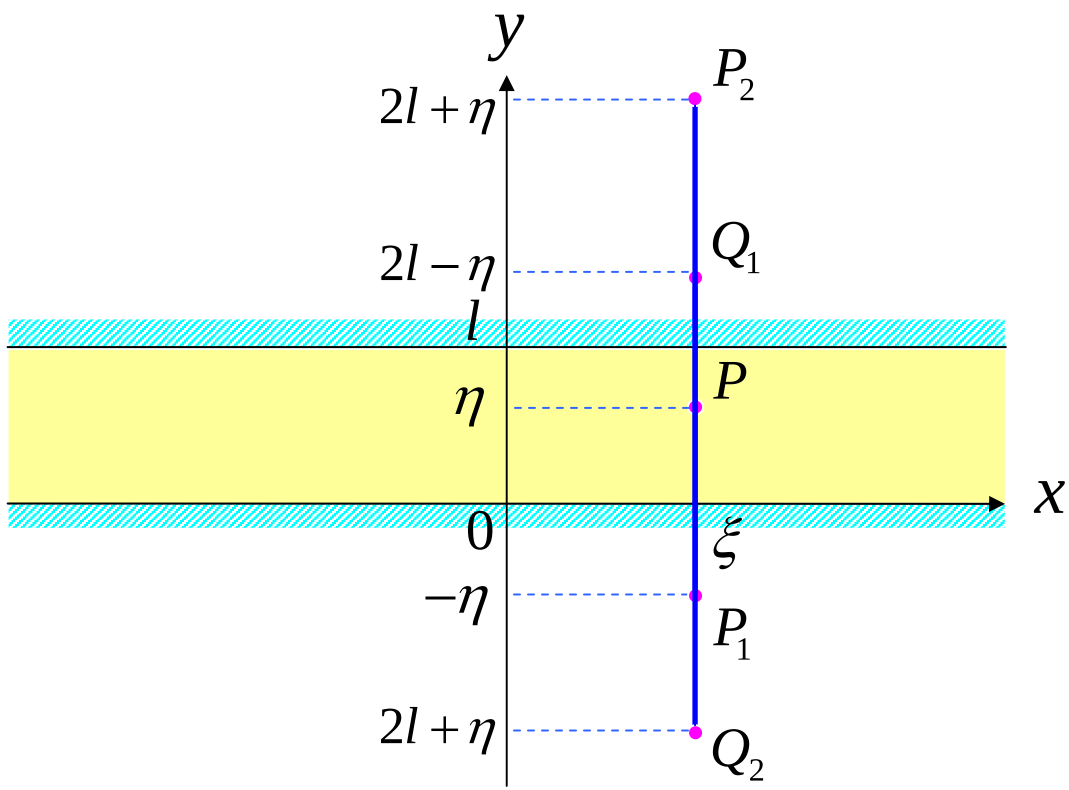


例2：第一象限 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x>0,\ y>0\}$



P 共有3个镜像 P_1、P_2 和 P_3 。

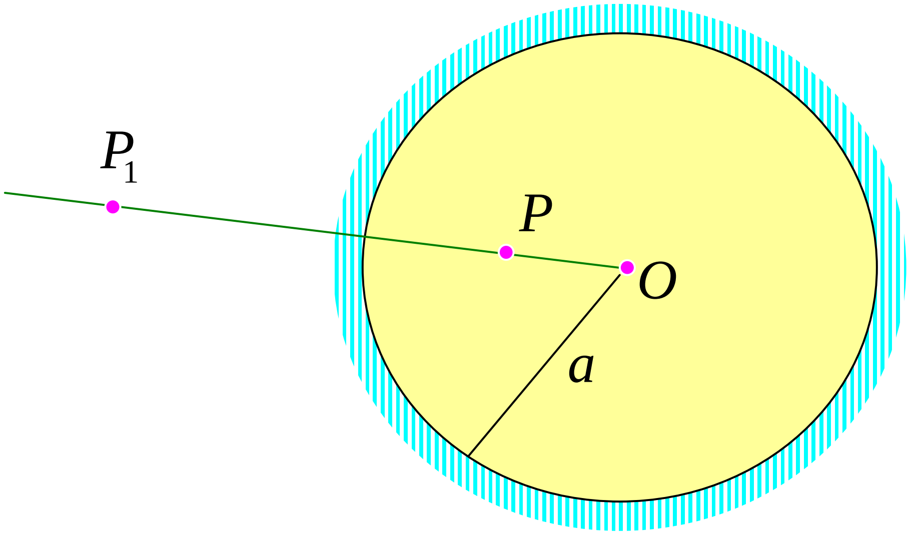
例3：无限带形　$\Omega = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty,\quad 0 < y < l\ \}$



P 有无穷多个镜像：P_1 、P_2 、$P_3 \cdots$，和 Q_1 、Q_2 、$Q_3 \cdots$ 。

例4：圆

如图：



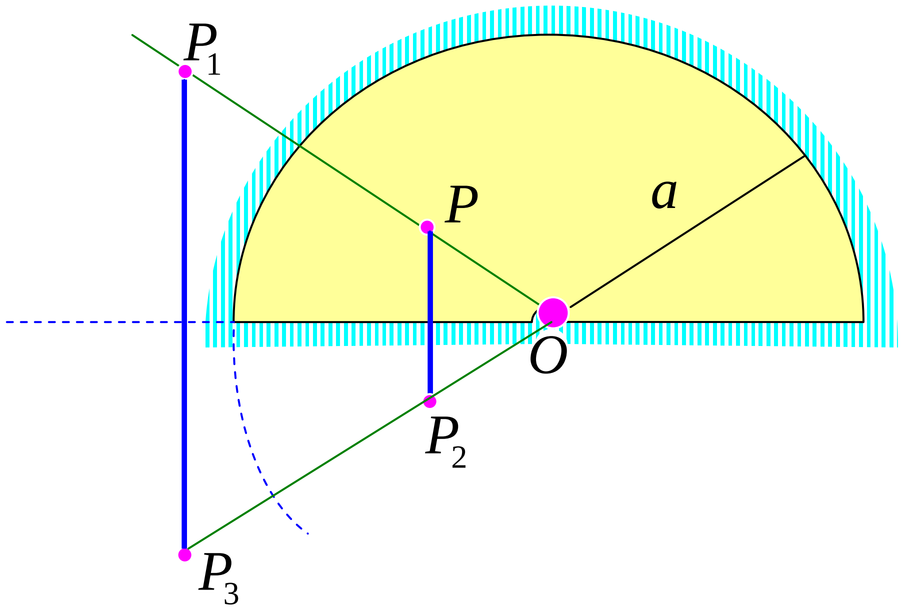
圆O的半径为a，点P关于其圆周的对称点为（反演点）P_1

位于：①，射线OP上；

②，$\overline{OP}\cdot\overline{OP_1}=a^2$。

例5：半圆

如图：

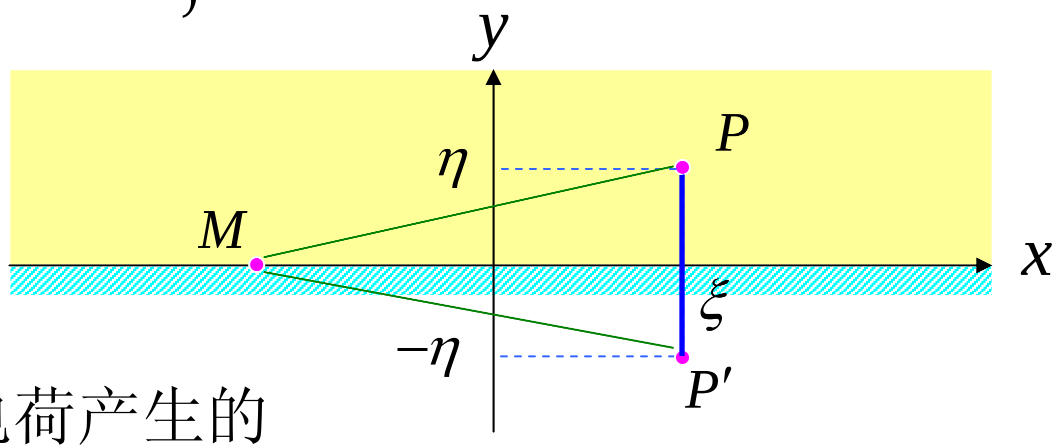


P 共有3个镜像 P_1、P_2 和 P_3 。

例6：求解上半平面位势方程的第一边值问题。

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})=f, \quad (x,y)\in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty; \end{cases}$$

其中 $\mathbf{R}_+^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y>0\}$。



解：

第一步，求Green函数。

对任意的 $P(\xi,\eta)\in\mathbf{R}_+^2$，

在 P 放置一个单位的正电荷产生的

电位势分布为$\Gamma(x,y;\xi,\eta)$。在其关于x轴的对称点 $P'(\xi,-\eta)$

放置一个单位的负电荷产生的电位势为 $-\Gamma(x,y;\xi,-\eta)$。

因为 x 轴上任一点 $M(x,0)$ 到 P 与 P' 的距离是相等的，

这两个电位势在 M 大小相等、方向相反，因而相互抵消。即

$$\left[\Gamma(x,y;\xi,\eta)-\Gamma(x,y;\xi,-\eta)\right]\Big|_{y=0}=0,$$

所以，

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)-\Gamma(x,y;\xi,-\eta)$$

即，

$$\begin{aligned}G(x,y;\xi,\eta)&=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\\&=-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}。\end{aligned}$$

第二步，利用求解公式（1.20）求解。

$$(1.20) \qquad u(\xi,\eta)=\iint_{\Omega} Gfdxdy-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega,$$

因此，对 $\forall(\xi,\eta)\in\mathbf{R}_+^2$,

$$u(\xi,\eta)=\iint_{\mathbf{R}_+^2} Gfdxdy-\int_{\partial\mathbf{R}_+^2}\varphi\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}ds$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left.\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{y=0}dx$$

因为 $\mathbf{n}$是 $\mathbf{R}_+^2$在 $\partial\mathbf{R}_+^2$ 上的单位外法向量，所以

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}=-\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\left.\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$=-\left.\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{y+\eta}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right]\right|_{y=0}$$

所以，

$$\left.\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{y=0}=-\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2},$$

于是，

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\,f(x,y)dxdy$$

$$+\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{(x-\xi)^2+\eta^2}dx,\qquad \forall(\xi,\eta)\in\mathbf{R}_+^2。$$

改写为：

$$u(x,y)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi,\qquad \forall(x,y)\in\mathbf{R}_+^2。$$

第三步，有由上式给出的函数确为所求的解。 为此，要证：

①， $u(x,y)\in C^2(\mathbf{R}_+^2)$;

②， $-\Delta u = f,\quad (x,y)\in\mathbf{R}_+^2$;

③， $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,\,0+)}u(x,y)=\varphi(x_0),\qquad \forall x_0\in(-\infty,+\infty)$。

其中，①+③得出 $u\in C(\overline{\mathbf{R}_+^2})\cap C^2(\mathbf{R}_+^2)$， 且满足边界条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad x\in(-\infty,+\infty)。$$

当 f 和 φ 满足适当的条件时，我们可以证明①、②和③。

解毕。

注1： 当 $f\equiv 0$ 时，我们得到Poisson公式：

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi,\qquad \forall(x,y)\in\mathbf{R}_+^2。$$

在 $\varphi\in C(-\infty,+\infty)$ 且 φ 有界的条件下，可以证明，上面给出的函数 $u(x,y)$ 满足 $u\in C(\overline{\mathbf{R}_+^2})\cap C^2(\mathbf{R}_+^2)$，且

$$\begin{cases}-(u_{xx}+u_{yy})=f, & (x,y)\in\mathbf{R}_+^2,\\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty;\end{cases}\qquad(*)$$

