

网络科学中统一混合理论模型的若干研究进展*

方锦清[†] 李 永

中国原子能科学研究院, 北京 102413

摘 要 复杂网络的理论模型研究一直是网络科学的最重要课题之一. 首先概述网络科学理论发展史上的 3 个里程碑以及有权演化网络的发展概况. 为了全面反映确定性与随机性混合的真实世界的统一性、多样性和复杂性, 使网络理论模型更加接近实际网络的全面特性, 着重评述近年来发展的统一混合网络理论模型的 3 部曲: 和谐混合择优模型、统一混合网络模型和统一混合变速增长网络模型, 总结和评述了混合理论模型 3 部曲的不同特点和相互联系, 揭示了统一混合网络的复杂性与普适性及其错综复杂的转变关系. 最后指出, 该理论在多层次高科技网络等实际网络中的应用前景.

关键词 网络科学, 统一混合网络理论模型 3 部曲, 复杂性, 普适性, 小世界, 无标度

1 引 言

正如美国最有影响的科学家之一 E. O. Wilson 指出^[1]: “今天最大的挑战性, 不仅是细胞生物学和生态学, 而是科学的所有方面, 特别是如何精确地和完全地描述复杂系统. 至少在数学模型方面必须抓住整个系统的关键性质.” 因此, 复杂网络中理论模型的研究成为最富挑战性的问题之一. 网络科学中理论模型的研究一直是最重要的课题之一, 它的发展历史至今经历了 3 个里程碑, 当中每个无一不是从理论模型取得突破的. 第 1 个里程碑当属图论的诞生, 归功于图论之父欧拉的开创性贡献, “图论”最早出现在欧拉 1736 年的论著中, 他首先解决了著名的柯尼斯堡七桥问题和多面体的欧拉定理^[2], 从此开创了“图论”这门新的数学分支^[1], 这就是第 1 代科学家树起网络科学的第 1 个里程碑, 也是拓扑学的“先声”. 因此, 关于哥尼斯堡七桥问题、多面体的欧拉定理、四色问题等成为拓扑学发展史上的著名问题.

第 2 个里程碑是两位匈牙利著名的数学家 Edos(爱多士)和 Renyi, 他们在 20 世纪 50 年代末和 60 年代建立了著名的随机图理论^[3], 用相对简单的随机图来描述网络, 简称 ER 随机图理论, 他

们成功地揭示了随机网络的许多重要性质都是随着网络规模的增大突然涌现的, ER 理论对于网络科学理论的影响长达 40 年之久. 爱多士被誉为 20 世纪的欧拉, 并于 1984 年获得沃尔夫奖. 确实, 用图论的语言和符号精确简洁地描述各种网络, 为数学家和物理学家等提供了描述网络的共同语言和研究平台, 至今仍然是网络科学研究的有力方法之一.

一直到 20 世纪末科学家迎来了网络科学又一次突破性进展, 1998 年首先冲破了 ER 理论的是美国康奈尔 (Cornell) 大学 Watts 和 Strogatz, 他们提出了小世界 (small world, SW) 网络模型及其随后的改进小世界模型^[4~10]. 接着, 1999 年美国圣母 (Notre Dame) 大学 Barabási 与 Albert 提出了一个无标度 (scale-free, SF) 网络模型^[11~14], 发现了复杂网络的无标度性质, 2006 年 Barabási 与 Newmann 及 Watts 共同主编了《网络的结构与动力学》专著^[15], 在国际上产生了广泛的影响, 对网络科学作出了杰出的贡献, 因此, Barabási 于 2006 年获得了美国 von Neumann(冯·纽曼) 计算金奖. 上述小世界效应和无标度特性等发现标志着网络科学发展的第 3 个里程碑, 表明网络无处不在, 并具有普遍的规律, 由此诞生了一门广泛交叉的新

收稿日期: 2008-06-30, 修回日期: 2008-07-10

* 国家自然科学基金重点基金 (70431002), 面上基金 (60874087) 和理论物理专项基金 (10647001) 资助项目

[†] E-mail: fjq96@126.com

兴科学: 网络科学 [6,13,16]. 从自然界到人类社会, 从物理科学到生命科学, 从自然科学到社会科学, 以至技术科学、工程技术等众多领域, 网络科学普遍受到了空前的关注和广泛重视, 具有广泛的应用和发展前景. 关于网络科学发展的 3 个里程碑中 3 个基本网络模型请读者参看本专集陈关荣先生的评述, 本文不再赘述. 第 2 节简要评论有权演化网络模型的研究概况, 第 3 节开始将着重评述近年来发展的网络科学中的统一混合网络理论模型的 3 部曲: 和谐混合择优模型、统一混合网络模型和统一混合变速增长网络模型, 总结统一混合网络模型 3 部曲的理论框架及其特点和有关规律, 及其相互转变的错综复杂关系. 最后简要总结全文的中心思想和理论应用.

2 有权演化网络模型的研究概况

小世界网络模型是确定性圆周连接与长程随机连接的一种典型混合网络模型, 无标度网络 (BA) 模型及其许多改进的模型, 以及许多真实网络的实证研究都表明: 真实世界网络既不是规则网络, 也不是随机网络, 而是一大类确定性与随机性混合的网络, 兼具小世界和无标度两种特性, 具有与规则网络和随机图完全不同的统计特性 [9~15].

Barabási 和 Albert 通过追踪万维网的动态演化过程, 发现了许多复杂网络具有大规模的高度自组织特性, 形成无标度特性的主要机制是网络增长和随机择优连接两条规则, 而且随机择优 (偏好) 是产生无标度特性的最重要的机制. 然而, 随着网络研究的深入, 考察现实世界的许多网络发现: 现实世界中实际网络节点之间相互作用并非相同, 重要性和影响程度各异, 实际网络几乎都是有权网络, 因此, 不仅需要研究无权网络, 而且必须研究加权网络, 才能更好地捕捉和揭示真实网络上动力学特征与拓扑结构之间的联系, 以及权重变化在网络时空动力学特性演化 (或对系统功能) 的重要意义和作用. 许多研究丰富了能够产生无标度特性和小世界效应的物理机制的多样性, 如: 复制、最近邻连接、点强和边权驱动、权重和适应度联合驱动以及多种混合驱动等方式 [17~24], 有权网络模型成为网络科学的一个非常重要的课题和方向, 国内外已经提出了许多有意义的加权网络模型 [17~24]. 我们在表 1 简介和评

述了若干加权网络理论模型的主要特点.

从表 1 可见: 当前有权网络模型主要是广义随机网络模型, 归纳起来, 根据网络节点之间连边概率 p 不同, 有权网络有如下的主要生成方式和基本特点 [16~24,36~39].

(1) 度和点强驱动机制. 边连接按度择优的连接概率为

$$\Pi_{j \rightarrow i} = k_i / \sum_j k_j$$

当 m 条边连接完后, 给节点 j 的每条边赋予权重 ($w_{ij} = w_{ji}$): $w_{ji} = k_i / \sum_{i'} k_{i'}$ 和点强度为 $s_j = \sum_i w_{ij} = 1$. 式中 $|i'|$ 表示新节点 j 所连接的点的集合. 还可以采用不同的边权赋值方式.

(2) 度和适应度联合驱动机制. 在 BA 模型基础上, 提出把节点度和适应度相结合, 每个新节点以 m 条边连接到已存在网络中的节点 i 上, 连接到节点 j 上的概率与 i 的度和适应度 (fitness) 两者成正比

$$\Pi_i = \eta_i k_i / \sum_j \eta_j k_j$$

(3) 权重和适应度联合驱动机制. 与 (2) 类似, 与度择优改为与权重联合.

(4) 点强择优和边权随动态重新分配. 考虑了: (i) 增长性. 新节点将连接 m 个已有节点, 节点 i 被选择的概率为 $\Pi_{n \rightarrow i} = \frac{s_i^w e^{-d_{ni}/R_c}}{\sum_j s_j^w e^{-d_{nj}/R_c}}$, 式中 R_c 是特征距离, d_{ni} 是节点 n 和 i 间的欧氏距离. (ii) 动态边权. 每条新边 (n, i) 被赋予固定权重 w_0 (取 $w_0 = 1$), 新增边将导致改变已有边的权重: $w_{ij} \rightarrow w_{ij} + \delta w_{ij} / s_i^w$.

(5) 点强度驱动和边权逐渐加强机制 (BBV 模型). 可以模拟实际网络系统中相互作用强度的变化. 其演化算法是: 首先, 网络增长时, 新节点 n 与老节点 i 的连接概率与点强择优概率为

$$\Pi_{n \rightarrow i}^{\text{BBV}} = \frac{s_i}{\sum_j s_j} = \frac{s_n s_i}{\sum_j s_n s_j}$$

这里 s_i, s_j 表示相应节点 (i, j) 的强度. 在每时步, 带有 m 条边的新节点 j 加入到网络中, 其中每条边的权重为 w_0 , 每条边根据点强度驱动的方式选择老节点 i 与之相连. 新边 l_{ji} 的加入会导致节点 i 与其邻居 l 之间的边权重重新分配如下

$$w_{il} \rightarrow w_{il} + \Delta w_{il}, \forall l \in \Delta w_{il}, \Delta w_{il} = \delta w_{il} / s_i$$

研究表明: 拓扑特性同时兼有度、点权和边权 3 种幂律分布, 且依赖于权重参数 δ 和 w_0 . 边权幂

律指数 $\gamma_w = 2 + 1/\delta$; 当 δ 很大时, 仍为无标度网络, 当 $\delta \rightarrow \infty$ 时, $\gamma = 2$. 点强与度之间关系为 $s(k) \approx Ak^\beta$, $A \neq \langle w \rangle$, $\beta = 1$, $\gamma = \gamma_s = (4\delta + 3)/(2\delta + 1)$.

