南开大学 2012 数学分析考研试题解答

mxcaimaths@163.com

一、解：由 L"Hospital 法则

$$\lim_{x\to\infty} x^3\int_0^{\frac{1}{x}}\sin t^2dt=\lim_{y\to 0} y^{-3}\int_0^{y}\sin t^2dt=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y^2}{3y^2}=\frac{1}{3},$$

于是有

$$\lim_{x\to\infty} x^m\int_0^{\frac{1}{x}}\sin t^2dt=\begin{cases}0, & m<3\\ \frac{1}{3}, & m=3\\ \pm\infty, & m>3\end{cases}.$$

二、解：由对称性得

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\sqrt{\left|y-x^2\right|}dxdy=2\iint_{[0,1]\times[0,1]}\sqrt{\left|y-x^2\right|}dxdy=2\int_0^1dx\int_0^1\sqrt{\left|y-x^2\right|}dy\\&=2\int_0^1\left[\frac{2}{3}\left(y-x^2\right)\sqrt{\left|y-x^2\right|}\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]dx=\frac{4}{3}\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}+x^3\right]dx\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\sin\theta+\frac{4}{3}\int_0^1x^3dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3\pi+4}{12}\end{aligned}$$

三、解：由对称性，并用标准极坐标代换

$$\begin{aligned}I&=\iint_S x^2dydz+zdxdy=\iint_S zdxdy=-\iint_{x^2+y^2\le ay}\left(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy\\&=\iint_{r\le a\sin\theta}r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta-a\iint_{x^2+y^2\le ay}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sin\theta}r\sqrt{a^2-r^2}dr-a\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\\&=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^3\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}a^3=\frac{\pi}{12}a^3-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3\cdot 1}a^3=\frac{3\pi-16}{36}a^3\end{aligned}$$

四、解：由 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in[-1,1)$，用 Abel 第二定理，逐项积分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x),x\in[-1,1),$$

分拆求和项，并用 Abel 第二定理得

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^{n+1}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-2x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x\\&=x+(1-2x)\ln(1-x),\ x\in[-1,1)\end{aligned}$$

令 $x=-1$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{n(n+1)}=S(-1)=3\ln 2-1.$$

五、解：由比较判别法，Weierstrass 判别法，及一致收敛的连续性定理

$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 在 $p \ge 2$ 发散，在 $p < 2$ 收敛，在 $p < 2$ 内闭一致收敛但非一致收敛；

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 在 $p \le 1$ 发散，在 $p > 1$ 收敛，在 $p > 1$ 内闭一致收敛但非一致收敛.

因此，$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 在 $p \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ 发散，在 $p \in (1,2)$ 收敛、内闭一致收敛、非一致收敛.

六、解：$f(x) = \sin x^2 \notin C_u(-\infty, +\infty)$. 事实上，令 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \pi/2}}$，则

$$|x_1 - x_2| \le \frac{1}{4n\sqrt{2n\pi}} \to 0(n \to \infty), |f(x_1) - f(x_2)| = 1.$$

七、证明：令 $F(x) = f^2(x) f(1-x)$，则 $F(0) = F(1) = 0$，由 Rolle 中值定理

$$\exists \xi \in (0,1), s.t. F'(\xi) = f(\xi)\left[2f'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi)\right] = 0$$

已知 $f(x) \ne 0, \forall x \in (0,1)$，故

$$2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

八、、证明：由 $0 \le f(x) \in C[a,b], 0 < g(x) \in C[a,b]$，设

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0), N = \min_{x \in [a,b]} g(x),$$

只考虑 $M > 0$ 的情形，有

$$\left(\int_a^b g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \le M\left(\int_a^b g(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} \quad ①$$

由 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in [a,b]$ 连续，有

$$\forall 0 < \varepsilon < M, \exists 0 < \delta < \frac{b-a}{2}, s.t.\ f(x) \ge M - \varepsilon, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b],$$

注意区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ 的长度

$$|(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]| \ge \min\{b - (x_0 - \delta), (x_0 + \delta) - a, 2\delta\} \ge \delta,$$

从而有

$$\left(\int_a^b g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(\int_{(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a,b]} g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \ge (M - \varepsilon)N^{\frac{1}{n}}\delta^{\frac{1}{n}} \quad ②$$

在①②式中，令 $n \to \infty$ 得

$$M - \varepsilon \le \underline{\lim}_{n \to +\infty}\left(\int_a^b g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \overline{\lim}_{n \to +\infty}\left(\int_a^b g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \le M,$$

令 $\varepsilon \to 0+$，即得

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\int_a^b g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

九、证明：对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x| < \delta$，有 $\left|\dfrac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，于是

$$\left| f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right| < \frac{|x|}{2^n} \cdot \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq 0$$

求和得

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| < |x| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < |x|\varepsilon$$

结合条件 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，令 $n \to \infty$ 得

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon, \forall 0 < |x| < \delta,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.