这一问题我们曾Fourier变换法求解过，（Page 176, 4 (2) ）得出的解与我们这里用Green函数法得出的解是相同的。

注2： 问题 $(*)$ 的解不是唯一的，事实上它的任一解加上 y 仍是它的解。但可以证明，它的有界解是唯一的。

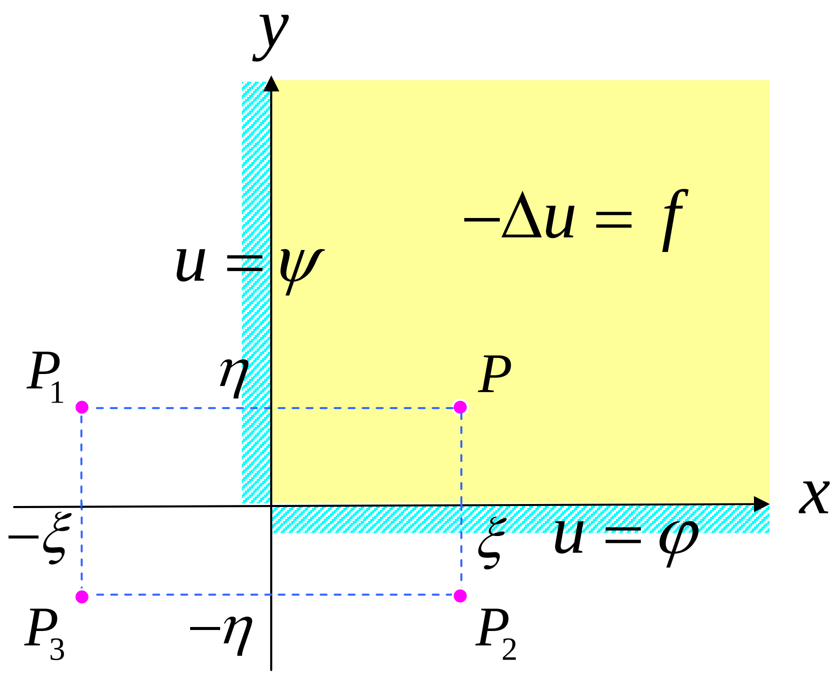
例7：求解第一象限位势方程的第一边值问题。

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})=f, & x>0, y>0; \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x<+\infty; \\ u(0,y)=\psi(y), & 0\le y<+\infty. \end{cases}$$

解： 可以用两种方法来求解：

方法1： 用Green函数法求解。

如图所示，在点 $P(\xi,\eta)$ 的三个镜像点 P_1 、P_2 和 P_3 ，分别放置适当的电荷，使其产生的电位势与 P 点处的单位正电荷产生的电位势在边界上相互抵消。

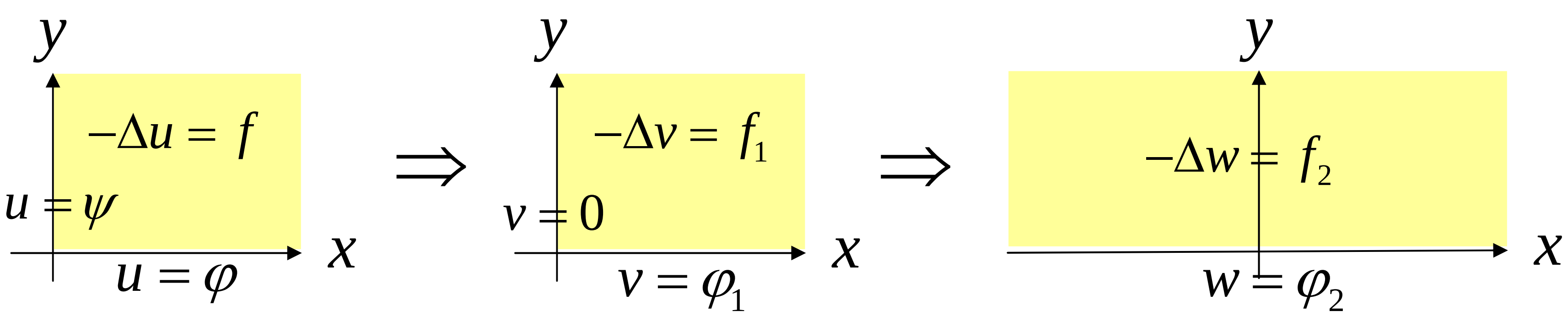


这样，就可以求出本边值问题的Green函数。再由公式（1.20）就求出了形式解的表达式。

方法2： 用对称延拓法求解。

先作变换将边界条件 $u(0,y)=\psi(y)(0\le y<+\infty)$ 齐次化，

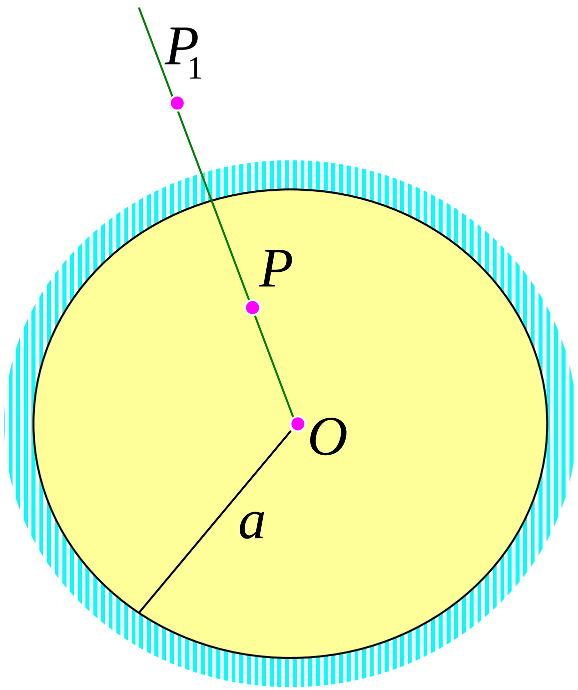
再关于变量 x 作奇延拓，将问题化为上半平面的第一边值问题。然后利用前面例6的结果，得出解的表达式，最后再代回到原问题，得出解的形式表达式。



§1.3　圆上的Poisson公式

本节，我们用Green函数法来求解圆上位势方程的第一边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in B_a; \\ u=\varphi, & (x,y)\in \partial B_a, \end{cases}$$



其中，B_a 为以原点为心以 a 为半径的开圆。

解：**第一步，求Green函数。**

对任意的 $P(\xi,\eta)\in B_a$，记 $P_1(\xi_1,\eta_1)$ 是其关于圆周 ∂B_a 的对称点，则 P_1 满足

①，位于射线 OP 上；②，$\overline{OP}\cdot\overline{OP_1}=a^2$。

若 P 正好是原点，则它的对称点为无穷远点。

下面我们用镜像法来求**Green**函数。

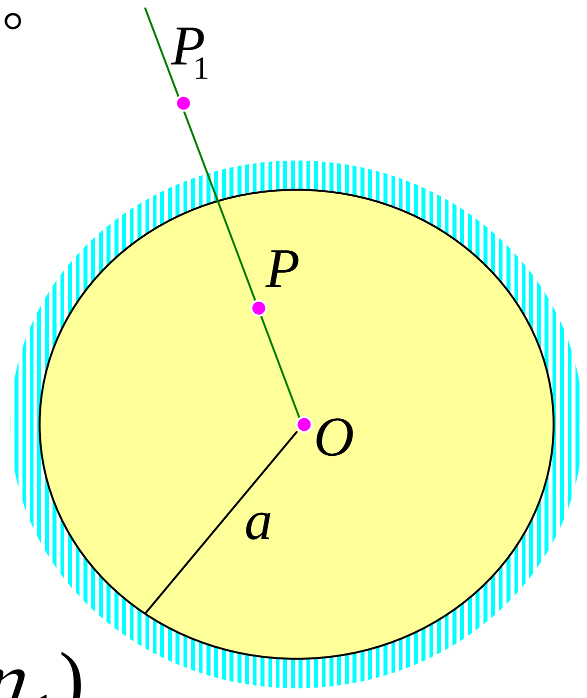
如果 $P(\xi,\eta)$ 正好是坐标原点， 则当 $(x,y)\in B_a$ 时，

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=-\frac{1}{2\pi}\ln a,$$

从而 $G(x,y;0,0)=\Gamma(x,y;0,0)+\dfrac{1}{2\pi}\ln a$。

即，

$$G(x,y;0,0)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{a^2}{x^2+y^2}。$$



如果 $P(\xi,\eta)\in B_a-\{(0,0)\}$，

在 P 放置一个单位的正电荷产生的电位势分布为 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$。现要在 $P_1(\xi_1,\eta_1)$ 放置一个负电荷，使其产生的电位势在 ∂B_a 与 $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ 抵消。

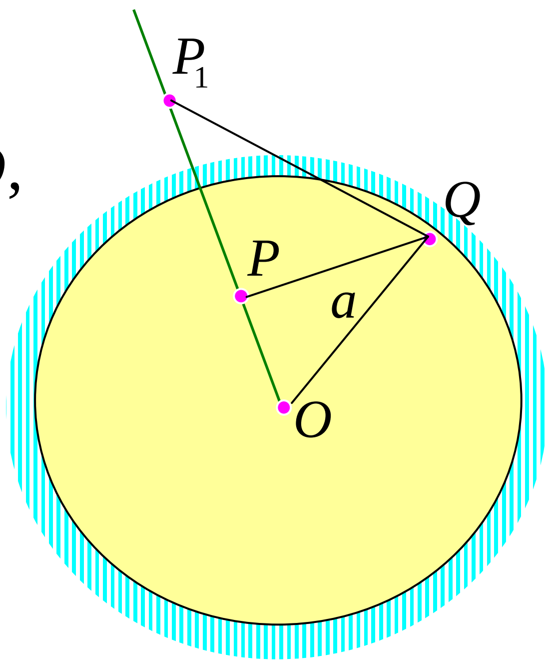
设 $Q(x,y)$ 为 ∂B_a 任意一点（如图），则

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = -\frac{1}{2\pi}\ln\overline{QP},$$

$$-\Gamma(x,y;\xi_1,\eta_1) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2} = -\frac{1}{2\pi}\ln\overline{QP_1},$$

因为 $\overline{QP} \neq \overline{QP_1}$， 所以，$\Gamma(x,y;\xi,\eta)-\Gamma(x,y;\xi_1,\eta_1)\neq 0$。

因此我们要对$\Gamma(x,y;\xi_1,\eta_1)$作适当的调节。



由于 $\overline{OP}\cdot\overline{OP_1} = a^2$，所以 $\Delta OQP \sim \Delta OP_1Q$,

从而
$$\frac{\overline{QP}}{\overline{QP_1}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP}}{a}$$

即
$$\overline{QP} = \frac{\overline{OP}}{a}\overline{QP_1}$$

所以， 当 $Q(x,y)\in\partial B_a$ 时

$$0=\left[-\frac{1}{2\pi}\ln\overline{QP}\right]-\left[-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\overline{OP}}{a}\overline{QP_1}\right)\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{2\pi}\ln\overline{QP}\right]-\left[-\frac{1}{2\pi}\ln\overline{QP_1}\right]+\left[\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\overline{OP}}{a}\right]$$

$$=\Gamma(x,y;\xi,\eta)-\Gamma(x,y;\xi_1,\eta_1)+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{a}。$$

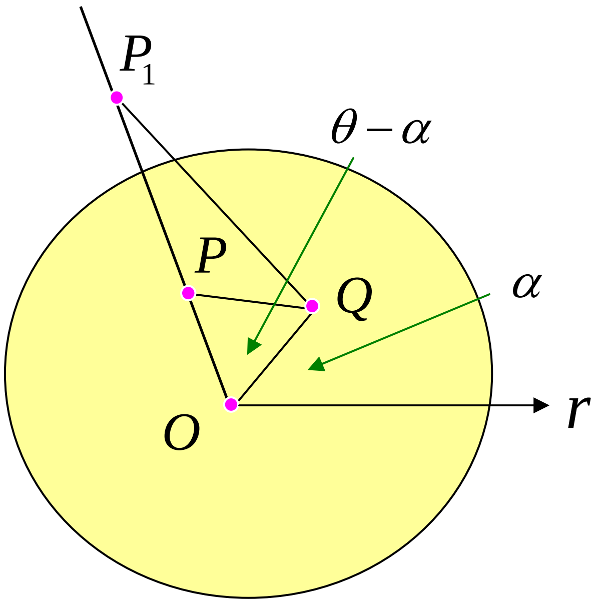
于是，

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)-\Gamma(x,y;\xi_1,\eta_1)+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{a},$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{a}。$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}。$$

设在极坐标下，



$$Q(x,y)=(r,\alpha),\quad P(\xi,\eta)=(\rho,\theta),$$

$$P_1(\xi_1,\eta_1)=(\rho_1,\theta),\qquad \rho\rho_1=a^2.$$

由余弦定理，

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\overline{QP}$$

$$=r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha),$$

$$(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2=\overline{QP_1}=r^2+\rho_1^2-2r\rho_1\cos(\theta-\alpha),$$

$$=r^2+\frac{a^4}{\rho^2}-2r\frac{a^2}{\rho}\cos(\theta-\alpha),$$

$$G(r,\alpha;\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{r^2+\dfrac{a^4}{\rho^2}-2r\dfrac{a^2}{\rho}\cos(\theta-\alpha)}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}+\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho^2}{a^2}。$$

即 $$G(r,\alpha;\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}。\qquad (*)$$

注意到：上式当 $\rho=0$，也即 $P(\xi,\eta)$ 正好是坐标原点时，

$$G(r,\alpha;0,\theta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{a^2}{r^2}=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{a^2}{x^2+y^2},$$