表 1 若干加权网络理论模型研究概况一览表

模型特点与网络形成机制	模型主要结果	简 评	文 献
DM 模型: (1) 任给一组节点和边, 从一条权重为 1 的边开始, 每步根据与权重成正比的概率先选择一条边, 使该边的权重增加一个小量 δ ; (2) 一对新节点连接到该边的两个端点上, 新边的权重设为 1. 模型主要依赖于权重高的边.	边权分布、度分布和点强分布都服从幂律分布, 其幂指数分别为 $\gamma_w = 2 + 2/\delta$ 和 $\gamma = \gamma_s = 2 + 1/(\delta + 1)$	得到 3 个幂律分布. 但是无法反映真实网络中具有群聚系数 C 和关联系数 r_c 问题.	[17]
YJBT 模型, 每步新节点 j 加入网络, 新节点具有 $m \leq m_0$ (初始节点数) 条边, 这些边按度择优规则连接到老节点后, 给节点 j 的每条边赋予边权和点强. 可以采用不同的赋权值方式.	度分布和强度分布都为幂律函数, 度幂律 $\gamma = 3$. 点强幂律 γ_s 依赖于 m , 两幂指数不同.	两个幂律分布. 仍存在上述问题.	[18]
BBPV 模型, 在 BA 模型基础上, 提出把节点度和适应度相结合, 每个新节点以 m 条边连接到已存在网络中的节点 i 上, 连接到节点 j 上的概率与 i 的度和适应度 (fitness) 两者成正比.	度分布为不同幂律函数的加权之和, 存在对数的幂律分布, 并与适应度分布的选择有关.	累积度幂律分布与度对数有关. 存在问题同上.	[19]
属于 YJBT 推广模型. 新的连接赋权既受到以随机连接概率 p 的驱动, 又要按节点的适应度以 $1-p$ 的概率赋权连接. 当 $p=1$ 时为 YJBT 模型; 当 $p=0$ 时, 边权的赋值完全由节点的适应度决定.	强度分布为幂律函数, 幂律 γ_s 依赖于 p , 随 p 增加而减小, $p=0$ 时权重分布由适应度决定.	给出点强幂律分布的表达式. 存在问题同上.	[20]
AK 模型, 点强驱动增长模型. 考虑了边权对网络结构演化的影响. 新节点 j 选择一个老节点 i 连接概率正比于节点的强度, 关注节点强度对连接的驱动作用, 即点强度越大的点被连接到的概率越高.	点强分布为有幂律尾的稳定分布, 而与边权分布无关. 当平均度从 1 趋向 $+\infty$ 时, 其扩展模型的点强为幂指数从 3 趋于 2.	点强驱动适合于一些实际网络. 存在问题同上.	[21]
BB 模型, 考虑了点权优先连接机制和边权的动态重新分配. 新增边改变已有边的权重: $w_{ij} \rightarrow w_{ij} + \delta w_{ij}/s_i^w$.	分析了国际航空加权网的统计性质. 点强分布和边权分布都是幂律分布.	适于实现世界中交通加权网. 存在问题同上.	[22]
BBV 模型, 它基于 BB 模型, 提出点强度驱动和边权逐渐加强机制, 模拟实际网络系统中强度的变化. 新加入边导致节点 i 与其邻居 l 之间的边权重新分配. 模型允许在老节点之间连边, 已有的沿着连边的交通流也将随着网络的生长而不断更新.	拓扑特性同时兼有点度、点权和边权的 3 种幂律分布, 且依赖于权重参数 δ 和 w_0 .	具有代表性加权无标度网络. 当 $\delta = 0$ 即 BA 模型.	[23]
TDE 模型. 引进两种机制: 相互影响的拓扑生长和强度耦合同步, 保持拓扑生长规则, 强度大的节点优先连接. 增加老节点之间的连边, 含权择优服从强度耦合动力学更新机制. 边权总增量取平均权值. 带有 m 条边的新节点 n 按 BBV 规则与老节点随机连接.	度分布、边权分布、点强度分布均为幂律分布, 并且群聚系数 C 随 w 的增大而增大, 和度 - 度关联具有异配相称性.	所得网络特性比较接近实际. 但 $w > 1$ 不大符合实际.	[24]

(6) 相互影响的拓扑生长和强度耦合同步机制 (TDE 模型)^[24]. 引进两种机制: 保持拓扑生长规则, 按照点强择优连接; 增加了老节点之间的连边, 含权择优服从强度耦合动力学更新机制

$$w_{ij} \rightarrow \begin{cases} w_{ij} + 1, & \text{以概率 } w_{pij}, \\ w_{ij}, & \text{以概率 } 1 - w_{pij}, \end{cases} \quad w_{pij} = \frac{s_i s_j}{\sum_{a < b} s_a s_b}$$

由此确定权重 w_{ij} 的增量. 若节点 i 与节点 j 不相连, $w_{ij} = 0$. 边权总增量取平均权值. 带有 m 条边的新节点 n 按 BBV 规则与老节点随机连接. 每条新边权重值为 w_0 . 于是得到边权分布、度分布和点强度分布均为幂律分布, 其中点强幂指数为 $\gamma_s = 2 + m/(m + 2\omega)$; 点强与度之关系为 $s(k) \approx k^\beta$, 并且 $\beta > 1$; 群聚系数 C 随 ω 的增大而增大.

(7) 地理位置最 (次) 邻近择优机制, 可谓 “近水楼台先得月”. 类似地, 还可以利用局域信息.

(8) 权重驱动与局域世界规则联合驱动机制.

(9) 拓扑结构与动力学 (或网络功能) 演化相互影响机制.

总之, 在这些驱动机制下, 几乎现有的有权演化网络模型的度分布、点强分布和边权分布都服从幂律分布, 只是它们的幂函数形式和幂指数不同而已. 显然, 有权演化网络的研究揭示了形成多个幂律分布的物理机制及其多样性和复杂性. 把无权网络推进了一步, 更接近实际网络特性.

必须指出: 除了个别模型外, 上述所有有权模型几乎都属于广义随机网络模型. 显然, 这些有权网络模型存在的最主要的一个共同问题是: 它们都只考虑随机性驱动机制, 而且都忽视了确定性驱动 (包括不同确定性择优连接等) 机制, 也就是它们都缺乏实际世界中自然存在的两种混合连接的可能方式. 追究其最主要原因可能与这些理论模型能否求其解析解有密切的关系, 只考虑随机性连接无疑方便于理论推导工作, 可以比较容易地求到理论表达式, 而两种混合情形非常难求解析解. 因此上述这些模型虽然也可以部分反映实际有权网络的主要特性, 但是仍然很不全面, 就是因为这些模型从根本上与自然界和人类社会中普遍存在的随机性和确定性两者是和谐统一的真实世界并不符合所致.

为了刻画具有随机性和确定性两者混合的真实网络的复杂性与多样性, 进一步改进和完善有关网络理论模型, 深入开展混合网络理论模型的研究是很有必要的. 本文下面重点评述复

杂网络的混合理论模型 3 部曲的主要框架及其进展.

3 统一混合网络模型理论的 3 部曲

自然界和人类社会生活在一个既可确定又有随机概率的世界里, 这就是随机性与确定性的统一和谐的世界. 基于这个最基本事实确认: 进一步完善和发展网络的混合理论模型是网络模型研究的最重要方向之一. 随机性与确定性的共存现象普遍存在, 比比皆是, 例如, 每年全国高考招生网、公务员考试网和社会就业 (人才招聘) 网, 等等, 都包含随机性和确定性两种混合择优过程, 以及多种混合方式. 另一种典型表现在由混沌方程为节点组成的复杂动态网络, 随着网络演化, 网络系统随时空发生分岔、阵发和混沌等斑图现象, 就是复杂网络上再次体现出确定性与随机性、有序与无序、简单与复杂的一种典型的和谐统一形式. 不论是物理网络、还是生物网络和技术网络, 概不例外, 只不过确定性和随机性两者的混合程度和采取方式依具体对象不同而已, 它们总是自然地和谐地共存在自组织复杂网络系统之中. 因此, 多种混合和择优方式在自然界和人类社会中具有普遍性和广泛性, 这是理论研究的实际基础和真实背景, 完全符合自然的、社会的、物理的、技术的以及生命的实际网络情况. 许多研究已经发现许多实际网络兼有小世界特性和无标度性质, 即它们的拓扑特性不仅具有小的最短平均路径长度 (average path length, APL), 而且具有大的平均群聚系数 (Average clustering coefficient, ACC). 那么, 为什么许多广义随机网络的理论模型仍然还不足以同时揭示或完全具备实际网络的完全特性呢? Watts 和 Strogatz 提出的小世界模型是在网络大小固定的规则圆周上, 只通过对少数节点进行随机的 “远程连接”, 就可导致从规则到随机之间的转变特性. 于是, 人们又要问: 如果网络是动态增长演化的情形, 那么生长网络的连接方式从随机到规则或从规则到随机相互转变时, 将使演化网络的拓扑特性和动力学行为发生什么样转变? 换句话说, 若采用随机性与确定性连接混合生长和多种混合方式时, 这样的网络模型是否能够得到更符合实际网络的特性? 如此又会揭示和出现什么新的特点和规律? 为了寻求这个问题的答案和相应的解决方法与途径, 为了描述确定性

与随机性的和谐统一的世界以及增长过程的复杂性和多样性, 已经提出和发展了统一的混合网络模型, 形成网络理论模型的 3 部曲, 如图 1 所示, 数值模拟和理论分析揭示了统一混合网络演化模型随多个混合比变化的若干普适特性, 包括同时兼备小世界效应和无标度特性及其他新特点和新现象, 并已经应用于一些现有的无权的和有利的复杂网络演化模型, 确实可以达到更接近于实际网络的特性. 图 1 给出统一混合网络理论模型的 3 部曲的基本思想和理论框架的示意图, 最内

环为和谐统一的混合择优模型 (harmonious unifying hybrid preferential model, HUHPM); 中间环是大统一混合网络模型 (large unifying hybrid network model, LUHNM); 最外环是大统一混合变速增长模型 (large unifying hybrid variable growing model, LUHVGM 或 unifying hybrid network model variable speed growth, UHNMVSG). 在整个理论体系里引进了 4 个混合比, 构成统一混合网络模型的 3 部曲, 其主要思想、理论框架和结果分别在以下各节概述和评论.

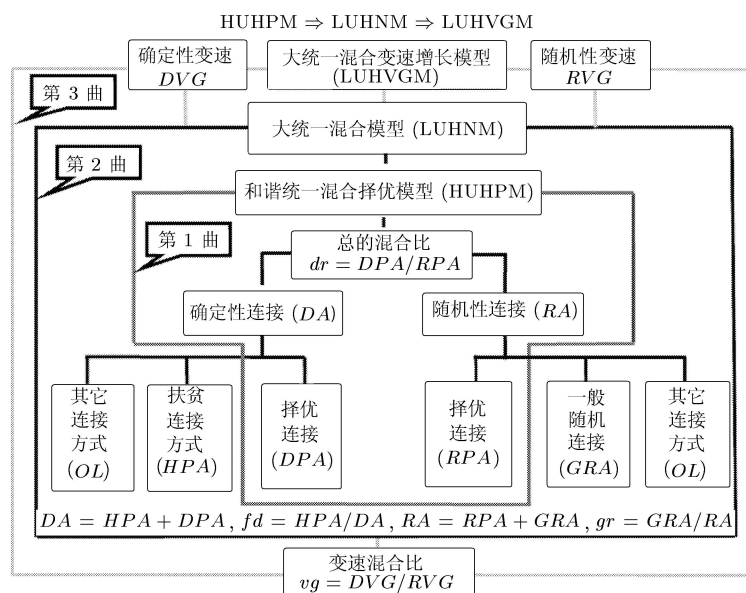


图 1 统一混合网络理论模型的 3 部曲示意图. 最内环 (第 1 曲) 为 HUHPM; 中间环 (第 2 曲) 是 LUHNM; 最外环 (第 3 曲) 是 LUHVGM, 其中 DPA : 确定性择优时间步数; RPA : 随机性择优时间步数; GRA : 为一般随机连接的时步数; HPA : 为确定性扶贫连接的时步数; RA : 为总随机性连接的时步数; DA : 为总确定性连接的时步数.

