《量子场论》零散材料 和部分课程笔记

天津大学理学院物理系

教师：戴伍圣

笔记整理、材料准备、讲稿打印：陈玉柱、李莎、李世霖、李文都、刘坦
许利芳、周驰春

说明：这不是《量子场论》课讲义。这里只是将部分讲义草稿、零散材料和一些课堂笔记简单地汇集在一起，供同学们课后参考。

v2.01

2013 年 3 月 29 日

目录

第一部分　相对论量子力学？经典场？量子场!

第二部分 经典场

第一部分

相对论量子力学？经典场？量子场!

第一章　这是些什么方程？

我们的基本思路是由尽可能少的假设出发得到尽可能多的结论。我们的第一出发点就是相对论，无论是经典理论还是量子理论都要恪守相对论这一原则；我们的第二个假设就是量子的假设。

在物理中我们要回答一些基本问题：比如世界上有哪些粒子。对这个问题的回答最初是从实验上唯象地回答的。每看到一个新粒子就记下这个新粒子作为对这个问题的回答。但这种回答问题方式的问题在于，首先是有些靠运气，此外我们不能说清除了这些粒子外还有没有其它粒子。也就是说这种方式可以在某种程度上回答存在性的问题，但永远也回答不了唯一性的问题。

我们现在希望做的是不用这种最初等的唯象方式来回答这个问题。人们已经从一大堆唯象的结果总结出牛顿力学和电磁学。这两个基本理论的矛盾导致了相对论。相对论现在已经是我们的第一原理。相对论不能回答所有问题，但相对论确实可以将粒子的种类划到一个很小的范围。

前面我们由纯粹的相对论出发（借助了群论这样的数学工具，这就像我们回答力学问题要借助常微分方程的数学理论一样），对世界上粒子的种类做出了如下的限制：只能有自旋为$0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\cdots$的粒子。当然还不能回答这样的问题：比如，自旋为1的粒子有多少种。由相对论出发我们还得到了所有可能的，对应这些自旋的方程。

在由相对论得到这些方程时我们其实并没有回答所得到的这些方程究竟是什么方程，或者说我们没有解释这些方程中的量的物理意义是什么。我们是这样做的：一个量，比如，$\phi\left(x\right)$，考虑它的一个Lorentz变换$\phi\left(x\right)\rightarrow\phi'\left(x'\right)$，要求这个量满足的方程必须是Lorentz协变的，问符合这一要求的方程能采取什么样的形式。而$\phi\left(x\right)$是什么，并没有说明。这就是说，由相对论的要求我们得到了一系列作为时空坐标函数的Lorentz标量$\phi\left(x\right)$，旋量$\psi\left(x\right)$，矢量$\phi^{\mu}\left(x\right)$，张量$\phi^{\mu\nu}\left(x\right)$满足的方程。但并不清楚$\phi\left(x\right)$，$\psi\left(x\right)$，$\phi^{\mu}\left(x\right)$和$\phi^{\mu\nu}\left(x\right)$是什么。

第二章　将方程作为波动方程的尝试

我们可以做各种可能的尝试。有了量子力学的经验（这是Schrödinger教给我们的），我们的一个直接的选择是将这些方程理解为量子力学的相对论性波动方程。也就是说将这些量理解为波函数。但是这个尝试只取得了非常有限的成功。

2.1　波动方程解释破坏因果律

一个自然的尝试是将前面由相对论出发得到的方程解释成相对论波动方程。如果我们将所得到的相对论方程解释成单粒子的相对论波动方程，那么$\phi(x)$，$\psi(x)$等就是波函数，它们的模平方就是几率。在做了相对论波动方程这个解释后，我们相当于将力学量换成算符，即做下面的代换

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{p} \to -i\nabla. \tag{2.1}$$

这个解释是否成功要看方程的解能否给出合理的结果。

这个方程的Lorentz协变性是完全不用再检验了。因为这些方程就是在Lorentz协变性的前提下得到的，因此肯定是协变的。除非加入了新的假设，如量子化条件，我们不需要再去检验协变性。

但是仅有协变性其实是不够的，原则上，一个出生时就超光速的系统也可以是Lorentz协变的。为此我们必须附加新的条件：

不能超光速

这本来不是相对论的本来要求，相对论其实只要求光速不变。不能超光速另外的条件。这个要求还是非常合理的，相对论禁止有低于光速通过加速达到超光速。而我们的初始状态都是在低于光速的状态，这样相对论就禁止了超光速。