与前面得到的结果一致。因此，(*) 式包含了 $P(\xi,\eta)$ 为坐标原点时的情形。

第二步，利用求解公式（**1.20**）求解。

$$u(\xi,\eta)=\iint_\Omega Gf dxdy-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}ds,\ \ \forall(\xi,\eta)\in\Omega, \tag{1.20}$$

所以，

$$u(\rho,\theta)=\iint_{B_a}G(r,\alpha;\rho,\theta)f(r,\alpha)rdrd\alpha$$

$$-\int_{\partial B_a}\varphi(r,\alpha)\frac{\partial G(r,\alpha;\rho,\theta)}{\partial \mathbf{n}}ds,\ \ \forall(\rho,\theta)\in B_a,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 ∂B_a 上圆 B_a 的单位外法向量。

在 ∂B_a 上，

$$\begin{cases} ds=ad\alpha, \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}=\dfrac{\partial}{\partial r}, \end{cases}$$

所以，

$$u(\rho,\theta)=\iint_{B_a} G(r,\alpha;\rho,\theta)f(r,\alpha)rdrd\alpha$$

$$-\int_0^{2\pi}\varphi(a,\alpha)\left.\frac{\partial G(r,\alpha;\rho,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} ad\alpha,\quad \forall(\rho,\theta)\in B_a,$$

$$\frac{\partial G(r,\alpha;\rho,\theta)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{2\rho^2r-2\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{2r-2\rho\cos(\theta-\alpha)}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)},$$

$$
\left.\frac{\partial G(r,\alpha;\rho,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{1}{4\pi}\frac{2\rho^2 a - 2\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{\rho^2 a^2 + a^4 - 2a\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}
$$

$$
-\frac{1}{4\pi}\frac{2a - 2\rho\cos(\theta-\alpha)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)},
$$

$$
=\frac{1}{2\pi}\frac{\rho^2 a - \rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}
$$

$$
-\frac{1}{2\pi}\frac{a-\rho\cos(\theta-\alpha)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)},
$$

$$
=\frac{1}{2\pi a}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}。
$$

于是，对 $\forall(\rho,\theta)\in B_a$,

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} rdr\int_0^a \ln\frac{\rho^2 r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]} f(r,\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha。$$

这就是边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in B_a; \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial B_a, \end{cases}$$

的形式解。

特别，当 $f\equiv 0$ 时，我们得到边值问题

(1.28) $$\begin{cases} -\Delta u = 0, & (x,y)\in B_a; \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial B_a, \end{cases}$$

解的表达式：

(1.30) $$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha,$$

上式称为**圆上的Poisson公式**。

定理1.6：设 $\varphi\in C(\partial B_a)$，则由（1.30）给出的函数是边值问题是（1.28）的解。

证明：要证，①，$u\in C^2(B_a)$ 且 $\Delta u=0$ 于 B_a；

②，$\lim\limits_{(\rho,\theta)\to(a,\theta_0)} u(\rho,\theta)=\varphi(\theta_0)$，$\forall\,\theta_0\in[0,2\pi]$，

也即 $u\in C(\overline{B_a})$ 且满足边界条件。

①， 对 $\forall(\rho,\theta)\in B_a$，恒有

$$a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)\geq(a-\rho)^2>0,$$

又 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$

直接计算可得： $\Delta\left\{\dfrac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\right\}=0,$

而由 $u(\rho,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha,$

由数学分析的知识，可以验证求导求积分可以交换次序，得出

$u\in C^2(B_a)$，并且

$$\Delta u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta\left\{\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\right\}\varphi(\alpha)d\alpha$$

$$=0\ 。$$

②，　首先由Green函数的性质，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \equiv -\int_{\partial B_a}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}ds=1,$$

所以对 $\forall\theta_0\in[0,2\pi]$,

$$u(\rho,\theta)-\varphi(\theta_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left[\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right]d\alpha,$$

$$\left|u(\rho,\theta)-\varphi(\theta_0)\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&\left|u(\rho,\theta)-\varphi(\theta_0)\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0+\delta}^{\theta_0+\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha \\
&\equiv J_1+J_2+J_3,
\end{aligned}
$$

这里 $\delta\in(0,\pi)$ 是待定常数。由 $\varphi\in C(\partial B_a)$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 可取 $\delta\in(0,\pi)$, 使得当 $\left|\alpha-\theta_0\right|<\delta$ 时,

$$
\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|<\varepsilon/3,
$$

$$J_2 \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} \frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha$$

所以，

$$\left|J_2\right| \le \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha = \frac{\varepsilon}{3},$$

而

$$J_1 \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta} \frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\left|\varphi(\alpha)-\varphi(\theta_0)\right|d\alpha$$

$$\left|J_1\right| \le \max_{[0,\pi]}\left|\varphi(\alpha)\right|\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$$

$$= \max_{[0,\pi]}\left|\varphi(\alpha)\right|\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{(a-\rho)^2+2a\rho[1-\cos(\theta-\alpha)]}d\alpha$$

当 $\left|\theta-\theta_0\right|<\delta/2$ 时，由 $\theta_0-\pi\le\alpha\le\theta_0-\delta$ 得

$$\delta/2=-\delta/2+\delta\le\ \theta-\alpha=\left(\theta-\theta_0\right)+\left(\theta_0-\alpha\right)\le\delta/2+\pi\le\left(3\pi\right)/2,$$

即
$$\frac{\delta}{2}\le\theta-\alpha\le\frac{3\pi}{2},$$

所以，
$$1-\cos(\theta-\alpha)\ge 1-\cos\frac{\delta}{2}>0,$$

于是，当 $\left|\theta-\theta_0\right|<\delta/2$ 时，

$$\left|J_1\right|\le\max_{[0,\pi]}\left|\varphi(\alpha)\right|\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0-\delta}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{(a-\rho)^2+2a\rho[1-\cos(\theta-\alpha)]}d\alpha$$

$$\le\max_{[0,\pi]}\left|\varphi(\alpha)\right|\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{2a\rho\left[1-\cos\frac{\delta}{2}\right]}\cdot 2\pi,$$

因此，存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $|\theta-\theta_0| < \delta/2$、$|\rho - a| < \delta_1$ 时，

$$\left|J_1\right| \le \max_{[0,\pi]}\left|\varphi(\alpha)\right| \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{2a\rho\left[1-\cos\frac{\delta}{2}\right]}\cdot 2\pi < \frac{\varepsilon}{2}。$$

同理，存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $|\theta-\theta_0| < \delta/2$、$|\rho - a| < \delta_2$ 时，

$$\left|J_3\right| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

取 $\delta_3 = \max\left\{\delta/2, \delta_1, \delta_2\right\}$，则当 $|\theta-\theta_0| < \delta_3$、$|\rho - a| < \delta_3$ 时，

$$\left|u(\rho,\theta)-\varphi(\theta_0)\right| \le J_1 + J_2 + J_3 \ge \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

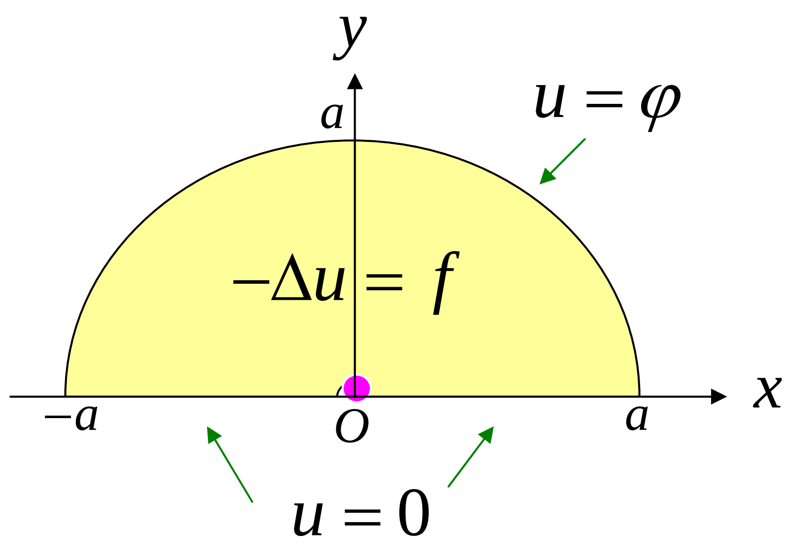
也即，
$$\lim_{(\rho,\theta)\to(a,\theta_0)} u(\rho,\theta) = \varphi(\theta_0), \quad \forall\,\theta_0 \in [0, 2\pi]。$$

定理1.6证毕。

例： 求解半圆上位势方程的边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad (x,y) \in B_a^+; \\ u = \varphi, \quad (x,y) \in \partial B_a \cap \{y>0\}, \\ u = 0, \quad -a \le x \le a, \quad y = 0。 \end{cases}$$

其中，$B_a^+ = B_a \cap \{y > 0\}$。



解法1： Green函数法。

用镜像法求出该问题的Green函数，再用公式（1.20）得出形式解，最后再严格证明。（参见书上第196页）

解法2： 对称延拓法。

思路： 设法将已知数据和解延拓到圆 B_a 上，使问题化为圆上位势方程的边值问题，并利用该问题解的表达式得出所求的解。

延拓依据： 由圆上Laplace方程第一边值问题解的表达式：

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r dr\int_0^a \ln\frac{\rho^2 r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]} f(r,\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha。$$

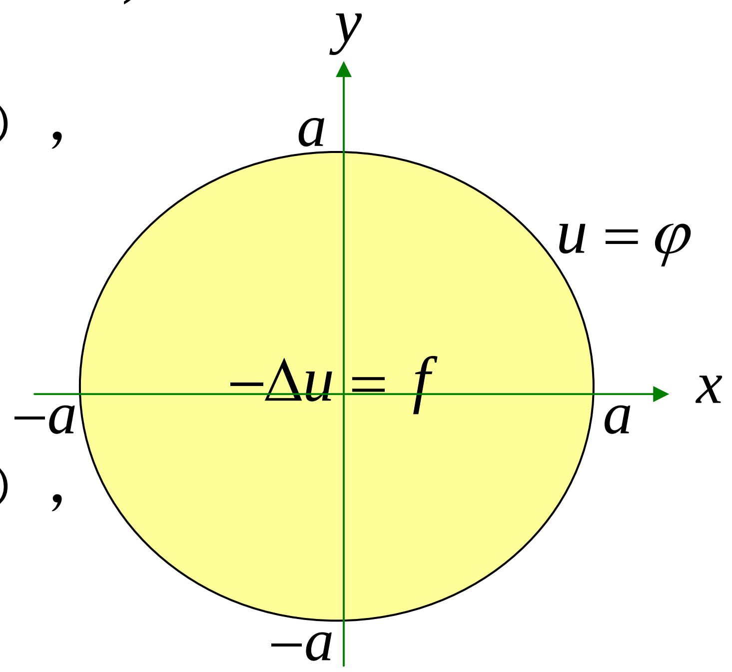
知：若 f 和 φ 是 y 的奇函数（偶函数），

则 u 也是 y 的奇函数（偶函数）。

等价于说：

若 f 和 φ 是 α 的奇函数（偶函数），

则 u 也是 α 的奇函数（偶函数）。

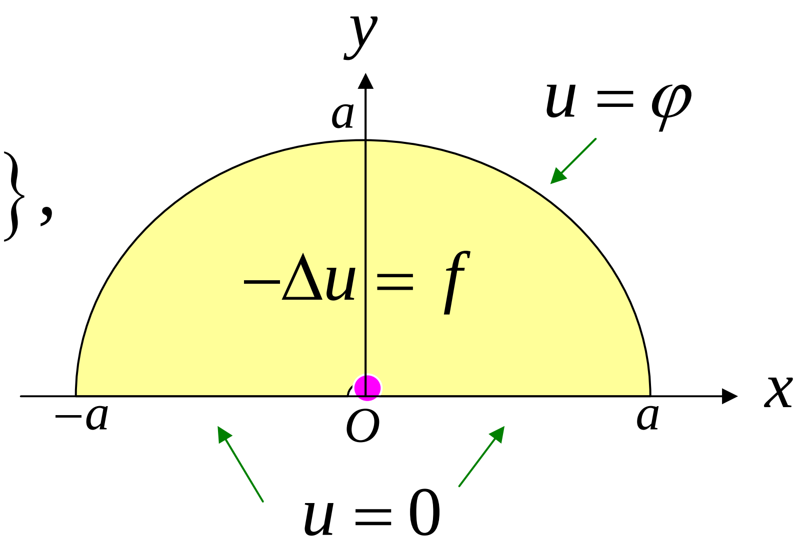


（证明作为练习）

所以，对于问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y) \in B_a^+; \\ u = \varphi, & (x,y) \in \partial B_a \cap \{y>0\}, \\ u = 0, & -a \le x \le a, \quad y = 0。 \end{cases}$$