3.1 第 1 部曲: 和谐统一的混合择优模型^[25~32]

图 1 中最内环示出 HUHPM, 该模型主要是为了克服无权 BA 网络模型^[11] 和表 1 中许多有权网络模型只有“随机性择优”的不足, 中国原子能科学研究院网络科学小组 (CIAE) 在这类网络模型中提出引入“确定性择优”思想, 在复杂网络生长中采用两种混合择优连接, 以改进和完善这一大类的无权和有权网络, 为此, HUHPM 作为混合网络理论模型的第一曲, 其最大特点是只定义一个总混合比 dr

$$dr = \frac{d}{r} = \frac{DA}{RA} \quad (1)$$

这里 d 为总确定性连接的时步数 (determinatic attachment, DA); r 为总随机性连接的时步数 (ran-

dom attachment, RA), d 与 r 范围都为 $\in [0, +\infty]$, 由此确定一个总混合比. HUHPM 表现出具有不同特点的 3 种典型的混合作模式: (i) 如果 $dr \gg 1/1$, 则属于确定性连接占主导情形; (ii) 如果 $dr = 1/1$, 则属于随机性与确定性两种连接相同 (平分秋色, 或势均力敌) 情形; (iii) 如果 $dr \ll 1/1$, 则属于随机性连接占主导情形; (i) 和 (iii) 两种都是不对称混合连接. 在这个混合模型第 1 曲 HUHPM 中, 网络性质和生长所需的规模大小都完全取决于一个总混合比 dr . HUHPM 模型能够较好地描述了规则 (确定性) 和随机网络之间的转变特性, 它原则上适用于任何类型的无权及有权复杂网络模型, 例如已应用于典型的无权 BA (Barabási-albert) 模型、有权 BBV (barrat-barthélemy-vespignani) 模型和有

权 TDE(traffic-driven evolution) 模型(参看表 1), 分别称它们为 HUHPM-BA 网络, HUHPM-BBV 网络和 HUHPM-TDE 网络.

在网络生长演化的过程中总混合比 dr 大小是唯一的参数, 实施随机性择优与确定性连接相结合, 而两者连接的优先次序是完全灵活的, 两者混合交替生长达到所需的比较大网络规模(长时间连接)的最终结果不受影响. HUHPM 实行混合生长网络的主要机制和原则如下:

(1) 增长方式: 对任何无权 and 有权网络模型, 先依它们原来模型的各自生长规则进行生长即可.

(2) 新连接方式: 根据所研究的总混合比 dr , 混合连接的次序先后可以灵活, 从统计意义上说, 最终并不影响统计结果. (i) 对于确定性择优方式: 在每次连接后, 整个网络按照节点度从大到小进行排序: $k_1 > k_2 > \dots > k_m > \dots > k_n$, 然后对 m 个度最大的节点优先连接. (ii) 对于随机性择优方式: 由现有的网络模型中择优规则而定. 这样, 可以把 HUHPM 的思想与方法应用于任何典型模型, 如: 无权 BA 模型、有权 BBV 模型和 TDE 模型, 分别称为 HUHPM-BA 网络, HUHPM-BBV 网络和 HUHPM-TDE 网络, 比原来模型的关键不同点是: 不仅仅有随机择优方式, 而且有确定性择优方式, 即必须是实行两种混合择优连接, 交替进行, 直到生成所需要的网络规模为止. 研究表明: 不同领域的任何已有的复杂网络模型都可在 HUHPM 的框架下进行重新研究, 既能够保持原来模型的特点和规律, 而且还赋予模型新的特性, 使得原有的模型更加符合和谐统一的真实世界. 由于 HUHPM 模型基本抓住真实世界两大类择优连接的混合特点, 所以除了得到与原来模型的主要结果外, 还发现了混合网络的一些普适规律.

第 1 曲 HUHPM 的主要结果概述如下:

(1) HUHPM 的无权 and 有权网络(如 HUHPM-BA、HUHPM-BBV 与 HUHPM-TDE) 中的节点度, 点强和边权 3 种分布都服从幂律分布, 发现所有幂指数 γ 都对总混合比 dr 的变化具有很强的敏感性, 且随 $\log(dr)$ 的增加而增加, $dr = 1/1$ 是一个阈值, 它是拓扑特性的一个转变点(相变点). 在 $dr \leq 1/1$ 时, $\gamma \leq 3$, 这符合随机择优占主导的所有广义随机模型情形; 对于 $dr > 1/1$ 情形, 在 BA 模型和 BBV 模型中, 尽管 δ 不同, γ 按照 $\log(dr)$ 迅速上升; 对于 HUHPM-TDE 模型, 考虑 $w < 1$ 情形是比较符合实际, γ 是随 $\log(dr)$ 迅速增加. 幂指数

γ 与混合比 dr 及权重参数存在复杂的关系, 对于 HUHPM-BA 和 HUHPM-BBV 分别为 [26~28]

$$\gamma_{BA}^{HUHPM} = \frac{1}{\beta} + 1 = A_1 \left/ \exp \left[\left(\frac{dr}{A_2} \right)^{A_3} \right] + A_4 \right. \quad (2)$$

和

$$\gamma_{BA}^{HUHPM} = \left(4\delta + A_1 \left/ \exp \left[\left(\frac{dr}{A_2} \right)^{A_3} \right] + A_4 \right. \right) \left/ (2\delta + 1) \right. \quad (3)$$

同样得到 HUHPM-TDE 网络的 γ 与混合比 dr 及 w 的复杂关系 [26~28]. 上述理论结果与数值模拟结果比较一致. 从上可见: 不论是无权 HUHPM-BA 网络, 还是有权 HUHPM-BBV 网络(包括 HUHPM-TDE 等网络), 它们的幂率指数 γ 与混合比 dr 以及权重参数 (δ, w) 和连接边数 m 之间都存在复杂的指数及参数成反比的复合关系, 并非原来模型中简单的指数关系, 所有公式都与混合比和原来模型的权重参数 $(d/r, \delta, w, \chi)$ 之间相互关联, 说明这种错综复杂的拓扑关系与产生的网络混合方式、结构、模型类型(参数)等紧密相关, 揭示了两种混合择优方式既保持了和谐混合共存, 又体现它们之间的相互作用与竞争的状况. 由于混合连接情形下精确求解在理论上难度很大, 还需要进一步探讨.

(2) HUHPM 网络的小世界特性与其他模型比较, 具有最短平均路径距离 L 和最大的平均群聚系数 C , 这就更加符合许多实际网络的拓扑特性 [27,28]. 由于平均群聚系数 C 随 dr 增加而增加, 混合择优模型具有很高群聚系数, 3 种典型模型的群聚系数随混合比的变化趋势基本一致, 增加混合比有利于网络局部集团化.

(3) 混合择优产生的拓扑结构变化对网络系统的动力学特性有明显的影响 [29]. 当满足网络同步第一判据(类型 I)时 HUHPM 网络动力学同步能力增强了, 而满足网络同步第二判据(类型 II)时 HUHPM 的网络动力学同步能力减小了. 另外 HUHPM 网络的一致性收敛速度随 dr 增加而增加, 而减少了网络到达一致性的最大容忍延迟时间. 这些结果有助于理解和设计实际需要的网络, 以达到所需的动力学特性.

(4) HUHPM 网络中的熵随着 dr 增加而减少, 说明提高总混合比可以增强网络系统的自组织的

有序度^[31,32].

由此可见, 第 1 曲 HUHPM 模型同时进行随机性择优与确定性择优后, 初步理论分析结果与数值模拟结果相一致, 通过调控总混合比可以达到和谐统一, 从物理机制上揭示了适当的随机性与确定性混合择优能够同时产生无标度特性和小世界效应. 上述发现具有应用潜力, 主要有以下 3 方面的应用前景. (1) 由于度分布、点强分布和边权分布幂律指数 γ 对总混合比 dr 的变化具有敏感性, 这一特性与混沌轨道对初始条件的敏感性相类似, 因此只要巧妙设计就有可能被应用作为一种新的加密通信原理和手段, 应用于密码学和保密通信领域. (2) 由于最短平均路径距离小, 而群聚系数高, 并且随混合比 dr 大小而改变, 这样人们就可以根据实际需要和要求来设计和调控网络结构, 以满足实现工程技术上所需要的不同特殊的用途. (3) 上述发现有助于理解生命系统、人类社会和自然界中发生的某些网络特性.