在量子力学的框架下检验是否超光速具体讲就是看类空传播的几率是不是零。

2.1.1　标量方程(Klein-Gordon)方程：解法一

下面我们首先考虑标量方程Klein-Gordon方程：

$$\left(\partial^2+m^2\right)\phi\left(x\right)=0. \tag{2.2}$$

我们现在将这个方程理解为相对论量子力学的自由粒子波动方程，自然$|\phi\left(x\right)|^2$就是几率。

我们将因果律作为相对论之后的第二个假设引入，为此我们在这里检验相对论量子力学的解释是否破坏因果律。因果律是一个时间演化上的概念。需要看的是结果在时间上是不是出现在原因之前。因此我们考虑一个由Klein-Gordon方程作为相对论波动方程决定的自由粒子的时间演化。

考虑一个粒子在$t_0=0$时刻处在$\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$点，即

$$\phi\left(\mathbf{x}_0,t_0\right)=\delta^3\left(\mathbf{x}_0\right)\delta\left(t_0\right). \tag{2.3}$$

我们要计算的是粒子在t时刻出现在$\mathbf{x}$点的几率。我们这里完全直观，当然也是不严格地，给出$\phi\left(\mathbf{x},t\right)$随时间的演化。这里我们将Huygens原理形式地推广到四维（不一定对）：

$$\phi\left(\mathbf{x},t\right)=i\int d^4x_0G\left(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0\right)\phi\left(\mathbf{x}_0,t_0\right). \tag{2.4}$$

Huygens原理的意思是波前的每个点都将成为新的点波源。由这些点波源引起的波动在下一时刻叠加，形成新的波前（可见，初始的波前形状，即初条件，决定着后来的发展）。这些点波源的引起的波动当然是最容易计算的（就是方程的基本解）。将(2.3)代入(2.4)得

$$\begin{aligned}\phi\left(\mathbf{x},t\right)&=i\int d^4x_0G\left(\mathbf{x},t;x_0,t_0\right)\delta^3\left(\mathbf{x}_0\right)\delta\left(t_0\right)\\&=iG\left(\mathbf{x},t;0,0\right).\end{aligned} \tag{2.5}$$

这样我们只需求出方程的基本解，也就是Green函数，就可以了。格林函数$G\left(\mathbf{x},t;x_0,t_0\right)$满足的方程是

$$\left(\partial^2+m^2\right)G\left(\mathbf{x},t;x_0,t_0\right)=-\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)\delta\left(t-t_0\right).$$

在我们的问题中

$$\left(\partial^2+m^2\right)G\left(\mathbf{x},t;0,0\right)=-\delta^3\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(t\right).$$

简单表示成

$$\left(\partial^2+m^2\right)G\left(x\right)=-\delta^4\left(x\right). \tag{2.6}$$

注意，这里我们有一点做得不好，由于我们现在将这个方程解释成相对论量子力学的波动方程。这是一种单粒子图像。只能分别讨论正能和负能情况。对正能情况，对能量E的积分只能在0到∞积分，但是下面的处理我们没有考虑这个因素，对能量的积分从$-\infty$到∞积分。不过鉴于方程两边对能量积分的积分限相同，可以验证，我们将积分都处理成$-\infty$到∞积分不会影响结果。解这个方程的最直接办法就是利用Fourier变换。

$$G(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G(p)\,. \tag{2.7}$$

代回(2.6)，并将δ-函数也做Fourier变换：

$$\delta^4(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx},$$

有

$$\begin{aligned}\left(\partial^2+m^2\right)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G(p)&=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\\ \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\left[-\left(p^2-m^2\right)\right]G(p)&=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}.\end{aligned}$$

对比有

$$\left(p^2-m^2\right)G(p)=1.$$

这样就得到了动量空间的Green函数：

$$G(p)=\frac{1}{p^2-m^2},\qquad\left(p^2\neq m^2\right). \tag{2.8}$$

原则上我们需要通过Fourier变换的逆变换得到$G(x)$。但这是有问题的，式(2.8)在分母上是有奇点的，$p^2=m^2$。为了做这个逆变换分析一下这个奇点。为了将奇点分离出来，我们来处理一下分母：

$$\begin{aligned}p^2-m^2&=p^{0^2}-|\mathbf{p}|^2-m^2\\&=\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right).\end{aligned}$$

于是式(2.8)变成：

$$G(p)=\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}. \tag{2.9}$$

下面分别考虑正能和负能情况。

正能情况

这里我们考虑$t>0$情况，后面我们会看到，这将对应正能的情况。显然，式(2.8)有两个一阶极点在$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$和$p^0=-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$。我们用$G^{(+)}$表示对应正能情况的Green函数。将(2.9)代入式(2.7)：

$$\begin{aligned}G^{(+)}(x)&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G(p)\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

我们利用Cauchy留数定理来做这个积分。对$t>0$情况取积分路径C如图(G1)，即大圆在下半平面。这样我们有：

$$\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}\tag{2.11}$$

$$=\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\overbrace{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}^{\text{解析部分}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}=\oint_C\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.\tag{2.12}$$