其中，$B_a^+ = B_a \cap \{y>0\}$。



我们可以用关于 y 作奇延拓的方法，将问题化为圆上Laplace方程的第一边值问题来求解，然后将这个解限制在上半圆上，就得到我们要求的形式解。

解： 令

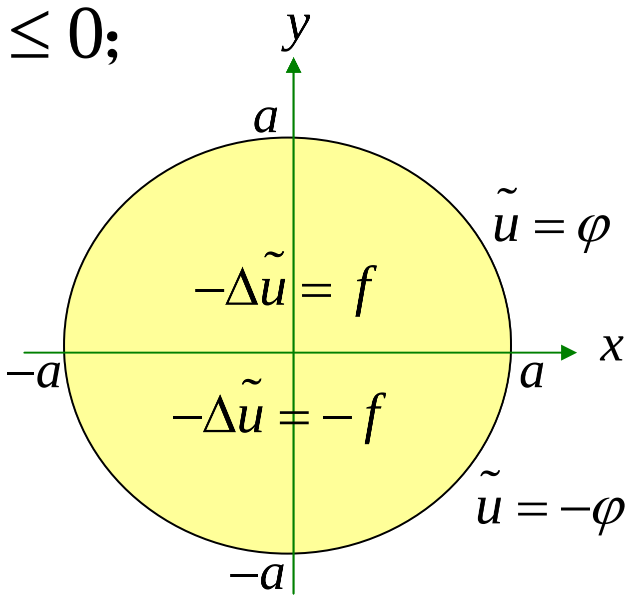
$$\tilde{f}(r,\alpha) = \begin{cases} f(r,\alpha), & 0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le r \le a; \\ -f(r,-\alpha), & -\pi \le \alpha \le 0,\ 0 \le r \le a; \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(\alpha)=\begin{cases}\varphi(\alpha), & 0\le\alpha\le\pi;\\ -\varphi(-\alpha), & -\pi\le\alpha\le 0;\end{cases}$$

其中 (r,α) 为极坐标。

求解下述圆上Laplace方程的边值问题：

$$\begin{cases}-\Delta\tilde{u}=\tilde{f}, & (x,y)\in B_a;\\ \tilde{u}=\tilde{\varphi}, & (x,y)\in\partial B_a,\end{cases}$$



$$\tilde{u}(\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}rdr\int_0^a\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}\tilde{f}(r,\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\tilde{\varphi}(\alpha)d\alpha。$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\right\}rdr\int_0^a \ln\frac{\rho^2 r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}\tilde{f}(r,\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\right\}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\tilde{\varphi}(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}rdr\int_0^a \ln\frac{\rho^2 r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}f(r,\alpha)d\alpha$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{0}rdr\int_0^a \ln\frac{\rho^2 r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}f(r,-\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(-\alpha)d\alpha$$

所以，

$$\tilde{u}(\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}rdr\int_0^{a}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)\right]}f(r,\alpha)d\alpha$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}rdr\int_0^{a}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta+\alpha)}{a^2\left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta+\alpha)\right]}f(r,\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^2-a^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta+\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha$$

于是，我们有：当 $0\le\theta\le\pi$、$0\le\rho\le a$ 时，

$$u(\rho,\theta)=\tilde{u}(\rho,\theta)=\cdots\cdots$$。

特别，当 $f \equiv 0$ 时，我们得到问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \quad (x,y) \in B_a^+; \\ u = \varphi, \quad (x,y) \in \partial B_a \bigcap \left\{ y > 0 \right\}, \\ u = 0, \quad -a \le x \le a, \quad y = 0。 \end{cases}$$

的形式解为：

$$u(\rho,\theta)$$

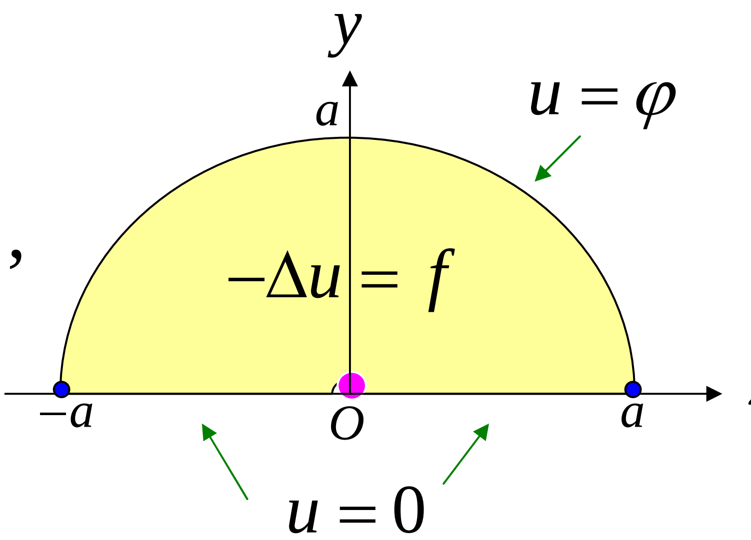
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{a\rho\left(\rho^2 - a^2\right)\left[\cos(\theta-\alpha) - \cos(\theta+\alpha)\right]\varphi(\alpha)}{\left[a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\theta-\alpha)\right]\left[a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\theta+\alpha)\right]} d\alpha。$$

验证：

可以证明，若 $f\in C^2(\overline{B_a})$、$\varphi\in C(\partial B_a)$ 且满足相容性条件

$\varphi(-a,0)=\varphi(a,0)=0$，则 $u\in C^2(B_a)$ 且是问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in B_a^+; \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial B_a\bigcap\{y>0\}, \\ u=0, & -a\le x\le a,\quad y=0, \end{cases}$$



的解，其中边值的意义为

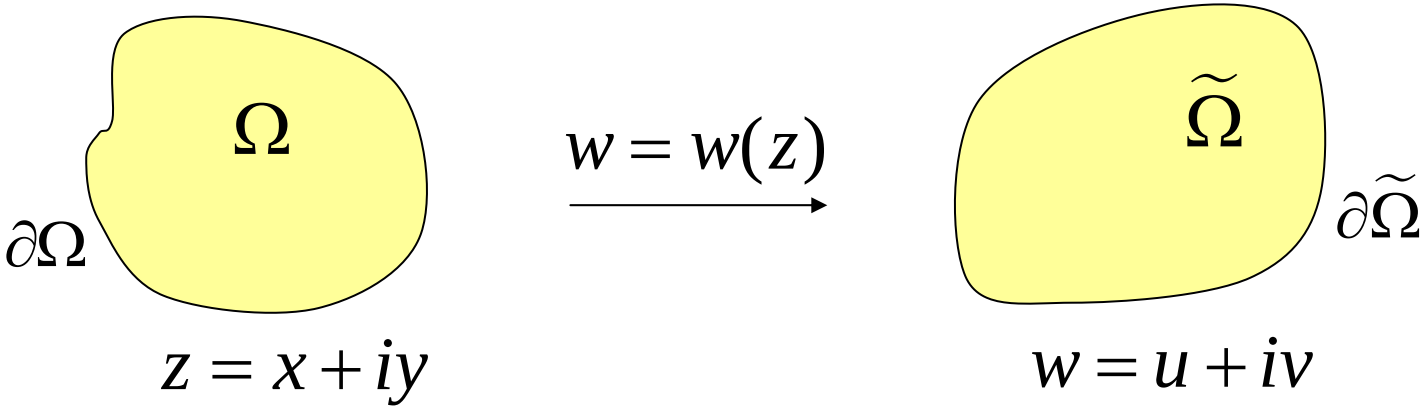
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=\varphi,\quad \forall(x_0,y_0)\in\partial B_a\bigcap\{y\ge 0\},$$

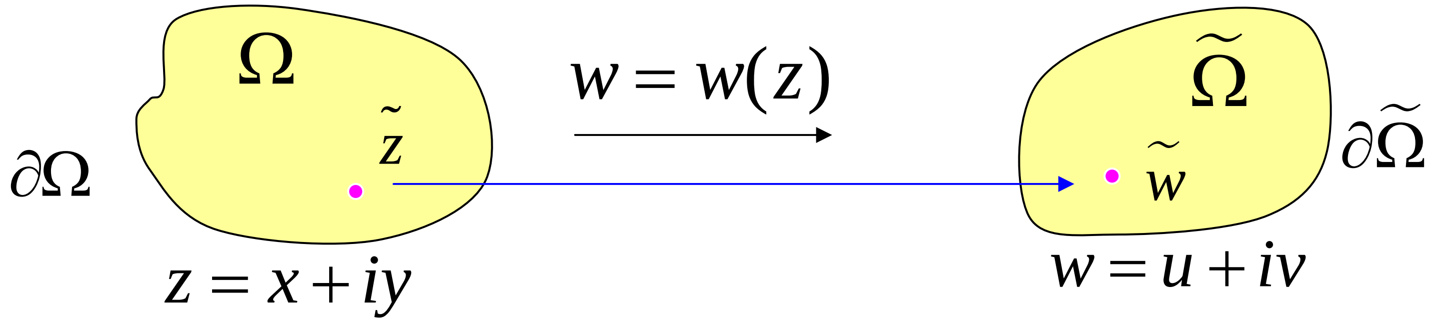
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y)=0,\quad \forall x_0\in[-a,a]。$$

附注1： 求Green函数的镜像法同样适合于高维问题。（$n \geq 3$）

附注2： 对于二维问题还可以用复变函数中的保角变换，来求Green函数，且非常有效。 其方法如下：

设区域 Ω 在保角变换（导数不等于0的复解析函数）w 下一对一地变为区域 $\widetilde{\Omega}$，其边界 $\partial\Omega$ 相应地变为 $\partial\widetilde{\Omega}$，





为求 Ω 上的Green函数 $G(x,y;\xi,\eta)$：

$$\begin{cases} -\Delta G(x,y;\xi,\eta) = \delta(x-\xi, y-\eta), & (x,y)\in\Omega; \\ G(x,y;\xi,\eta) = 0, & (x,y)\in\partial\Omega \ , \end{cases}$$

先求 $\widetilde{\Omega}$ 上的Green函数 $\widetilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v})$：

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = \delta(u-\tilde{u}, v-\tilde{v}), & (u,v)\in\widetilde{\Omega}; \\ \widetilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = 0, & (u,v)\in\partial\widetilde{\Omega} \ , \end{cases}$$

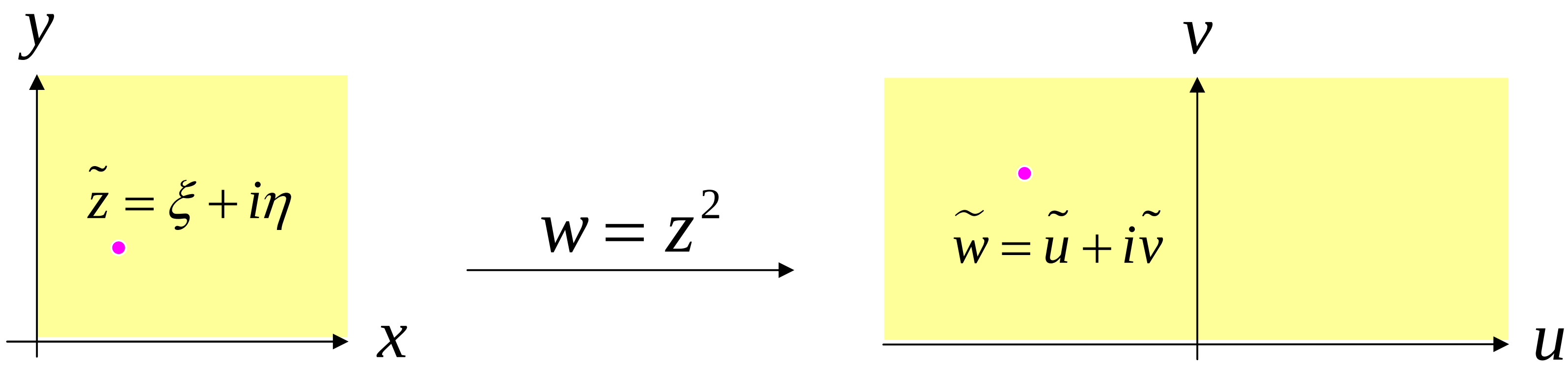
这里 $\tilde{z} = \xi + i\eta$, $\tilde{w} = \tilde{u} + i\tilde{v}$。 则，

$$G(x,y;\xi,\eta) = \widetilde{G}(u(z), v(z); \tilde{u}(\tilde{z}), \tilde{v}(\tilde{z}))$$