3.2 第 2 部曲: 大统一混合网络模型^[33~40]

应该注意到: 第 1 曲 HUHPM 模型的精确理论分析极具挑战性, 模型还需要进一步完善, 最主要一个不足之处是: 它仅仅考虑两大类的择优连接方式, 还不能完全地反映实际世界网络形成中存在连接方式的多样性和复杂性. 因为不论随机性连接, 还是确定性连接, 只考虑一种“择优”方式, 而不考虑其他的可能连接方式, 这与实际情形不完全符合. 现实世界网络中, 随机性和确定性两大类连接都存在多种混合方式, 比如, 既可“择优”, 又能“扶贫”, 还搞“折中”或求“平衡”、“特殊”照顾等其他多种混合连接方式. 因此, 自然地可把 HUHPM 推广到 LUHPM^[33~36](图 1 中间一环所示), 其特点是: 在总混合比 dr 下分别引入了第 2 层次的二个混合比: 一是随机混合比 gr 定义为

$$gr = \frac{g}{r} = \frac{GRA}{RA} \quad (4)$$

二是确定性混合比 fd 定义为

$$fd = \frac{HPA}{DA} \quad (5)$$

这样, 它们存在的关系为: $DA = HPA + DPA$; $RA = GRA + RPA$, 或 $DA = f + d$, $RA = g + r$. 事实上, 依此类推, 根据实际需要, 随时可灵活增加混合比个数. 因此, 第 2 曲模型形成了具有多个混合比的大统一混合网络模型. 只要 $dr \neq 1/1$,

$fd \neq 1/1$ 和 $gr \neq 1/1$ 任一情形出现, 该模型实际上包括了不对称连接. 第 2 曲中与第 1 曲类似, 存在 3 种不同的典型混合情形, 对于随机性连接: (i) 如果 $gr \gg 1/1$, 则属于随机性连接中一般随机 (等概率) 连接占主导地位; (ii) 如果 $gr = 1/1$, 则属于一般随机连接与随机性择优连接两者平分秋色情形; (iii) 如果 $gr \ll 1/1$, 则属于随机性择优连接占主导地位; 这里 (i) 和 (iii) 两种是随机性择优连接中不对称混合连接. 同样, 对于确定性连接: (i) 如果 $fd \gg 1/1$, 则属于确定性连接中扶贫 (度大的节点与度小的节点) 连接占主导地位; (ii) 如果 $fd = 1/1$, 则属于确定性连接中扶贫与择优连接两者平分秋色情形; (iii) 如果 $fd \ll 1/1$, 则属于确定性连接中确定性择优连接占主导情形; 显然, (i) 和 (iii) 两种情形是确定性连接情形下不对称混合连接. 因此, 第 2 部曲的网络所有特性取决于 3 个混合比 (dr, gr, fd) 及其各种组合形式, 如此形成的复杂网络将产生丰富的多样性和复杂性.

第 2 部曲模型的基本算法与第 1 部曲模型类似, 所不同的是考虑了 3 个混合比 (dr, gr, fd). 当在网络中选择节点与新增节点连接时, 假定被选择的节点 i 与新节点连接的概率为 Πk_i , 即首先按照所需的总混合比 dr 确定节点 i 是随机性连接还是确定性连接, 如果是随机性连接方式, 就以 gr 的比率按照 BA 模型的既定生长方式增长网络, 以 $(1 - gr)$ 的比率按照 ER 连接规则增长网络; 如果是确定性连接方式, 按照度分布从大到小进行排序, 以 fd 的比率按照最大度择优增长网络, 以 $(1 - fd)$ 的比率按照最小度选择增长网络, 总的连接概率为

$$\Pi k_i = \frac{r}{d+r} \frac{(1-gr)k_i + gr}{\sum_j [(1-gr)k_j + gr]} + \frac{d}{d+r} \left[(1-fd) \left\lfloor \frac{k_i}{k_{\max}} \right\rfloor + fd \left\lfloor \frac{k_{\min}}{k_i} \right\rfloor \right] \quad (6)$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整运算.

通过实施把随机性连接与确定性连接相结合的形式, 在经过 t 个时间间隔后, 便形成一个有 $N = m_0 + t$ 个节点, mt 条边的网络. 为了示范, 已经利用式 (1)、(4) 和 (5) 3 种混合比和式 (6) 进行了研究, 结果确实显示了结构及特性的多样性和复杂性, 它可把目前文献上大多数网络模型类型统一在内, 例如其中至少有 8 种特殊情形被关注: (i) $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$: 退化为和谐统一的混合择优模型 (HUHPM); (ii) $fd=0/1$, gr 不限制: 确定

性连接为完全确定性择优连接 (deterministic preferential attachment, DPA), 而随机连接方式可以有不同的匹配情形. (iii) $fd = 1/1, gr$ 不限制: 确定性连接为完全确定性扶贫连接 (helping preferential attachment, HPA); 而随机连接方式可以有不同的匹配情形. (iv) $gr = 1/1, fd$ 不限制: 完全一般随机连接 (general random attachment, GRA), 确定性连接方式可有不同的匹配情形. (v) $gr=0/1$: 完全随机择优连接 (randomness preferential attachment, RPA), 确定性连接方式可以有不同的匹配情形. (vi) $fd=0/0$ 和 $gr = 0/1$: 退化为 BA, BBV 和 TDE 模型等; (vii) $fd=0/0$ 和 $gr = 1/0$: 退化为 ER 随机图模型. (viii) $fd \neq 0$ 和 $gr = 0/0$: 退化为完全确定性模型. 因此, LUHNM 网络的主要理论框架中至少有 3 个混合比可以灵活控制整个网络生长, 当然, 只要实际研究需要, 该模型还可以引进其他混和比. LUHNM 网络可以更细致揭示复杂网络的特性, 除了包括第 1 部曲模型的有关结果外, 还发现了新特性和新现象, 其中度 - 度关联系数 (或相称性系数) r_c (assortative coefficient), 与 dr 的关系值得关注. 图 2 示出度 - 度关联系数 r_c 与 (dr, m)

的三维关系图 (a) 以及在不同 gr 下, r_c 随着总混合比对数 $\log(dr)$ 的变化曲线 (b)(c)^[41], 其中 $fd = 1/1$ 属于完全扶贫情形. 从图 2 看到: 随着总混合比 dr 变化 r_c 变化出现了新特点: 多极值现象.

BA 模型的 r_c 对应图 2 中 $dr=0/1$ 且 $gr=0/1$ 对应的值; ER 模型中的 r_c 对应图 2 中 $dr=0/1$ 且 $gr = 1/1$ 对应的值; HUHPM 模型中的相称性系数变化为图 2 中 $gr=0/0$ 的情形. Newman 曾提出 ER 模型中 r_c 应该为零^[42], 而 Callaway 通过引入一种随机增长模型 ($m=1$) 和静态 ER 随机图进行了比较, 发现该模型有正的度的相关性^[35], r_c 最大值约为 0.35; 在 LUHNM 模型中, 数值模拟显示增长的 ER 模型 r_c 最大值约为 0.2, 同样表明具有正的相关性. 对于不同的 dr , 随着随机性选择方式 gr 的变化, r_c 值变化不是很大. 在多种不同 gr 和 fd 情形, r_c 的变化图错综复杂, 既有线性关系也有非线性关系, 具体取决于 3 个混合比的组合和大小. 表 2 给出一些网络模型中 r_c 的变化范围^[35,41~51]. 目前有关相称性方面的研究大多数集中在实际网络计算 r_c 、建立或改进现有有关模型方面, 通过调控模型参数, 可以单独得到相称

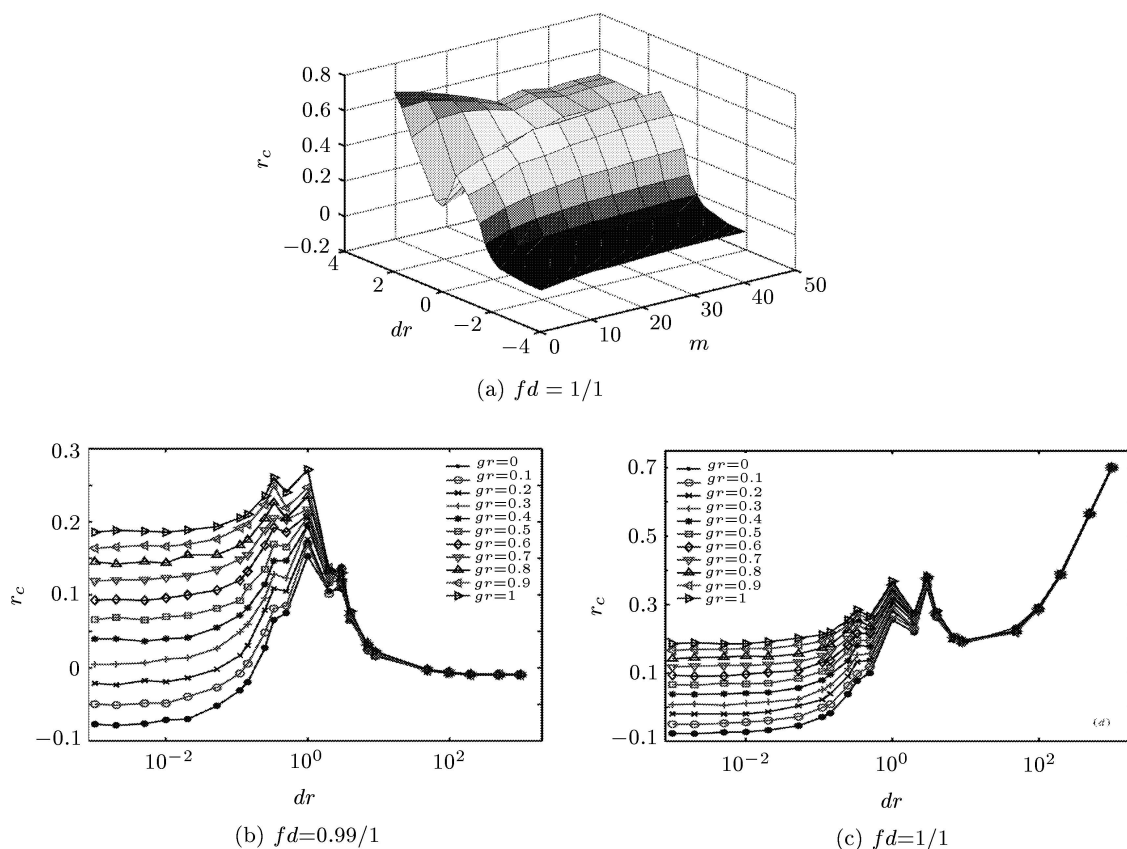


图 2 (a) r_c 与 (dr, m) 的三维关系; (b) (c) 在不同 gr 下, 度 - 度关联系数随着总混合比对数 $\log(dr)$ 的变化^[41]. 固定 $fd = 1/1$ (属于完全扶贫), $m = 3, N = 1000$

网络或异称网络,但是相称性系数 r_c 也只能在 $(0, 1)$ 或 $(-1, 0)$ 之间变化;而第 2 部曲模型通过调控 3 个混合比参数,可使 r_c 在大范围的正负值之间实现转变.另外,也有模型^[41]通过可调的参数在

相称和异称网络之间变化,得到的 r_c 可以在正负一定小范围之间转变,但是我们模型^[33~37] r_c 变化的范围最广,从而网络结构也更为丰富多样,更适用于实际网络.