例：第一象限位势方程的第一边值问题的Green函数。

$$\begin{cases} -\Delta G(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi,y-\eta), \quad x>0,\ y>0; \\ G(x,y;\xi,\eta)=0, \quad x>0, y=0; \text{ 或 } x=0,\ y>0。\end{cases}$$

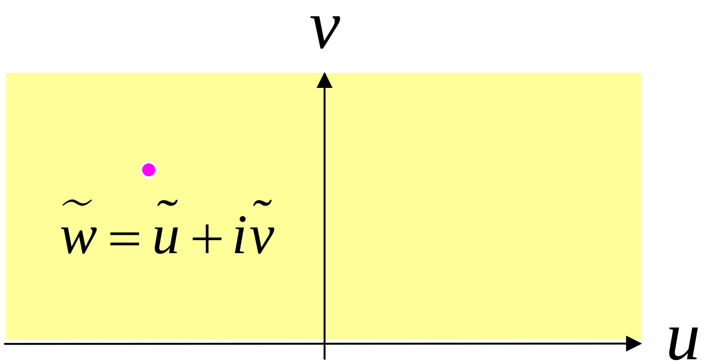
解： 记 $z=x+iy$, 第一象限在变换 $w=u+iv=z^2$ 下变为上半平面， 其边界变为 x 轴，



先求上半平面上的Green函数 $\tilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v})$：

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = \delta(u-\tilde{u}, v-\tilde{v}), \quad u\in(0,+\infty), \ v>0; \\ \tilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = 0, \quad u\in(0,+\infty), \quad v=0, \end{cases}$$

由前面的例题，知：



$$\tilde{G}(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|w-\tilde{w}\right| + \frac{1}{2\pi}\ln\left|w-\tilde{w}^*\right|$$

这里 $\tilde{w}^*$ 是 $\tilde{w}$ 的共轭。 代回原变量，得

$$G(x,y;\xi,\eta) = \tilde{G}(u(z),v(z);\tilde{u}(\tilde{z}),\tilde{v}(\tilde{z}))$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\left|z^2-\tilde{z}^2\right| + \frac{1}{2\pi}\ln\left|z^2-\left(\tilde{z}^2\right)^*\right|$$

因为 $z=x+iy$、$z^{*}=x-iy$， 所以，

$$G(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\ln\left|z^{2}-\tilde{z}^{2}\right|+\frac{1}{2\pi}\ln\left|z^{2}-\left(\tilde{z}^{2}\right)^{*}\right|$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\ln\left|z-\tilde{z}\right|-\frac{1}{2\pi}\ln\left|z+\tilde{z}\right|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\left|z-\left(\tilde{z}\right)^{*}\right|+\frac{1}{2\pi}\ln\left|z+\left(\tilde{z}\right)^{*}\right|$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}}-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x+\xi)^{2}+(y+\eta)^{2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^{2}+(y+\eta)^{2}}+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x+\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left[(x-\xi)^{2}+(y+\eta)^{2}\right]\left[(x+\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}\right]}{\left[(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}\right]\left[(x+\xi)^{2}+(y+\eta)^{2}\right]}。$$

解毕。

作　业

- Page 236，17，(2)；（要求用镜像法）
- Page 236，18；
- Page 237，20，(2)；（套公式即可）
- Page 237，21，(2)；
- Page 237，22，(1)。（可以套公式）

§4　极值原理

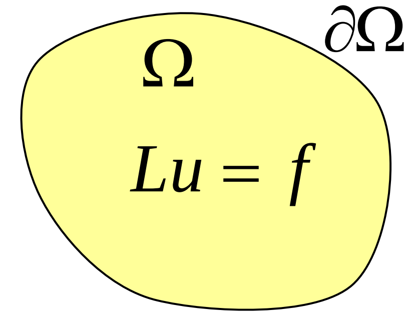
- 因为位势方程可以看作为热传导方程当温度达到平衡时的极限方程，而热传导方程具有极值原理，所以位势方程也有极值原理。

- 从实际问题中看极值原理：
  设有一物体，内部没有热源，且物体的温度已经达到平衡，不再随时间变化，则**该物体的温度的最大值和最小值必在该物体的边界上取到。**

　　其原因是：热量总是从温度高的地方流向温度低的地方，如果温度在内部某点取到严格最大值或严格最小值，则随着时间的推移，热量将由温度高的点向温度低流动，从而引起物体温度随时间变化，也即物体的温度不能处于平衡状态。

§ 2.1　极值原理

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集，$\partial\Omega$ 为其边界。



考虑下述比位势方程更一般的方程：

$$Lu \equiv -\Delta u + c(x)u = f,$$

引理2.1：　设在 Ω 上 $c(x) \geq 0$，$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，且

$$Lu = f < 0, \quad x \in \Omega。$$

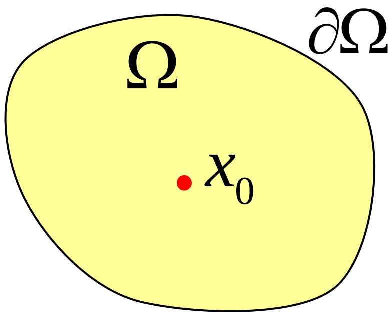
则 $u(x)$ 不能在 Ω 上取到它在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值，也即 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值只能在边界 $\partial\Omega$ 上取到。

注：将方程写成 $-\Delta u = f - c(x)u$，则 $-c(x)u$ 可以看着是某种热源，它的热源强度与温度有关。当 $u \geq 0$ 时，$-c(x)u + f < 0$，总热源是吸热热源。因此，从物理上看，温度的非负最大值只能在边界上达到。

证明：用反证法。如果引理2.1的结论不成立，则存在

$x_0 \in \Omega$ 使得

$$u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \geq 0。$$



由数学分析的知识，得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right|_{x=x_0} \leq 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因此，

$$Lu(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

但这与已知条件

$$Lu = f < 0, \quad x \in \Omega。$$

矛盾。 引理2.1的结论必定成立。 **证毕。**

定理2.2：设在 Ω 上 $c(x)\ge 0$ 且有界， $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，

$$Lu=f\le 0,\quad x\in\Omega。$$

则 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到，

（但也可能同时在 Ω 内取到。）

即：　如果 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x)\ge 0$,

则 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=\max\limits_{x\in\partial\Omega}u(x)$。

说明： ①， 如果 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x)<0$，定理2.2什么也没说。

②， 等式 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=\max\limits_{x\in\partial\Omega}u(x)$，等价于最大值必

必在边界 $\partial\Omega$ 上取到。

③， 书上定理2.2的叙述有错误！

证明思路： 通过适当的函数变换，将问题化为 $f<0$ 的情形，然后利用引理2.1。

证明： 设 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x)\geq 0$。对 $\forall\varepsilon>0$，令

$$w(x)=u(x)+\varepsilon e^{ax_1},$$

其中 a 为待定常数。则

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} w(x)>\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)\geq 0,$$

$$\begin{aligned} Lw &\equiv -\Delta w+c(x)w \\ &= -\Delta u+c(x)u-\varepsilon a^2 e^{ax_1}+c(x)\varepsilon e^{ax_1} \\ &= f-\varepsilon\left[a^2-c(x)\right]\varepsilon e^{ax_1} \end{aligned}$$

由假设 $c(x)$ 在Ω 上有界，因此我们可以取 $a^2>\sup\limits_{x\in\Omega} c(x)$,

所以，对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} w(x) = u(x) + \varepsilon e^{ax_1} \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega), \\ \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} w(x) > \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \geq 0, \\ Lw < 0, \quad\quad x \in \Omega。\end{cases}$$

由引理2.1，$w(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值只能在边界 $\partial\Omega$ 上取到。

从而，

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} w(x) = \max_{x\in\partial\Omega} w(x),$$

于是，

$$\begin{aligned} \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) &< \max_{x\in\overline{\Omega}} w(x) = \max_{x\in\partial\Omega} w(x), \\ &\leq \max_{x\in\partial\Omega} u(x) + \varepsilon \max_{x\in\partial\Omega} e^{ax_1} \end{aligned}$$

因为 Ω 是有界的，故 $\max\limits_{x\in\partial\Omega} e^{ax_1}$ 为有界的。在上面的不等式中令 $\varepsilon \to 0$, 就得：

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \le \max_{x\in\partial\Omega} u(x)。$$

另一方面，总有

$$\max_{x\in\partial\Omega} u(x) \le \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x),$$

所以，
$$\max_{x\in\partial\Omega} u(x) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)。$$

于是，我们证明了：如果 $\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \ge 0,$ 则

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x),$$

也即是：$u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到。

定理2.1证毕。

推论1：设在 Ω 上 $c(x)\geq 0$ 且有界，$u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，

$$Lu=f\geq 0,\quad x\in\Omega。$$

则 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非正最小值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到。

证明：对 $-u$ 应用定理2.2，并注意到 $-u$ 的非负最大值等于的非负最大值等于 u 的非正最小值。

推论2：设在 Ω 上 $c(x)\geq 0$ 且有界，$u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，

$$Lu=0,\quad x\in\Omega。$$

则 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值以及非正最小值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到。

注：由引理2.1的证明可以看出：如果 $c(x)\equiv 0$ 于 Ω，则引理2.1的结论中的“非负最大值”可以用“最大值”代替，从而在**定理2.2及其推论中的“非负”及“非正”可以去掉**。

注：前面的定理2.2及其推论中，我们只能确定 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的的非负最大值（非正最小值）必在边界上取到，不能确定它在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值（或非正最小值）是否也能在边界上取到。事实上我们还可以证明更强的结论，即

如果增加条件： **Ω 是连通的。**

则，在定理2.2及其推论中，$u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值（非正最小值）不能在 Ω 取到，除非 $u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上恒等于常数。

这一结论称为强极值原理，证明较复杂。参见书上定理2.4。

作　业

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集，$G(x,y;\xi,\eta)$ 为边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in\Omega, \\ u=\varphi, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

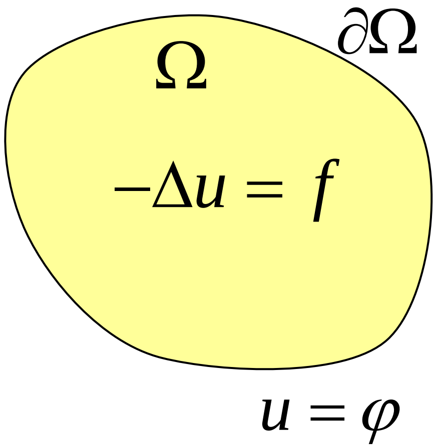
的Green函数。用弱极值原理证明：

$$G(x,y;\xi,\eta)\geq 0, \quad (x,y)\in\Omega,\ (\xi,\eta)\in\Omega,\ (x,y)\neq(\xi,\eta)。$$

注：用强极值原理还可证明上式中等号不能成立。

§ 2.2　边值问题解的最大模估计

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集，$\partial\Omega$ 为其边界。



考虑下述位势方程的Dirichlet问题：

（2.5）
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

定理2.5： 设 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是 Dirichlet 问题（2.5）的解，

则
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \le \Phi + CF,$$

其中 $\Phi \equiv \max_{\partial\Omega} |\varphi|$、 $F \equiv \sup_{\Omega} |f|$、 C 是仅依赖于维数 n 和 Ω 的直径的正常数。

证明： 与热平衡方程的情况相类似，我们可以通过构造适当的辅助函数与问题的解作比较，再用比较原理得出结论。

如果 $F=+\infty$，定理自然成立。所以我们只需考虑 $F<+\infty$ 的情况。令 $v=w\pm u$，（两个函数写在一起），$w(x)$ 待定。我们要选取适当的 $w(x)$，使得函数 $v\in C(\overline{\Omega})\bigcap \mathrm{C}^2(\Omega)$ 且：

$$\begin{cases} 0\le -\Delta v = -\Delta w \mp \Delta u = -\Delta w \mp f, & x\in\Omega, \\ 0\le v = w\pm u = w\pm\varphi, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

即：

$$(*)\qquad \begin{cases} w\in C(\overline{\Omega})\bigcap \mathrm{C}^2(\Omega), \\ -\Delta w\ge \pm f, \quad x\in\Omega, \\ w\ge \mp\varphi, \quad x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

如果（＊）式成立，则由弱极值原理的推论，得：

v 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到，

从而，$$v(x,t)\geq 0,\quad \forall x\in\overline{\Omega},$$

即，$$w(x)\pm u(x)\geq 0,\quad \forall x\in\overline{\Omega},$$

于是，$$|u(x)|\leq |w(x)|\leq \max_{\overline{\Omega}}|w(x)|,\quad x\in\overline{\Omega},$$

这就得出了 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大模估计。

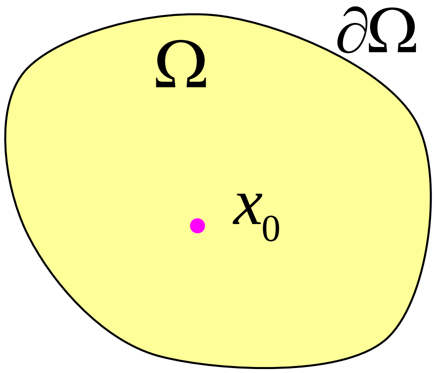
下面来找满足（＊）的函数 w 。记 d 为 Ω 的直径，即

$d=\sup\limits_{x,y\in\Omega}|x-y|$, 因为 Ω 的有界的，所以 $0<d<+\infty$。

在 Ω 中任意取定一点 $x_0\in\Omega$, 则当 $x\in\overline{\Omega}$ 时， $d>|x-x_0|$。

令

$$w(x)=\frac{F}{2n}\left(d^2-|x-x_0|^2\right)+\Phi$$



则，

$$\begin{cases} w\in C(\overline{\Omega})\bigcap C^2(\Omega), \\ -\Delta w=F\ge \pm f, \quad x\in\Omega, \\ w\ge\Phi\ge\mp\varphi, \quad x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

因此， w 满足（$*$）式。 于是，由前面的讨论，

$$|u(x)|\le|w(x)|\le\max_{\overline{\Omega}}|w(x)|, \quad x\in\overline{\Omega},$$

所以，

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|\le\max_{\overline{\Omega}}|w(x)|\le CF+\Phi,$$

其中 $C=\dfrac{d^2}{2n}$ 。 定理**2.5**证毕。

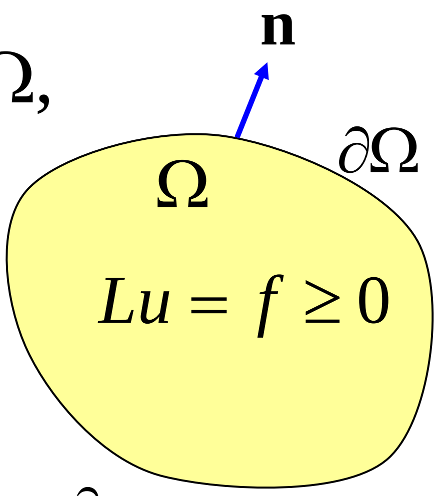
注： 由定理2.5，我们容易推出：位势方程的Dirichlet问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的解在函数类 $C(\overline{\Omega}) \bigcap \mathrm{C}^2(\Omega)$ 中是唯一的， 以及在最大模的意义下，解关于f 和 φ 是稳定的。

下面我们考虑下述第三边值问题：

$$(2.6)\quad \begin{cases} Lu \equiv -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$



$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u = \varphi \geq 0$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

引理： 设在 Ω 上 $c(x) \geq 0$ 且有界、

$\alpha(x) > 0$、 $\varphi(x) \geq 0$、 $f(x) \geq 0$。

$u \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ 是（2.6）的解。

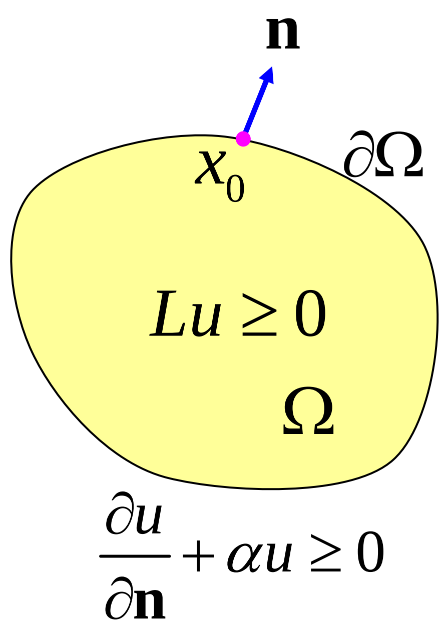
则
$$u(x) \geq 0, \qquad x \in \Omega。$$

证明： 由弱极值原理，u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到。 因此存在 $x_0 \in \partial\Omega$ 使得 $u(x_0) = \min\limits_{\overline{\Omega}} u$,

因此，只要证：$u(x_0)\ge 0$。

因为 x_0 是 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值点，

$\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，由方向导数的定义，我们有



$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{x=x_0}\le 0,$$

而由边界条件，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{x=x_0}+\alpha(x_0)u(x_0)\ge 0,$$

所以，$\alpha(x_0)u(x_0)\ge 0$。又因为 $\alpha(x_0)>0$，这就有

$$u(x_0)\ge 0。$$

引理证毕。

定理2.6： 设在 Ω 上 $c(x)\geq 0$ 且有界、$\alpha(x)\geq\alpha_0>0$、

$u\in C^1(\overline{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$ 是（2.6）的解。

则
$$\max_{\overline{\Omega}}|u|\leq C\left(\Phi+F\right),$$

其中 $\Phi\equiv\max_{\partial\Omega}|\varphi|$、 $F\equiv\sup_{\Omega}|f|$、 C 是仅依赖于维数 n 、 α_0 和 Ω 的直径的正常数。

证明： 如果 $F=+\infty$， 定理自然成立。 所以我们只需考虑 $F<+\infty$ 的情况。 我们要设法利用前面的引理。

令 $v=w\pm u$，（两个函数写在一起），$w(x)$ 待定。

我们要选取适当的 $w(x)$， 使得函数 $v\in C^1(\overline{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$

且满足：

$$\begin{cases} 0 \le Lv = Lw \pm \Delta u = Lw \pm f, \quad x \in \Omega, \\ 0 \le \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)v = \left(\dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)w\right) \pm \left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u\right) \\ \qquad = \left(\dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)w\right) \pm \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

即：

$$(*) \qquad \begin{cases} Lw \ge \pm f, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)w \ge \pm\varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

如果（＊）式成立，则由前面的引理，得：$v \ge 0, \quad x \in \overline{\Omega},$

即，
$$w(x) \pm u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

于是，
$$|u(x)| \leq |w(x)| \leq \max_{\overline{\Omega}} |w(x)|, \quad x \in \overline{\Omega},$$

这就得出了u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大模估计。

下面来找满足（*）的函数 w 。记 d 为 Ω 的直径，即 $d = \sup\limits_{x,y\in\Omega} |x-y|$，因为 Ω 的有界的，所以 $0 < d < +\infty$。

在 Ω 中任意取定一点 $x_0 \in \Omega$，则当 $x \in \overline{\Omega}$ 时，$d > |x - x_0|$。

令
$$w(x) = \frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x - x_0|^2\right) + \frac{\Phi}{\alpha_0},$$

令 $$w(x)=\frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x-x_0|^2\right)+\frac{\Phi}{\alpha_0},$$

则， $w\in C(\overline{\Omega})\bigcap \mathrm{C}^2(\Omega)$， $w\geq 0$ 于 Ω，

$$Lw=-\Delta w+c(x)w=F+c(x)w\geq \pm f,\quad x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}=\frac{F}{2n}\left[-2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{0i}\right)\beta_i(x)\right]$$

$$\geq\frac{F}{2n}\left[-|x_i-x_{0i}|^2-\sum_{i=1}^{n}\left\{\beta_i(x)\right\}^2\right]=-\frac{F}{2n}\left(|x-x_0|^2+1\right),$$

这里， $\mathbf{n}=\left(\beta_1(x),\beta_2(x),\cdots,\beta_n(x)\right)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，

$\sum_{i=1}^{n}\left\{\beta_i(x)\right\}^2=1$， $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$， $x_0=\left(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n}\right)$。

所以，
$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \ge -\frac{F}{2n}\left(|x-x_0|^2+1\right), \quad x\in\partial\Omega,$$

$$\alpha(x)w(x)=\alpha(x)\left\{\frac{F}{2n}\left[\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x-x_0|^2\right]+\frac{\Phi}{\alpha_0}\right\}$$

因为，$\alpha(x)\ge\alpha_0>0,\ x\in\partial\Omega$， 故

$$\alpha(x)w(x)\ge\frac{F\left(1+d^2\right)}{2n}+\Phi, \quad x\in\partial\Omega,$$

于是，
$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}+\alpha(x)w(x) \ge \frac{F}{2n}\left(1+d^2-1-|x-x_0|^2\right)+\Phi$$

$$\ge\Phi, \quad x\in\partial\Omega,$$

最后的不等号我们利用了 $d>|x-x_0|, \quad x\in\partial\Omega$。

因此，w 满足（$*$）式。 于是，由前面的讨论，

$$|u(x)| \le |w(x)| \le \max_{\overline{\Omega}} |w(x)|,\quad x \in \overline{\Omega},$$

而
$$w(x) = \frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x - x_0|^2\right) + \frac{\Phi}{\alpha_0},$$

所以，
$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| \le \max_{\overline{\Omega}} |w(x)| \le C\left(F + \Phi\right),$$

其中 $C = \max\left\{\frac{1+\left(1+\alpha_0\right)d^2}{2n\alpha_0}, \frac{1}{\alpha_0}\right\}$。

定理**2.6**证毕。

注1： 由定理2.6，我们容易推出：下述第三边值问题：

（2.6） $$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的解在函数类 $C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ 中的解是唯一的， 以及在最大模的意义下，解关于 f 和 φ 是稳定的。

注2：如果 $\alpha(x) \equiv 0,$ 问题（2.6）是Neumann问题（第二边值问题）。此时若 $c(x) > 0$ 于Ω，我们仍可以证明类似的最大模估计， 并由此得出解的唯一性，但证明过程较复杂； 若 $c(x) \equiv 0$ 于 Ω，则问题化为

位势方程的Neumann问题：

$$(2.9)\quad \begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

一般来说，若（2.9）问题有解，则必有无穷多个解。事实上，若 $u(x)$ 是其一个解，则对任意常数 C，$u(x)+C$ 也是它的解。因此，（2.9）没有类似于前面的最大模估计。

另一方面，因为

$$-\int_\Omega \Delta u dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

所以（2.9）有解的必要条件为

$$\int_\Omega f(x)dx = -\int_{\partial\Omega} \varphi(x)dS。$$

练　习

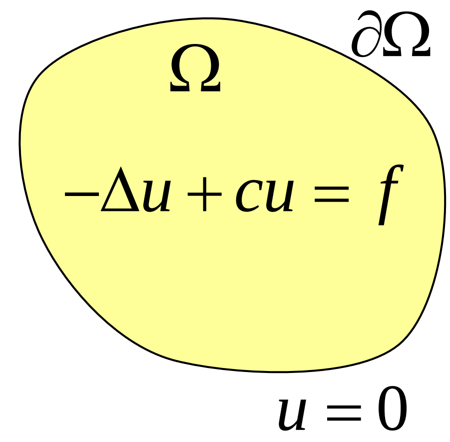
- Page 232，5；（利用定理2.2）
- Page 231，1；
- Page 233，6；
- Page 235，12。

后面三题利用有关证明方法，而不是结果。

§2.3　能量模估计

本节我们将对边值问题建立能量模估计，即能量不等式。

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, $\partial\Omega$ 为其边界。



考虑下述 Dirichlet 问题：

（2.10）
$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

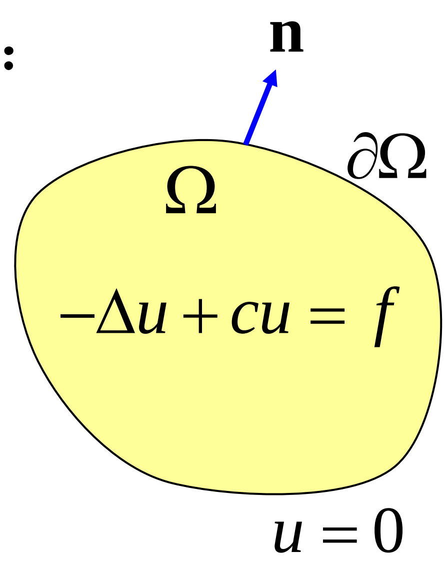
定理2.7：　设 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$ 是（2.10）的解，

$$c(x) \geq c_0 > 0, \quad x \in \Omega\text{。} \quad \text{则：}$$

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2(x)dx \leq M\int_\Omega f^2(x)dx,$$

其中 M 仅依赖于 c_0。

证明：　对方程两端乘 u 并在 Ω 上积分，得：



$$-\int_\Omega u(x)\Delta u(x)dx + \int_\Omega c(x)u^2(x)dx$$

$$= \int_\Omega f(x)u(x)dx,$$

由分部积分公式，得

$$-\int_\Omega u(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}}dS$$

$$= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx,$$

这里 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

$$\int_\Omega f(x)u(x)dx \le \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2(x)dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2(x)dx,$$