表 2 各种网络模型中 r_c 的变化范围

r_c 的变化范围	网络模型或模型控制参数	文献
$(-1, 1)$	统一混合模型 (LUHNM), 由 3 个混合比控制	[35]
$[-1, 0]$ 或 $[0, 1]$	一种算法 ¹⁾ , 有一个控制参数	[41]
0	BA 模型、随机 ER 模型	[42]
$[0, 0.5)$	Callaway 提出的一种模型, 有一个控制参数	[43]
异配	自相似无尺度网络	[44]
同配	地震网络	[45]
$(-1, 0]$	交通流驱动模型, 有一个控制参数	[46]
同配	社会模型	[47]
$(-0.6, 0.4)$	相互吸引模型, 两个控制参数	[48]
$(-0.21, 0.41)$	22 个公共运输系统, 观察到随着规模 N 的递增, 出现异配到同配的转变, 转变点约在 $N=500$	[49]
0.495 2	Penna 位串模型, $N = 500$	[50]
同配	cul.arxiv.org 科学家合作网	[51]

¹⁾ 指模型的具体构造方法, 主要思想为“节点更倾向于选择和该节点的度相似的节点进行连接”

在理论模型第 2 部曲 LUHNM 中还发现: 累积度分布随着 3 种混合比的变化可在幂律函数分布和指数分布之间进行转变, 不仅适合于无权网络, 而且适合于有权混合网络, 许多奥秘和变化规律隐藏在混合比的巧妙组合之中. 图 3 和图 4 示出, 有权 LUHNM-BBV 网络中相称性系数 r_c 与 dr 、 gr 或 fd 的三维关系, 其中 fd 和 gr 为固定混合比, 权重参数 $\delta=3$. 从图 3 可见: 在 LUHNM-BBV 网络中同样出现相称性系数 r_c 与无权网络类似的多个波峰现象, 而且曲线关系更为复杂. 在 $dr > 1/1$ 情形,

只要 $fd \geq 0.99/1$ (这个条件比较无权情形更高了), 不管 gr 是什么数值, 都存在相称性系数的极值现象. 特别是, 在相称性系数 r_c 、 fd 和 gr 之间存在非线性关系, 随 dr 的增加使相称性系数 r_c 非线性地从负值转变到正值; 相反地, 在 $gr = 1/1$ 或 $0.8/1$ 占主导时, 相称性系数 r_c 随 dr 的增加非线性地从正向负的减少, 并且在 $dr \geq 1/1$ (确定性为主) 时相称性系数 r_c 与 gr 的非线性变化更大. 当 $dr \leq 1/10$ (随机性为主) 时, 相称性系数 r_c 变小, gr 越大, r_c 变化越小.

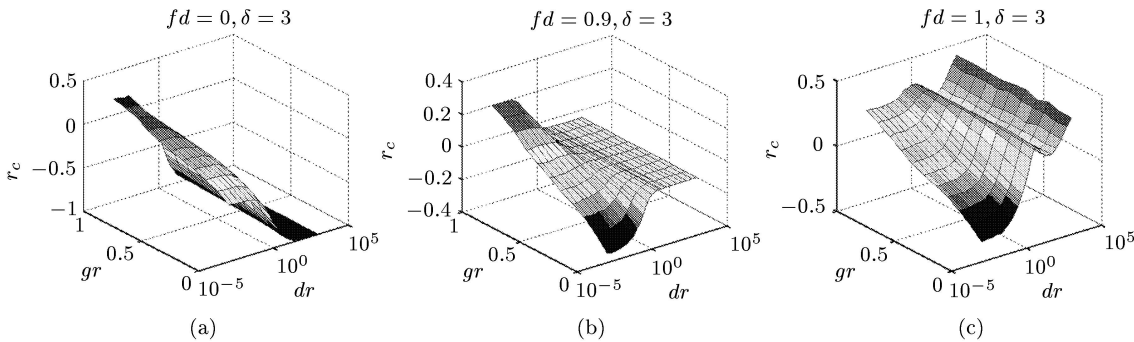


图 3 对于固定 fd 下有权 LUHNM- BBV 网络中 r_c 与 (dr, gr) 的关系

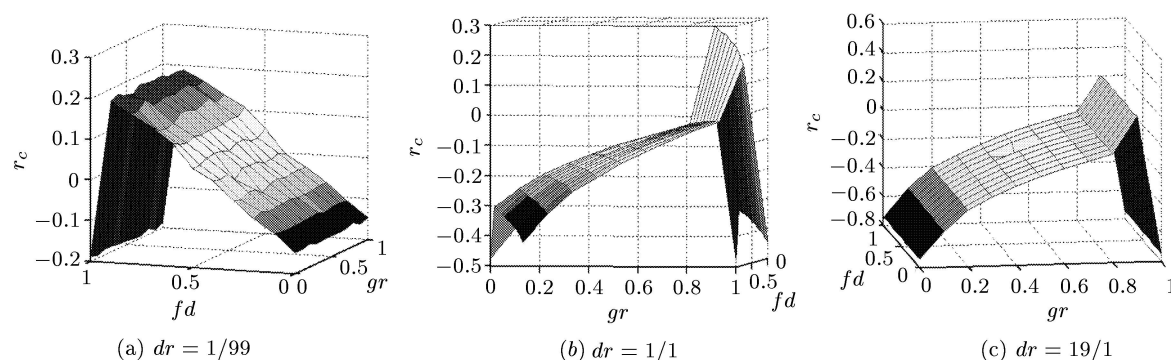


图 4 有权网络在 3 种典型 dr 下相称性系数 r_c 与 f_d 及 g_r 的复杂关系

总之,第 2 部曲确实把目前大多数网络模型和主要连接方式大范围地统一在一起,因为三混合比 (dr, gr, fd) 可根据实际网络需求而确定混合比大小的匹配,所以它比第 1 部曲具有更强的适应性、灵活性和应用性. 3 种混合比组合必然产生丰富多彩的网络拓扑特性、动力学行为和系统功能之间错综复杂的关系,无论无权和有权网络都能通过调控 3 个混合比揭示复杂混合网络的新特点和新现象,度-度关联系数(或相称性系数) r_c 能够在 $(-1, 1)$ 之间的大范围内变化,而且出现多峰现象,说明网络之间的关联在 3 个混合比相空间中有波峰和波谷起伏变化,网络的不同区域关联性不同,具有不均匀性. 利用这个理论结果,可以解释社会网络和技术及生物网络之间的 r_c 出现的差异. 由于人类社会普遍具有“扶贫济困”和“助人为乐”的社会美德和社会责任感,最突出的典型实例是,2008 年 5 月 12 日发生在我国四川汶川抗震中全人类的这种高尚品德,“一人有难,八方支援”和“众志成城,抗震救灾”,不仅在全中国,而且在全世界淋漓尽致地突现出来,全球迅速形成了抗震救灾网. 应用 LUHNM 模型可知,在抗震救灾网中当确定性连接是完全扶贫连接,或扶贫连接占绝对优势 ($fd \geq 90\%$ 以上) 时,正是在这种确定性与随机性混合情况下,网络必然出现了正的 r_c ,而且相称性系数出现多峰(极值)现象. 这表明:抗震救灾网中如汶川、北川、都江堰、唐家山等几个重灾区形成人们最为关注和全力支援的中心,因此出现多峰现象就不足为奇了. 第 2 部曲模型揭示了在 LUHNM-BBV 网络中出现了类似的结果. 至于技术网络,大多数采用强-强联合,所以这样的技术网络自然出现负的相称性系数. 另外,只要

整个国家采取技术扶贫政策,让东部地区的“高端技术”全力支持西部的“低端技术”,这种技术扩散就可改变西部的技术落后状态,这样组成的技术网络也会出现正的相称性系数. 因此,正负的相称性系数转变不论在什么类型网络里都可能发生,这种转变特性密切依赖于 3 个混合比的适当匹配和大小,可以根据需要拓广和增加新的混合比,以满足实际应用.

3.3 第 3 部曲: 统一的变速增长混合模型

再进一步,继续深入分析和比较实际网络,发现在理论模型第二部曲里,仍然还有没有全面反映网络实际增长过程的曲折变化情形,因为许多实际网络,不论是节点增减和边的发展(增长)速度都是不一样的,而且同时随时间和空间变化,如中国四川汶川抗震救灾网每时每刻不断变化,而高技术网络、因特网、人类社会关系网、通讯网等等通常也是随时间空间变化的^[32~54]. 因此,在混合网络理论模型的第 2 部曲的基础上,又发展了第 3 部曲: LUHVS^[55~57], 示于图 1 中最外一环,其最大特点是,在总混合比 dr 及第 2 层次的两个混合比 (fd, gr) 基础上,又引进了变速增长混合比 vg

$$vg = \frac{DVG}{RVG} \quad (7)$$

实际复杂网络存在多种变速增长方式,其中典型的变速方式之一为^[52~57]

$$m(t) = p(N(t))^\alpha \quad (8)$$

这里 $m(t)$ 为 t 时刻被增加的节点连接边数, $N(t)$ 为 t 时刻网络的节点数目, p 是一个概率常数, $p(t)$ 为常数时属于确定性增长,当为随机概率 $0 <$

$p(t) < 1$, 属于随机性增长; α 为变速指数, 依 α 不同值分为正常 ($\alpha = 0$)、加速 ($0 < \alpha < 1$) 和超加速 ($\alpha \geq 1$) 等多种情形. 这样, 第 3 部曲就能够把各种实际网络增长过程中变速的特点仔细描述进去, 这样的增长方式具有多样性, 可在任何情形下对 LUHVGS 网络研究两种: 随机性与确定性变速增长的特性. 例如, 在式 (8) 中当 p 为概率变化时属于随机性增长图象, 而当 p 为常数时则为确定性增长图像. 混合比 vg 体现了两种图像的混合增长, 显然, 第 3 部曲把各种实际网络中存在着变速的特点包含在内, 这使第 3 部曲模型比前两部曲模型理论更趋于完善, 并且已经发现了一些网络特性新的特点和复杂的转变关系.

3.3.1 累积度分布 $P(k)$ 在无标度 SF 和广延指数分布之间的转变

累积度分布 $P(k) = \sum_{k'=k}^{\infty} p(k')$ 是一个重要的拓扑量, 它表示网络中度大小不小于 k 的节点的概率分布, 能够很有效地减少统计涨落的影响, 并揭示出许多隐藏在统计涨落之中的统计规律和本质. 其中 $p(k)$ 表示度分布, k 与 k' 都是节点度的表示形式. 图 3 示出在固定混合比 $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$ 情形下对于 3 种不同增长指数 α 时累积度分布 $P(k)$, 其中 (a) $\alpha=0$ (不考虑变速); (b) $\alpha=0.3$ 和 (c) $\alpha=0.6$, 图中插图分别为对应于幂律指数及广延指数随 k 的变化, 显然 3 种情形各不相同. 当没有变速 ($\alpha=0$) 增长时, 不管 dr 怎么变化, $P(k)$ 分布出现幂律分布: $P(k) \sim k^{-\gamma}$, 即网络出现无标度特性. 如果考虑式 (8) 中变速指数 $\alpha=0.3$ 和 $p(t)$ 为随机概率增长时, 图 5(b) 显示随着 dr 变化出现两种累

积度分布: 既有幂律分布, 又有双广延 (stretched) 指数分布, 分别取决于 3 个混合比和变速方式中概率大小. 广延指数分布定义为 [58]

$$P(k) = e^{-(k/k_0)^c} \quad (9)$$

这里 k_0 是参数, c 称广延指数, 双广延指数分布是指曲线具有两段不同广延指数 c_1 和 c_2 而联系在一起的广延指数分布. 对于广延指数分布当 $c = 1$ 就是通常的指数分布. 当 $c \rightarrow 0$ 时它转变为幂律分布. 对于 $0 < c < 1$ 它介于幂律分布 (无标度, SF) 和广延指数分布 (SED) 之间. 如果 c 比较小, 则它具有比较大的无标度区域, 越接近 SF . 已经发现: 在 α 比较小 ($\alpha=0.3$) 时, 对于 dr 3 种基本模式: 总混合比是确定性占主导 ($dr = 4/1, 49/1$)、两者相当 ($dr = 1/1$) 和随机性混合占主导 ($dr = 1/49, 1/4$), 累积度分布 $P(k)$ 仍然是幂律分布, 这说明小的 α 对具有幂律分布的累积度分布 $P(k)$ 基本上没有什么影响. 但是随着 α 增加 (如 0.6, 0.9), $P(k)$ 却都出现双广延指数分布, 见图 5(b)(c). 图 5 中 3 个插图分别为对应的幂律指数 γ 及广延指数 c 随 dr 变化, 3 种指数随 dr 变化各不相同.

从图 5 可见, γ 随 dr 增加而增加, 广延指数 c 随 dr 增加可出现极值 (最大或最小), 密切依赖于 α 增加; 随 α 变化网络的拓扑特性则可在幂律分布和广延指数分布之间转变, 具体转变类型完全取决于混合比和指数 α 数值或变速增长方式. 并且双广延指数分布的转变点就在 $dr=1/1$. 如果 $fd=0.4/1$ (扶贫比例小) 和 $gr=1/1$ (一般随机性连接占主导), 并采用一般随机连接方式或确定性变速增长下, 仍然出现与图 5 类似的累积度分布.

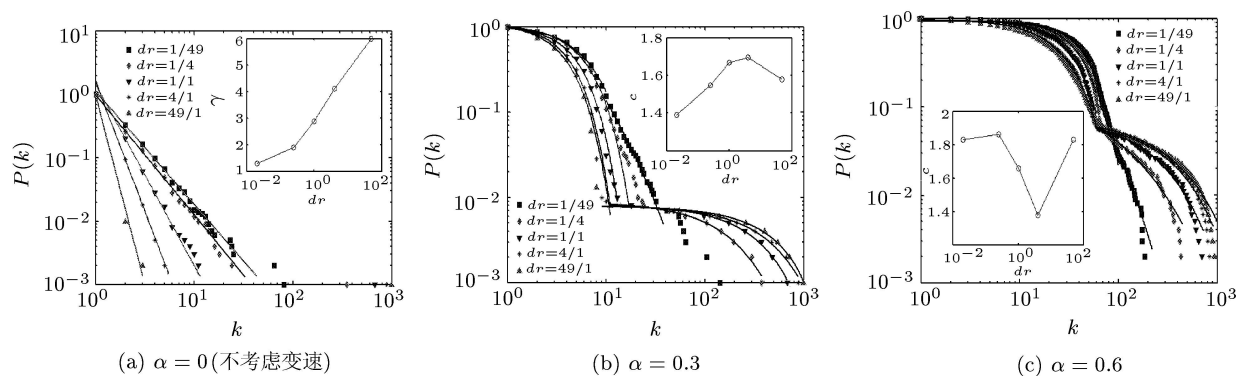


图 5 对于固定 $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$ 情形, 累积度分布 $P(k)$ 与 k . 插图为对应的幂律指数 γ 及广延指数 c 随 dr 变化, 3 种情形各不相同

3.3.2 不同累积度分布 $P(k)$ 转变与混合增长比 v_g 的关系

第 3 部曲中的混合增长比 v_g 是一个对网络特性有重要影响的关键调控参数. 图 6 给出在固定 ($dr=1/1$, $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$) 情形下比较了不同 v_g 下累积度分布 $P(k)$ 的转变特性. 可以发现: 存在另外一种多标度分布之间的转变, 出现另外两种类型分布为广延指数分布和高斯 (Gaussian) 分布, 后者定义为

$$P(x) = y_0 + \frac{A}{w\sqrt{\pi/2}} e^{-2((x-x_c)/w)^2} \quad (10)$$

这里 y_0 , x_c , w 和 A 是高斯分布的参数. 图 6 对于固定 ($dr=1/1$, $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$) 情形下 $P(k)$ 与 v_g 的关系, 插图为第 1 段曲线拟合高斯分布的参数 w 与 v_g 关系. 表 3 列出两种类型分布的参数.

从图 6 和表 3 可见, 在 ($dr = 1/1$, $fd = 0/1$ 和 $gr = 0/1$) 情形下出现新的转变特性. 事实上, 在其他工作模式下有不同的分布特性的转变, 例如

延时高斯分布与广延指数分布以及幂函数分布之间的相互转变, 这些完全取决于 4 个混合比的组合或匹配等. 考察整个第 3 部曲网络模型可知, 凡是在混合比 dr 和 v_g 在 $1/1$ 处或附近, 它们的特性几乎都在这里发生转变现象, 实际上混合比 (dr 和 v_g) 在 $1/1$ 处是一个分布特性转变点.

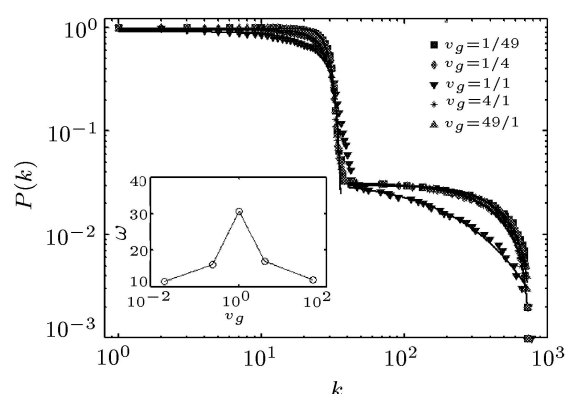


图 6 对于固定 ($dr=1/1$, $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$) 和不同的 v_g 情形下 $P(k)$ 和 k 的关系曲线. 插图为第 1 段曲线拟合高斯分布的参数 w 与 v_g 关系

表 3 图 6 中两种类型分布的参数.

v_g	$dr = 1/1, fd = 0/1, gr = 0/1$, 两段曲线分别拟合结果							
	第 1 段曲线拟合高斯分布的参数				第 2 段曲线拟合高斯分布的参数或广延指数 c			
	y_0	x_c	ω	A	y_0	x_c	ω	A
1/49	0.98	36.67	11.43	-13.72	0.04	2198.40	1945.43	-290.42
1/4	0.94	38.27	16.12	-19.03	0.05	1993.96	2238.00	-267.4
1/1	0.93	45.69	30.66	-35.49			$c = 0.89$	
4/1	0.94	38.76	16.88	-20.13			$c = 2.13$	
49/1	0.98	37.03	11.98	-14.55			$c = 2.51$	

3.3.3 群聚系数 C 与变速指数 α 的关系

第 3 部曲中的群聚系数 C 与变速指数 α 的关系同样出现新特点. 图 7 示出群聚系数 C 与混合比及变速指数 α 之间存在更复杂的三维关系图. 对于混合比: $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$ 双择优连接情形, 群聚系数 C 随着变速指数 α 的增加而增加: 当 $dr \gg 1/1$ (确定性占主导, 图 7(a)) 时, 在 $\alpha=0.3$ 之前 C 上升很快, 而后以非线性变化, 曲线上升到接近于 1; 当 $dr \ll 1/1$ (随机性占主导, 图 7(b)) 时, 随 α 增加, C 是一个凹函数增长, 开始增加比较慢, 后来随 α 增加以非线性迅速增长接近于 1; 当 $dr = 1/1$ (两种平等择优) 时, 随 α 增加, 在 $\alpha \leq 0.3$,

C 首先上升到峰值点, 然后下降到 $\alpha=0.5$ 附近, 出现凹与凸混合变化方式; 但是随着 α 继续增加, C 以非线性单调地上升到 1. 由此可见: 第 3 部曲网络的群聚系数 C 可以在 $[0, 1]$ 之间大范围变化, C 既可以达到很高, 又可以比较小, 完全取决于 3 个混合比和增长指数 α , 整个变化呈现错综复杂的非线性关系.

3.3.4 相称性系数 r_c 与混合比的关系

在第 3 部曲里, 反映网络之间相关特性的相称性系数 r_c 与混合比的关系也有新的特点. 图 8 给出对于 $fd=1/1$ 和 $gr=0/1$ 情形下无权网络中的 r_c 与混合比及变速指数 α 之间的三维关系.

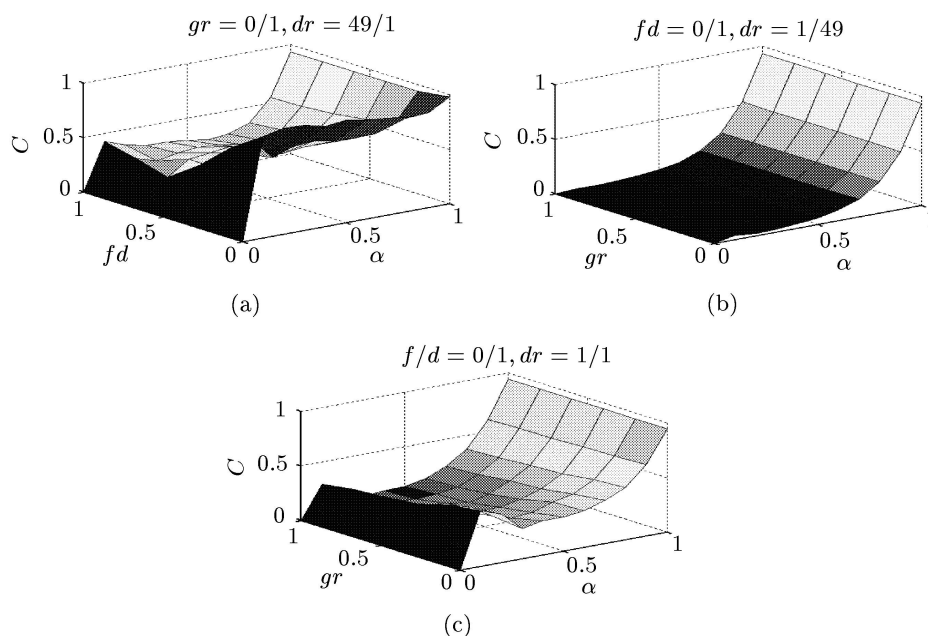


图 7 在对应图 5 相同情形 (固定 $fd=0/1$ 和 $gr=0/1$) 下, 群聚系数 C 与混合比及变速指数 α 之间的复杂关系

采用式 (8) 中确定性增长方式 ($p(t)$ 为常数), 当工作在 $dr \gg 1/1$ 模式时, r_c 出现一个最高波峰对应于 $\alpha = 0.3 \sim 0.4$ 之间, 随着 α 的增加, r_c 变小, 此起彼伏, 变化不剧烈. 而随着 α 的增加 r_c 出现非线性变化, 当工作在 $dr < 1/1$ (随机性占主导) 模式时, 在 $\alpha=0.3$ 之前 r_c 明显上升, 而后稍微下降; 当工作在 $dr \geq 1/1$ (确定性占主导) 模式情形, r_c 一直在上升. 对于式 (8) 中随机性增长方式, 基本结果与图 8 的结果类似.