所以，

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + c_0 \int_\Omega u^2(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2(x)dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2(x)dx,$$

因为 $c(x) \geq c_0 > 0, \quad x \in \Omega$，我们得：

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + c_0 \int_\Omega u^2(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2(x)dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2(x)dx,$$

称项后得：

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2(x)dx \leq \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2(x)dx \text{。}$$

证毕。

注1：由定理2.7的结论可以推广到 $c_0=0$ 的情况。

注2：由定理2.7，我们容易推出：Dirichlet问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

在能量模的意义下，解关于 f 和 φ 是稳定的。

下面考虑第二、三边值问题：

$$
(2.12)\quad \begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}
$$

这里 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

定理2.8： 设 $u\in C^1(\overline{\Omega})\bigcap \mathrm{C}^2(\Omega)$ 是（2.12）的解，

$$
c(x)\ge c_0>0,\quad \alpha(x)\ge 0,\quad x\in\Omega。\quad \text{则：}
$$

$$
\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2(x)dx + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2(x)dS
$$

$$
\le M\int_\Omega |f(x)|^2\,dx,
$$

其中 M 仅依赖于 c_0。

证明： 与定理2.7的证明几乎完全一样。作为练习。

注1：由定理2.8，我们容易推出：第二、三边值问题：

$$
(2.12)\quad \begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}
$$

在条件

$$
c(x) \ge c_0 > 0, \quad \alpha(x) \ge 0, \quad x \in \Omega
$$

下，解在函数类 $C^1(\overline{\Omega}) \bigcap \mathrm{C}^2(\Omega)$ 中是唯一的，且在能量模的意义下，解关于f 和 φ 是稳定的。

注2：由定理2.8的结论在 $c_0 = 0$、$f(x) \equiv 0$（$x \in \Omega$）及 $\alpha(x) \ge 0$（$x \in \Omega$）的条件下仍然成立，此时的结论为：

$$
\int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx \le 0,
$$

即：
$$\int_{\Omega} \left|\nabla u(x)\right|^2 dx = 0,$$

因此，u 在 Ω 中恒为常数（假设Ω 为连通的）。

特别，第二边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的解在 Ω 中恒为常数（假设Ω 为连通的）。由此推出问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \varphi, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的任何两个解在Ω 中正好相关一个常数（假设Ω 为连通的）。

作　业

- Page 235, 14，15。
- 证明定理2.8。

第五章　二阶线性偏微分方程分类

本章讨论：

(1) 一般二阶线性偏微分方程的分类法。

(2) 常系数二阶线性偏微分方程化简法。

(3) 具有二个自变量的二阶线性偏微分方程化简法。

§1.分类

一、一般二阶线性偏微分方程：

一般二阶线性偏微分方程可表为：

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x),\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

其中 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ \ x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\Omega\subset\mathbb{R}^m.$

方程的二阶项系数矩阵：

$$\mathbf{A}(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mm}(x) \end{pmatrix},$$

为一对称矩阵。

二、二阶线性偏微分方程实例及其二阶项系数矩阵：

波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$m = n + 1,\ t = x_{n+1},$

一个特征值与其余特征值异号。

热传导方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$m = n + 1,\ t = x_{n+1},$

一个特征值为0，其余特征值同号。

位势方程

$$-\Delta u = f, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

$m = n,$

所有特征值同号。

三、二阶线性偏微分方程的分类：

定义5.1 若方程(1)的二阶项系数矩阵$\mathbf{A}(x_0)$的m个特征值

1.同号，则称方程(1)在x_0点是椭圆型的。

2.一个为0其余同号，则称方程(1)在x_0点是抛物型的。

3.一个与其余异号，则称方程(1)在x_0点是双曲型的。

如果对于区域$\bar{\Omega}$上的每一个点，方程(1)都为椭圆型（抛物型、双曲型），则称方程(1)在$\bar{\Omega}$上为椭圆型（抛物型、双曲型）。

例如：

波动方程 $u_{tt}-a^2\Delta u=f$ 是双曲型；

热传导方程 $u_t-a^2\Delta u=f$ 是抛物型；

位势方程 $-\Delta u=f$ 是椭圆型。

三类方程的标准形式：

1，双曲型方程的标准形：

$$u_{x_{n+1}x_{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}u_{x_k x_k}=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)u_{x_k}+f(x),$$

2，椭圆型方程的标准形：

$$u_{x_{n+1}x_{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}u_{x_k x_k}=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)u_{x_k}+f(x),$$

3，抛物型方程的标准形：

$$\sum_{k=1}^{n}u_{x_k x_k}=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)u_{x_k}+f(x),$$

这里, $x=(x_1,x_2,\ldots x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$, $u=u(x)$ 是 $n+1$ 元函数。

注： 当然，从矩阵的性质分析，还可以产生其他情形的分类，但是由于这些方程的实际背景有的至今还不是很清楚，有的即使有实际意义，但与上述三类方程相比，远没有引起人们的兴趣和注意，所以一般偏微分方程理论都不涉及这方面的任何内容。

四、常系数二阶线性偏微分方程的化简：

根据二阶线性偏微分方程的分类法，我们自然会问，是否可以通过适当的变换，将一个二阶线性偏微分方程的二阶项化简成三类标准的偏微分方程之一。这对于一般情形是做不到，但对于二种情形是可行的即：常系数二阶线性偏微分方程及含有二个自变量的二阶线性偏微分方程。

对于常系数二阶线性偏微分方程的化简，有以下定理：

定理5.1 若方程(1)的二阶项系数均为常数，且它属于椭圆型（抛物型、双曲型）方程，则必有一个非奇异的自变量线性变换，将方程(1)的二阶化为形如(4)（(3)、(2)）的标准形式。

证明：我们仅讨论方程(1)为椭圆型情形。

因为方程(1)的为常系数的，故可以表为如下形式：

$$\left(\nabla_x^T \mathbf{A} \nabla_x\right)u + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \tag{5}$$

其中

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^T, \quad \nabla_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^T,$$

事实上，我们直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_x^T \mathbf{A} \nabla_x\right) u &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_m}
\end{pmatrix} u(x) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\partial_{x_1} u \\ \partial_{x_2} u \\ \vdots \\ \partial_{x_m} u
\end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)
\begin{pmatrix}
a_{11}\partial_{x_1} u + a_{12}\partial_{x_2} u + \cdots + a_{1m}\partial_{x_m} u \\
a_{21}\partial_{x_1} u + a_{22}\partial_{x_2} u + \cdots + a_{2m}\partial_{x_m} u \\
\vdots \\
a_{m1}\partial_{x_1} u + a_{m2}\partial_{x_2} u + \cdots + a_{mm}\partial_{x_m} u
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{11}\partial_{x_1}u + a_{12}\partial_{x_2}u + \cdots + a_{1m}\partial_{x_m}u\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{21}\partial_{x_1}u + a_{22}\partial_{x_2}u + \cdots + a_{2m}\partial_{x_m}u\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(a_{m1}\partial_{x_1}u + a_{m2}\partial_{x_2}u + \cdots + a_{mm}\partial_{x_m}u\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}
$$

作非奇异线性变换： $\mathbf{Y} = \mathbf{BX}$,

其中

$$
\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},
$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_m} \end{pmatrix} u(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} + \dfrac{\partial u}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_m} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1} b_{11} + \dfrac{\partial u}{\partial y_2} b_{21} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial y_m} b_{m1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1} b_{12} + \dfrac{\partial u}{\partial y_2} b_{22} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial y_m} b_{m2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1} b_{1m} + \dfrac{\partial u}{\partial y_2} b_{2m} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial y_m} b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_m} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \nabla_y u \,,$$

代入(5)得：

$$\left[\left(\mathbf{B}^T \nabla_y\right)^T \mathbf{A}\left(\mathbf{B}^T \nabla_y\right)\right] u + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + c(x) u = f(x),$$

整理得：

$$\left[\nabla_y^T \left(\mathbf{BAB}^T\right) \nabla_y\right] u + \sum_{i,j=1}^{m} b_{ji} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial y_j} + c(x) u = f(x),$$

由线性代数知识知，存在非奇异矩阵 ，使得

$$\mathbf{BAB}^T = \pm\mathbf{E},$$

于是方程化为：

$$\pm\left(\nabla_y^T\mathbf{E}\nabla_y\right)u + \sum_{i,j=1}^{m} b_{ji}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial y_j} + c(x)u = f(x),$$

即：

$$\pm\Delta_y u + \sum_{i,j=1}^{m} b_{ji}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial y_j} + c(x)u = f(x),$$

方程的二阶项部分化为椭圆型方程的标准形式。

化常系数方程为标准方程的方法总结：

第一步：写出方程的二阶项的系数矩阵 $\mathbf{A}$；

第二步：找非奇异矩阵 $\mathbf{B}$，使得

$$\mathbf{BAB}^T=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu\end{pmatrix},\quad \text{其中}\quad \mu=\begin{cases}1, & \text{椭圆型；}\\ -1, & \text{双曲型；}\\ 0, & \text{抛物型。}\end{cases}$$

第三步：作变换 $\mathbf{Y}=\mathbf{BX}$,或 $\mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y}$,将 u 关于 x 的有关偏导数用 u 关于 y 的偏导数表示出来，并代入方程即可得方程的标准形式。

注：二阶项一定化成了 $u_{y_1y_1}+\ldots+u_{y_{m-1}y_{m-1}}+\mu u_{y_my_m}$,而不必再算。

例：化方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}=0,$$

为标准型，其中，$u=u(x_1,x_2)$ 。

解：　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，　要找非奇异矩阵$\mathbf{B}$ 使得

$$\mathbf{BAB}^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\equiv \mathbf{F}$$

由线性代数的知识，这等价于二次型 $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 在变换 $\mathbf{x}=\mathbf{B}^T\mathbf{z}$ 下化为

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{z}^T\mathbf{BAB}^T\mathbf{z}=\mathbf{z}^T\mathbf{Fz}=z_1^2+\mu z_2^2$$

即： $$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=z_1^2+\mu z_2^2$$

或： $$\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2=z_1^2+\mu z_2^2$$

所以， $z_1=x_1+\dfrac{x_2}{2}$， $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2$， μ=1。

即： $$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\mathbf{z}$$

因为 $\mathbf{x}=\mathbf{B}^T\mathbf{z}$， 所以， $$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

于是，原方程的二阶项在变换 $\mathbf{Y}=\mathbf{BX}$ 下化为 $u_{y_1y_1}+u_{y_2y_2}$，

因为原方程只有二阶项，所以原方程化为 $u_{y_1y_1}+u_{y_2y_2}=0$。

原方程为椭圆型方程。

注： 若方程还有低阶，则还要进一步计算。

由 $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$

得： $$\nabla_x u = \mathbf{B}^T \nabla_y u \,,$$

即： $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

由上式算出 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, 再代入低阶项计算即可。

作　业

- Page 254, 3 (1)。

§2.二个自变量的方程的化简

本节讨论方程：

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),(x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2,$$

一、二个自变量二阶线性偏微分方程的特征线

(1).特征线定义

定义2.1 称二维平面上的曲线 $L=\left\{(x,y)\middle|\varphi(x,y)=0\right\}$ 为方程(1)的特征线，如果在曲线 L 上的每一点成立

$$a_{11}(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a_{22}(x,y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{2}$$

(2).特征线求法

对于特征线 $\varphi(x,y)=0$ 确定的隐函数求导得

$$\varphi_x(x,y)dx+\varphi_y(x,y)dy=0,$$

代入特征线方程(2)得

$$a_{11}(x,y)\left(dy\right)^2-2a_{12}(x,y)dxdy+a_{22}(x,y)\left(dx\right)^2=0,$$

当$a_{11}(x,y)\neq 0$ 时可得：

$$a_{11}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}(x,y)\frac{dy}{dx}+a_{22}(x,y)=0, \tag{3}$$

为关于 $\dfrac{dy}{dx}$ 的二次方程，解方程得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{4}$$

记 $\Delta\equiv a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}$, 这时有三种可能：

1° 在点 (x_0, y_0) 的近旁 $\Delta > 0$,由于

$$\Delta \equiv {a_{12}}^2 - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda_1\lambda_2 > 0$$