对于有权统一混合变速增长网络情形, r_c 与混合比关系更加复杂, 即使在一些特殊情形下, 网络特性 r_c 与 4 个混合比 (dr, fd, gr, vg) 之间存在着复杂的非线性关系 (见图 9), 主要有以下几点:

(1) 当混合比 dr 为随机性占主导 ($dr=1/49$) 工作模式时, 网络特性随 vg 变化不明显, 有时趋于常数, 例如, 对于混合比 $fd=0/1$ 和 $gr=1/1$ 情形网络特性就变化不大.

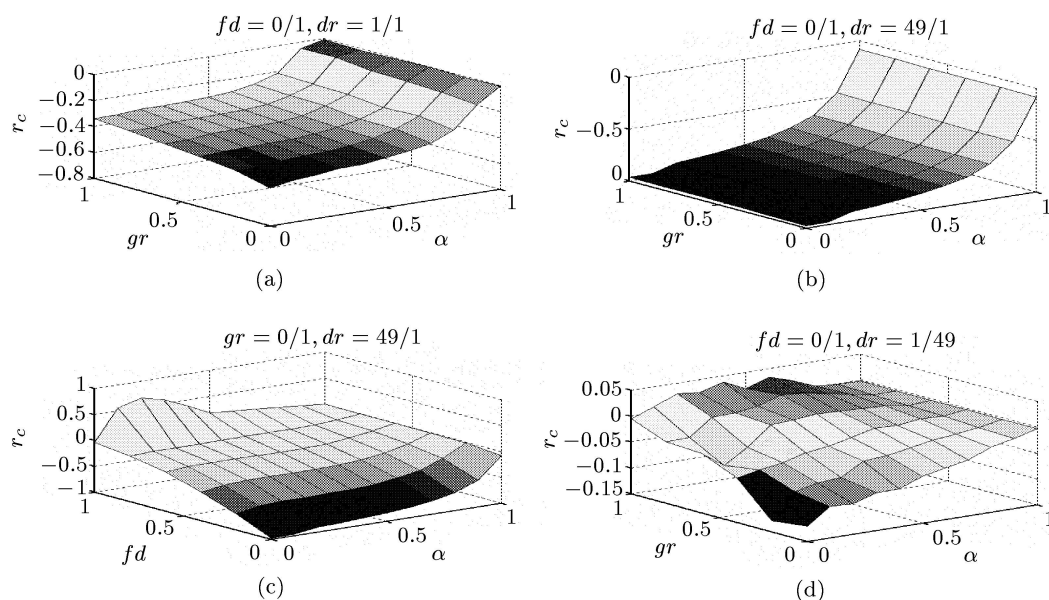


图 8 第 3 曲中对于无权网络, 相称性系数 r_c 与混合比及变速指数 α 之间的三维关系图

(2) 当混合比 dr 确定性占主导 ($dr=49/1$) 工作模式时, 网络特性有显著不同; 例如对于不同的 gr 各种特性数值随 vg 变化都有较大的差别.

(3) 在相同参数下混合比 vg 变化时, vg 接近 $1/1$ 时 r_c 和 C 出现波峰, 即存在极大值;

(4) 随着混合比的变化 r_c 的变化范围较广, 如, 当混合比 $fd < 0.9/1$ 时, 在采用式 (8) 加速形式下

增长网络中 r_c 为负值, 混合比 dr 越大, r_c 越趋于 -1 ; 当 $fd \rightarrow 1/1$ 时, 在式 (8) 加速形式下增长网络中 r_c 绝大部分都为正值, dr 越大, r_c 越大.

总的特点是, 一些拓扑特性随 4 个混合比的变化呈现波峰和波谷起伏交错林立, 完全取决于混合比大小和匹配关系, 其中特性变化的奥秘和规律隐含在许多特殊混合比匹配之中. 许多深层次的规律仍然需要进一步探索.

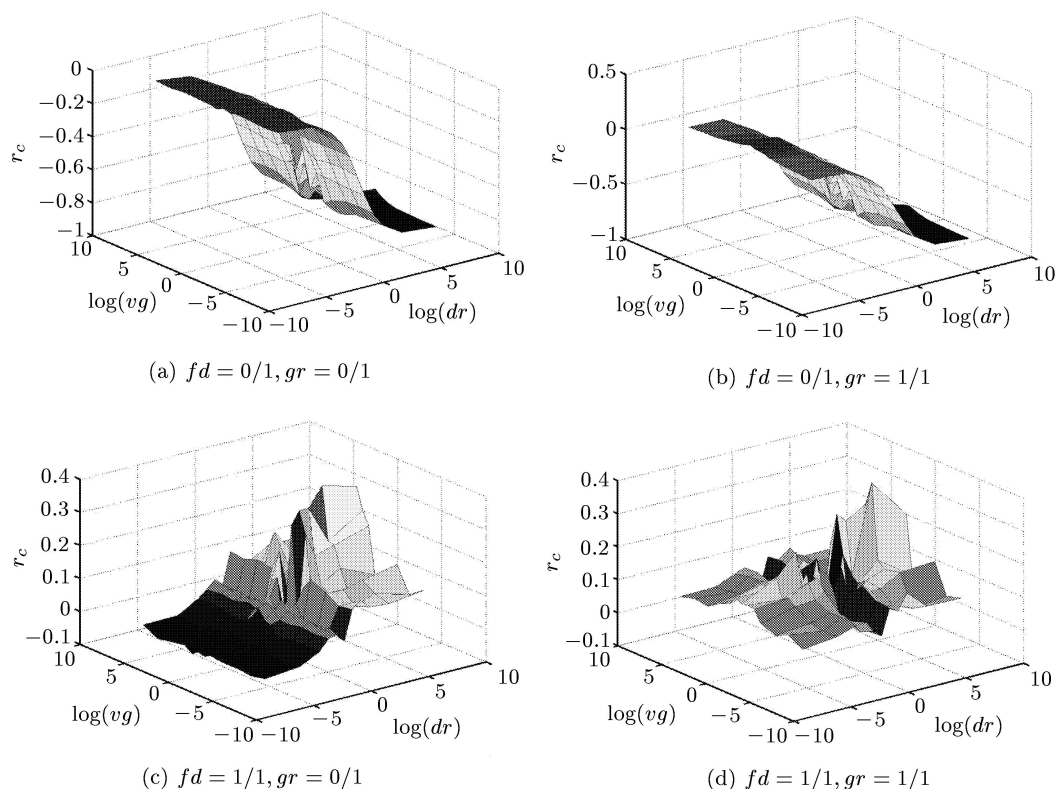


图 9 r_c 随混合比 (dr, fd, gr, vg) 变化的三维图, 其中 $\alpha = 0.5$

4 总 结

综上所述, 网络科学的 3 个基本理论模型标志着 3 个发展里程碑, 有权演化网络取得了不少进展. 在这些研究成果的基础上, 发展了统一混合网络理论模型的 3 部曲, 本文着重分析了混合网络的拓扑特性、相称性系数、群聚系数和小世界性质等, 深刻揭示了混合网络的层次性、复杂性、多样性、普适性与简单性之间的联系. 这些理论在高科技企业网络等社会网络中具有应用潜力^[59~62], 因为高技术企业网络、因特网、通信网络和社会经济网络等就是实际变速增长网络, 如中关村科学园网络每年企业数就是变速增长, 近似为双高斯分布, 其网络的度分布具有无标度特性和小世界效应, 而累积度分布可在幂律分布和广延指数分布

及其他指数分布之间转变. 利用上述理论, 人们可以适当调控 4 个混合比, 从不同角度研究实际网络和设计所需的网络.

对于网络科学发展的 3 大基本模型学术界给予了最高评价, 它们不愧为 3 个里程碑; 有权演化网络是一个继续深入研究的重要方向. 统一混合理论体系的研究得到了国家自然科学基金委的资助^[63], 2008 年《中国科学基金》杂志撰文指出: “在复杂网络模型构建与网络演化机制方面, 我国学者针对现有复杂网络的生成与演化主要是基于随机性连接而发生, 而对确定性连接缺乏考虑的现象, 提出了能够更好地描述从规则到随机之间转变的‘和谐统一的混合择优模型’, 并在此基础上进一步扩展提出‘大统一的混合网络模型’, 由于模型能反映更普遍的实际网络连接的多样性与复杂性,

从而具有重要的学术价值”。该文对我国网络科学的多个课题研究, 诸如: 交通流驱动模型、复杂网络的广义同步模型 (包括集团同步、部分同步、社区网络的同步) 及其同步化能力、群集系统中的同步和属性连接的网络同步、混沌连接网络以及具有小世界和无标度的束流传输网络中的多目标控制与同步等也都作了好评^[63]。我国整个网络科学及其应用取得了喜人的进展及其丰硕成果, 不少成果不仅具有重要的理论价值, 而且具有实际意义和应用潜力。但是, 仍然需要更高更深更出色的研究。

总之, 统一混合网络理论框架提出了 3 部曲模型, 它符合真实世界具有确定性与随机性和谐统一的基本事实, 并抓住了实际网络的一些主要特点, 巧妙地引进了 4 个混合比来统一研究和调控各类网络的拓扑性质、功能和动力学特性, 几乎涵盖了迄今大多数的现有网络模型, 因此, 统一混合网络理论具有较大的普适性, 它既适用于无权网络, 又适用于含权网络, 可以应用于设计实际所需要的网络, 具有应用潜力。