即方程的二阶项系数矩阵的二个特征值异号，方程为双曲型。此时(4)的右端取相异的实值，解对应的常微分方程可得两族不同的实特征线，将它们表示为

$$\varphi_1(x, y) = C,$$

$$\varphi_2(x, y) = C.$$

2° 在点(x_0, y_0)的近旁 $\Delta \equiv 0$, 并且 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不全为0，方程为抛物型， (4)的右端取唯一的实值，解对应的常微分方程可得一族实特征线，将其表示为

$$\varphi_1(x, y) = C,$$

3° 在点 (x_0, y_0) 的近旁 $\Delta < 0$, 此时，方程为椭圆型，不存在实的特征线。

总结：二阶线性偏微分方程

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y)$$

1，判断类型： $\Delta(x,y)\equiv a_{12}^2(x,y)-a_{11}(x,y)a_{22}(x,y),$

$\Delta(x,y)>0,$ 在该点有两条特征线通过，方程为双曲型；

$\Delta(x,y)=0,$ 在该点有一条特征线通过，方程为抛物型；

$\Delta(x,y)<0,$ 在该点没有实特征线通过，方程为椭圆型。

注：1，两个变量的方程只有这三种类型。

2，讨论过一点的特征线，要在这点的一个邻域内讨论，否则没有意义。

2，特征线的求法：

特征线 $y = y(x)$ 满足常微分方程：

$$a_{11}(x,y)\left(dy\right)^2 - 2a_{12}(x,y)dxdy + a_{22}(x,y)\left(dx\right)^2 = 0,$$

即：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (a_{11} \neq 0)$$

或

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}, \quad (a_{22} \neq 0)$$

或 $x =$ 常数， $y =$ 常数， $(a_{11} = a_{22} = 0,\ a_{12} \neq 0)$

3，三类方程名称的由来。

考虑下述代数方程：

$$(*)\qquad a_{11}(x,y)X^2+2a_{12}(x,y)XY+a_{22}(x,y)Y^2=0,$$

其中 (x,y) 固定。

如果 $(*)$ 是 X,Y 平面上的椭圆，则偏微分方程为椭圆型；

如果 $(*)$ 是 X,Y 平面上的抛物线，则偏微分方程为抛物型；

如果 $(*)$ 是 X,Y 平面上的双曲线，则偏微分方程为双曲型；

因此, $(*)$ 称为相应的偏微分方程的特征方程。

注：上面讲的双曲线和抛物线包括退化的情况。

二、二个自变量二阶线性偏微分方程的化简

(1)在点 (x_0, y_0) 的近旁 $\Delta > 0$, 此时方程(1)为双曲型，它有二族不同的实特征线：

$$\varphi(x, y) = C,$$

$$\psi(x, y) = C.$$

我们引入新的自变量 ξ, η:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \tag{5}$$

由于特征线满足

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x(x, y)}{\psi_y(x, y)},$$

它们为二次代数方程

$$a_{11}(x, y)\lambda^2 - 2a_{12}(x, y)\lambda + a_{22}(x, y) = 0,$$

的二个不同实根，因此有

$$-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)} \neq -\frac{\psi_x(x,y)}{\psi_y(x,y)},$$

即：

$$J = -\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y) \\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y) \end{vmatrix} \neq 0$$

因此，变换(5)是可逆的。求导得

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$

代入方程，经整理得：

$$b_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + c_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + c_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + du = f,$$

其中

$$b_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2,$$

$$b_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$b_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2,$$

由特征线的定义知：

$$b_{11} = b_{22} = 0,$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\Delta^* &\equiv b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = b_{12}^2 \\
&= a_{12}^2\xi_y^2\eta_x^2 - a_{11}a_{22}\left(\xi_y\eta_x\right)^2 - 2a_{12}^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + 2a_{11}a_{22}\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y \\
&\quad + a_{12}^2\xi_x^2\eta_y^2 - a_{11}a_{22}\left(\xi_x\eta_y\right)^2 \\
&= \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y\right)^2 = \Delta \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}^2 > 0,
\end{aligned}$$

方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\alpha(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}+\upsilon(\xi,\eta)u=\tilde{f}(\xi,\eta), \qquad (6)$$

再令

$$\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}(s+t),\\ \eta=\frac{1}{2}(s-t),\end{cases}$$

方程可化为：

$$u_{tt}-u_{ss}+\overline{b}_1 u_t+\overline{b}_2 u_s+\overline{c}u=\overline{f}(s,t). \qquad (7)$$

(2)在点 (x_0, y_0) 的近旁 $\Delta = 0$, 此时方程(1)为抛物型，它只有一族实特征线：

$$\varphi(x, y) = C,$$

任选函数 $\psi(x, y)$ 满足：

$$J = -\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x(x, y) & \varphi_y(x, y) \\ \psi_x(x, y) & \psi_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0,$$

我们引入新的自变量 ξ, η：

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$$

同样求导、代入方程并经整理得：

$$b_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + c_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + c_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + du = f,$$

类似可得

$$b_{11} = 0,$$

同时注意到

$$b_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$=a_{11}\xi_x\eta_x+\sqrt{a_{11}a_{22}}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_y+\sqrt{a_{22}}\eta_x\right)=0,$$

于是方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+c_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+du=\tilde{f}(\xi,\eta), \tag{8}$$

又注意到函数 $v=ue^{a(\xi,\eta)}$ 的二阶导数为

$$v_{\eta\eta}=u_{\eta\eta}e^{a(\xi,\eta)}+2a_\eta u_\eta e^{a(\xi,\eta)}+a_\eta^2 ue^{a(\xi,\eta)},$$

取

$$2a_\eta(\xi,\eta)=c_2(\xi,\eta),$$

即

$$a(\xi,\eta)=\tfrac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}c_2(\xi,s)ds,$$

方程(8)两边同乘以

$$e^{\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} c_2(\xi,s)ds},$$

令

$$v = ue^{\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} c_2(\xi,s)ds},$$

方程(8)进一步可化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + dv = \overline{f}(\xi,\eta).$$

(3)在点 (x_0, y_0) 的近旁 $\Delta < 0$, 此时方程(1)为椭圆型，它不存在实特征线，但方程(4)的通积分只能是复函数，可设为

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C,$$

其中 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 均为实函数，则 $z = \Phi(x, y)$ 满足

$$a_{11}\Phi_x^2 + 2a_{12}\Phi_x\Phi_y + a_{22}\Phi_y^2 = 0. \tag{9}$$

同样引入新的自变量 ξ, η：

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$$

则 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$为函数无关的。事实上，由(9)可得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}}{a_{11}},$$

从而得：

$$a_{11}\Phi_x = -\left(a_{12} \pm i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}\right)\Phi_y,$$

将实部与虚部分开得：

$$\begin{aligned} a_{11}\varphi_x &= -a_{12}\varphi_y + \sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}\,\psi_y, \\ a_{11}\psi_x &= -a_{12}\psi_y - \sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}\,\varphi_y, \end{aligned} \tag{10}$$

因此

$$J = -\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y) \\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{-a_{12}\varphi_y + \sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}\,\psi_y}{a_{11}} & \varphi_y \\ \dfrac{-a_{12}\psi_y - \sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}\,\varphi_y}{a_{11}} & \psi_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}}{a_{11}} \begin{vmatrix} \psi_y & \varphi_y \\ -\varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}}{a_{11}}\left(\varphi_y^2 + \psi_y^2\right) \neq 0.$$

同样求导、代入方程并经整理得：

$$b_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+c_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+du= f,$$

将　代入(9)，将实部与虚部分开，类似可得

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=a_{11}\psi_x^2+2a_{12}\psi_x\psi_y+a_{22}\psi_y^2,$$

$$a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y=0.$$

即：

$$b_{11}=b_{22},$$

$$b_{12}=0,$$

因此，方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+c_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+du=\overline{f}(\xi,\eta).$$

利用特征线化方程为标准型总结：

当在某点的一个领域内，方程为三种类型之一时，可按下法将方程在这个领域内化为相应的标准型。

1，双曲型。设两簇特征线为 $\varphi(x,y)=C,\ \psi(x,y)=C.$

作自变量变换 $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y).\end{cases}$

方程化为形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\alpha(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}+\upsilon(\xi,\eta)u=\tilde f(\xi,\eta),$$

再作变换 $\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}(s+t),\\ \eta=\frac{1}{2}(s-t),\end{cases}$

则方程化为标准型： $u_{tt}-u_{ss}+\bar b_1u_t+\bar b_2u_s+\bar c u=\bar f(s,t).$

2，抛物型。设一簇特征线为 $\varphi(x,y)=C,$

任取选取与 $\varphi(x,y)$ 线性无关的函数 $\psi(x,y)$ ，即要求

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y) \\ \psi_x(x,y) & \psi_y(x,y) \end{vmatrix} \neq 0,$$

作自变量变换 $\begin{cases} \xi=\varphi(x,y), \\ \eta=\psi(x,y). \end{cases}$

则方程化为标准型： $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+c_1\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+c_2\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+du=\tilde{f}(\xi,\eta),$

如再作函数变换 $v=ue^{\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} c_2(\xi,s)ds},$

则方程可进一步化简为 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+b_1\dfrac{\partial v}{\partial \xi}+dv=\overline{f}(\xi,\eta).$

2，椭圆型。设两簇虚特征线为 $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=C,$

以其实部和虚部作为新的自变量，即作自变量变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y).\end{cases}$$

则方程化为标准型：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+c_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+du=\overline{f}(\xi,\eta).$$

例题

例1：化方程 $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 为标准型。

解：

$$a_{11}=y,\ a_{12}=0,\ a_{22}=1,$$

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y=\begin{cases}<0, & y>0;\\ >0, & y<0.\end{cases}$$

所以，当 $y>0$ 方程为椭圆型，当 $y<0$ 方程为双曲型。

注意：方程在 x 轴上是抛物型，但我们不能化为标准型，因为在 x 上任意点的任何领域内，都有不属于抛物型的点。

情形1：　$y<0.$

特征线方程为　$y\left(dy\right)^2+\left(dx\right)^2=0,$

所以，$\dfrac{dx}{dy}=\pm\sqrt{-y},$　　解得　$x=\mp\dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}+C,$

写成：　$x\pm\dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=C,$

作自变量变换：

$$\begin{cases}\xi=x+\dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\\ \eta=x-\dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.\end{cases}$$

则：

$$\begin{cases} \xi_x = 1, \\ \xi_y = -\sqrt{-y}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_x = 1, \\ \eta_y = \sqrt{-y}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{-y}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = & -\frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
& +\sqrt{-y}\left[\sqrt{-y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)\right] \\
& +\sqrt{-y}\left[\sqrt{-y}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\right] \\
= & -\frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
& -y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}
$$

代入原方程，得：

$$0 = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$-y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

所以，
$$4y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-\frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

即
$$6(\xi-\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

再令，
$$\begin{cases}\xi = t+s,\\ \eta = t-s.\end{cases}$$
即，
$$\begin{cases}t=\dfrac{\xi+\eta}{2},\\ s=\dfrac{\xi-\eta}{2}.\end{cases}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{\partial s}{\partial \xi}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial s}{\partial \eta}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial s}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right]\end{aligned}$$

所以，原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{4}{3s}\frac{\partial u}{\partial s}.$$

情形 2：　$y>0.$

特征线方程为　$y(dy)^2+(dx)^2=0,$

所以，$\dfrac{dx}{dy}=\pm i\sqrt{y},$　　解得　$x=\pm\dfrac{2i}{3}y^{\frac{3}{2}}+C,$

写成：　$$x\pm\frac{2i}{3}y^{\frac{3}{2}}=C,$$

作自变量变换：

$$\begin{cases}\xi = x, \\ \eta = \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.\end{cases}$$

则：

$$\begin{cases} \xi_x = 1, \\ \xi_y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_x = 0, \\ \eta_y = \sqrt{y}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

代入原方程，得：

$$0 = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

所以，
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

即，原方程化为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

解毕。

例2：化方程 $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 为标准型。

解： $a_{11}=y^2,\ a_{12}=xy,\ a_{22}=x^2,$

所以， $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0.$ 方程为抛物型。

特征线方程为 $y^2\left(dy\right)^2-2xydxdy+x^2\left(dx\right)^2=0,$

即 $\left(ydy-xdx\right)^2=0,$ 解得 $y=Cx,$

不妨设 $x\neq 0,$（$y\neq 0$ 的情况类似，$x=0$、$y=0$ 方程为恒等式）

写成：

$$\frac{y}{x}=C,$$

令 $\xi = \dfrac{y}{x}$, 另取函数 $\eta = y$,

因为,

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0,$$

所以 ξ、η 是线性无关的。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)$$

$$= \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}.$$

代入方程并化简，得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\xi}{\eta^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

解毕。

注：再作函数变换

$$v = u\exp\left(\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\eta^2}d\eta\right) = u\exp\left(-\frac{1}{2\eta}\right)$$

还可将方程化为：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -\frac{\xi}{\eta^3}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{4\eta^4} - \frac{1}{\eta^3}\right)\exp\left(-\frac{1}{2\eta}\right)v.$$

作 业

- Page 254： 1 (1)、(2)、(3)；2。