今后, 如何精确求解统一混合理论模型和深入开展复杂网络的各种应用研究, 仍然是两大主要努力方向和极富挑战性课题, 有待国内外学者进一步开拓创新, 更上一层楼。

参考文献

- 1 Wilson E O. Consilience Knopf. New York, 1998. 85
- 2 欧拉 (Leonhard Euler, 1707~1783) 简况见: <http://www2.zzu.edu.cn/math/classes/2003/y1/oula.htm>. 布鲁斯·谢克特著. 我的大脑敞开了——天才数学家保罗·爱多士传奇. 王元, 李文林译. 上海: 译文出版社, 2002
- 3 Erdos P, Renyi A. On the evolution of random graphs. *Publ Math Inst Hung Acad Sci*, 1960, 5: 17~61
- 4 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 1998, 393: 440~442
- 5 Watts D J. Six Degrees: The Science of a Connected Age. New York: W. W. Norton & Company, 2003
- 6 Watts D J. The "new" science of networks. *Annual Review of Sociology*, 2004, 30: 243~270
- 7 Watts D J. Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness. New Jersey: Princeton University Press, 1999
- 8 Newman M E J, Moore C, Watts D J. Mean-field solution of the small-world network model. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 3201~3204
- 9 Newman M E J. Models of the small world. *J Stat Phys*, 2000, 101: 819~841
- 10 Buchanan, Nexus M. Small Worlds and the Groundbreaking Science of Networks. New York: W W Norton and Company, 2002
- 11 Barabási A L, Albert R. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 1999, 286: 509~512
- 12 Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410(8): 268~276
- 13 Barabási A L. The New Science of Networks. Cambridge: Perseus, 2002
- 14 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74: 47~98
- 15 Newman M, Barabási A L, Watts D J. The Structure and Dynamics of Networks. Princeton: Princeton University Press, 2006
- 16 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 2003, 45: 167~256
- 17 Dorogovtsev S, Mendes J. Minimal models of weighted scale-free networks. Arxiv preprint, 2004, cond-mat/0408343
- 18 Yook S H, Jeong H, Barabási A L, Tu Y. Weighted evolving networks. *Phys Rev Lett*, 2001, 86(25): 5835~5838
- 19 Bianconi G, Barabási A L. Competition and multiscaling in evolving networks. *Eur Phys Lett*, 2001, 54: 436~442
- 20 Zheng D, Trimper S, Zheng B, Hui P M. Stochastic weight assignments. *Phys Rev E*, 2003, 67: 040102
- 21 Antal P L, Krapivsky, Weight-driven growing networks. *Phys Rev E*, 2005, 71: 026103
- 22 Barrat A, Barthélemy M, Pastor-Satorras R, et al. The architecture of complex weighted networks. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2004, 101(11): 3747~3752
- 23 Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A A. Weighted evolving networks: Coupling topology and weight dynamics. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 228701
- 24 Wang W X, Wang B H H, Hu B, et al. A weighted complex network model driven by traffic flow. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 188702
- 25 Fang J Q, Liang Y. Topological properties and transition features generated by a new hybrid preferential model. *Chin Phys Lett*, 2005, 22: 2719~2722
- 26 Jin Q F, Qiao B, Yong L. Toward a harmonious unifying hybrid model for any evolving complex networks. *Advances in Complex Systems*, 2007, 10(2): 117~141
- 27 方锦清, 毕桥, 李永等. 复杂动态网络的一种和谐统一的混合择优模型及其普适特性. 中国科学 G 辑, 2007, 3(2): 230~249
- 28 Fang J Q, Bi Q, Li Y, et al. Sensitivity of exponents of three-power-laws to hybrid ratio in weighted HUHPM. *Chi Phys Lett*, 2007, 24(1): 279~282
- 29 Lu X B, Wang X F, Li X, Fang J Q. Topological transition features and synchronizability of a weighted hybrid preferential network. *Physica A*, 2006, 370: 381~389
- 30 Fang J Q, Bi Q, Li Y, et al. A harmonious unifying preferential network model and its universal properties for complex dynamical network. *Science in China Series G*, 2007, 50(3): 379~396
- 31 Li Y, Fang J Q, Bi Q, Liu Q. Entropy characteristic on harmonious unifying hybrid preferential networks. *Entropy*, 2007, 9: 73~82
- 32 Bi Q, Fang J Q. Entropy and HUHPM approach for complex networks. *Physica A*, 2007, 383: 753~762
- 33 Fang J Q, Bi Q, Li Y. From a harmonious unifying hybrid preferential model toward a large unifying hybrid network model. *International Journal of Modern Physics B*, 2007, 21(30): 5121~5142
- 34 Fang J Q, Bi Q, Li Y. Advances in theoretical models of network science. *Front Phys China*, 2007, 1: 109~124
- 35 李永, 方锦清, 刘强. 大统一的混合网络模型中的相称性系数转变新特点. 科技导报, 2007, 25(11): 23~29
- 36 方锦清. 网络科学的理论模型探索及其进展. 科技导报, 2006, 24(12): 67~72
- 37 方锦清. 非线性网络的动力学复杂性研究的若干进展. 自然科学进展, 2007, 17(7): 841~857
- 38 方锦清, 汪小帆, 郑志刚等. 一门崭新的交叉科学——网络科学 (上). 物理学进展, 2007, 27(3): 239~343
- 39 方锦清, 汪小帆, 郑志刚等. 一门崭新的交叉科学——网络科学 (下). 物理学进展, 2007, 27(4): 361~448
- 40 Fang J Q. Theoretical research progress in complexity of complex dynamical networks. *Progress in Nature Science*, 2007, 17(7): 761~774
- 41 Xul vi-brunet R, Sokolov I M. Reshuffling scale-free networks: From random to assortative. *Phys Rev E*, 2004, 70(6): 066102

- 42 Newmanm E J. Assortative mixing in networks. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(20): 208701
- 43 Newmanm M E J, Park J. Why social networks are different from other types of networks. *Phys Rev E*, 2003, 68(3): 036122
- 44 Soon-hyung Y, Filippo R, Hildegard M O. Self-similar scale-free networks and disassortativity. *Phys Rev E*, 2005, 72(4): 045105
- 45 Sumiyoshi A, Norikazu S. Complex earthquake networks: Hierarchical organization and assortative mixing. *Phys Rev E*, 2006, 74(2): 026113
- 46 Wang W X, Wang B H, Hu B, et al. General dynamics of topology and traffic on weighted technological networks. *Phys Rev Lett*, 2005, 94(18): 188702
- 47 Grabowski A, Kosinski R A. Evolution of a social network: The role of cultural diversity. *Phys Rev E*, 2006, 73(1): 016135
- 48 Wang W X, Hu B, Wang B H, et al. Mutual attraction model for both assortative and disassortative weighted networks. *Phys Rev E*, 2006, 73(1): 016133
- 49 Julian S, Janusz A H. Statistical analysis of 22 public transport networks in Poland. *Phys Rev E*, 2005, 72(4): 046127
- 50 Li C G, Philip K M. Complex networks generated by the Penna bit-string model: Emergence of small-world and assortative mixing. *Phys Rev E*, 2005, 72(4): 045102
- 51 Michele C, Guido C, Luciano P. Assortative model for social networks. *Phys Rev E*, 2004, 70(3): 037101
- 52 Mattick J S, Gagen M J. Accelerating networks. *Science*, 2005, 307: 856~858
- 53 Gagen G M, Mattick J S. Accelerating, hyperaccelerating and decelerating probabilistic networks. *Phys Rev E*, 2005, 72: 016123
- 54 Sen P. Accelerated growth in outgoing links in evolving networks: Deterministic versus stochastic picture. *Phys Rev E*, 2004, 69: 046107
- 55 Fang J Q. Evolution features of large unifying hybrid network model with a variable growing speeds. In: The 4th International Workshop Hangzhou 2007 on Simulational Physics, 2007-11-09~12. Hangzhou, Zhejiang, 2007
- 56 Fang J Q. Some progresses in theoretical model of non-linear dynamical complex networks. In: 2008 National Physics Conference, 2008-09-18~10-02, Nanjing, 2008
- 57 Fang J Q, Li Y. Large unified hybrid network model with variable growth. *Chi Phys Lett*, 2008
- 58 Laherère J, Sornette D. Stretched exponential distributions in nature and economy: "fat tail" with characteristic scales. *Eur Phys J B*, 1998, 2: 525~539
- 59 方锦清, 李永, 毕桥. 统一混合变速增长网络模型及其特性转变. 复杂系统与复杂性科学, 2008, 5(4)
- 60 方锦清. 略论复杂网络金字塔及其普适性与复杂性. 见: 第十五届全国凝聚态理论与统计物理学术会议. 合肥, 2008
- 61 方锦清. 试论四大层次的高科技网络的若干特点和思考. 见: 陈关荣, 许晓, 百家鸣编. 复杂网络理论与应用——第三届全国复杂网络学术会议文集. 上海: 上海系统科学出版社. 2008. 1~43
- 62 李永等. 从网络科学视角探索企业合作网络. 见: 第四届全国网络科学论坛文集. 中国高等科学技术中心, 青岛, 2008
- 63 刘作仪. 复杂网络理论及相关管理复杂性研究的资助进展. 中国科学基金, 2008, 1: 13~17

ADVANCES IN UNIFIED HYBRID THEORETICAL MODEL OF NETWORK SCIENCE*

FANG Jinqing[†] LI Yong

China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China

Abstract Theoretical model has been one of the most significant issues in the network sciences. First of all, three milestones in this area are reviewed as breakthroughs in theoretical models, and progress in weighted evolution network model is presented. In order to describe the determinist and randomness of the harmony and unity of the real world and to mirror overall property of the real-world networks, the unified hybrid network theoretical frame, which formed the so-called hybrid network theoretical model trilogy, are reviewed and summarized in the main part of this article: the first of the trilogy is a harmonious unification hybrid preferential model (HUHPM), the second the large unification hybrid network model (LUHNM) and the third the large unified hybrid variable growth model (LUHVGM). Main features and topological properties of the hybrid network trilogy are then summarized, and diversity and complexity of the complex networks are revealed as well as their complicated transition relationship. Possible applications of these theories to actual networks are finally mentioned.

Keywords network science, unified hybrid network theoretical model trilogy, complexity, universality, small-world, scale-free

* The project supported by the National Nature Science Foundation of China (70431002, 60874087) and Grand Theory Physics Special Project of NSFC (10647001)

[†] E-mail: fj96@126.com