按照这个路径，正能奇点$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$被包含在路径中，对积分有贡献。这个奇点是Green函数的奇点。我们知道，Green函数的奇点对应的就是系统的谱，而自由粒子的谱就是粒子质量。所以，$t>0$给出的其实是正能情况的Green函数。如图(G1)，取一个以奇点$p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$为圆心的顺时针的园形路径$C^+$（上标的+号代表这是正能的那个奇点），路径$C$和$C^+$间没有奇点，利用Cauchy定理有：

$$\oint_C=\oint_{C^+}.\tag{2.13}$$

。所以

$$\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}=\oint_{C^+}\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.\tag{2.14}$$

由留数定理可以直接算出这个积分，积分路径C^+是顺时针方向的，因此要加一个$-$号：

$$\begin{aligned}\oint_{C^+}\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} &= -2\pi iRes\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\\ &= -2\pi i\left(\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right)\\ &= -i\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

于是由(2.10-2.15)得到Green函数：

$$\begin{aligned}G^{(+)}(x) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left(-i\frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right)\\ &= -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\\ &= -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{-ipx}.\end{aligned}$$

由(2.5)，$E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$：

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= iG^{(+)}(\mathbf{x},t;0,0)\\ &= iG^{(+)}(x)\\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx}.\end{aligned}$$

负能情况

这里我们考虑$t>0$情况，这对应正能的情况。用$G^{(-)}$表示对应负能的Green函数。将(2.9)代入式(2.7)：

$$\begin{aligned}G^{(-)}(x) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}G^{(-)}(p)\\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{1}{\left(p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p^0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.\end{aligned}$$

重复正能情况中的步骤，利用Cauchy留数定理来做这个积分。对$t<0$情况取积分路径取积分路径C如图(G4)，有

$$\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\overbrace{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}^{\text{解析部分}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}=\oint_C\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.$$

按照这个路径，负能奇点$p^0=-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$被包含在路径中，对积分有贡献，$t>0$给出的其实是负能情况的Green函数。如图(G2)，取一个以奇点$p^0=-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$为圆心的园形路径$C^-$（上标的$-$号代表这是负能奇点）。路径$C$和$C^-$间没有奇点，利用Cauchy定理有：

$$\oint_C=\oint_{C^-}.$$

所以

$$\int\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}=\oint_{C^-}\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}.$$

由留数定理可以直接算出这个积分（C^-路径是逆时针方向的）：

$$\begin{aligned}\oint_{C^-}\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0t}\frac{\frac{1}{p^0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}}{p^0-\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}&=2\pi iRes\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\\&=2\pi i\left(\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\left(-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)t}}{-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\right)\\&=-i\frac{e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}.\end{aligned}$$

由上面的结果得到Green函数：

$$\begin{aligned}
G^{(-)}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left(-i\frac{e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} \right) \\
&= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} \\
&= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}.
\end{aligned}$$

但是指数上的$\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$不是四矢点乘。不过在积分中我们可以将它改造成四矢点乘的形式。考虑下面形式的积分：

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} \left[\cos\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right) + i\sin\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)\right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} \cos\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} \left[\cos\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right) - i\sin\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)\right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(|\mathbf{p}|^2\right) e^{ipx}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

这样有

$$G^{(-)}(x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} e^{ipx}.$$

由(2.5)，$E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$：

$$\begin{aligned}
\phi^{(-)}(\mathbf{x},t) &= iG^{(-)}(\mathbf{x},t;0,0) \\
&= iG^{(-)}(x) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} e^{ipx}.
\end{aligned}$$

正确结果应该是

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t) = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.$$

2.1.2　标量方程(Klein-Gordon)方程：解法二

(可以用Klein-Gordon方程的类似Dirac方程的形式，即时间导数为一阶的形式。由此可直接计算时间演化)

下面我们首先考虑标量方程Klein-Gordon方程：

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi(x) = 0.$$

我们现在将这个方程理解为相对论量子力学的自由粒子波动方程，自然$|\phi(x)|^2$就是几率。下面试着求解这个方程。

这是个二次微分方程，我们先将它改造成一个关于时间的一阶微分方程。先将方程的时间和空间分量明显地写出来：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{x},t) = \left(-\nabla^2 + m^2\right)\phi(\mathbf{x},t).$$

为了将方程改写成一阶的形式，先形式地开方：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= i\frac{\partial}{\partial t}i\frac{\partial}{\partial t}, \\ -\nabla^2 + m^2 &= \left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right). \end{aligned}$$

这样方程变为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t)\right] = \left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\left[\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)\phi(\mathbf{x},t)\right]. \tag{2.17}$$

开方开出正和负两种情况是自然的。出现这种情况的原因是相对论能动量关系是二次的，

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2.$$

对它开方也将得到正能负能两种结果：

$$E = \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}.$$

在经典理论中，我们可以直接扔掉负能结果，只考虑正能的情况。这是因为，只要初始时刻系统的能量是正的，就永远是正的。但是，现在我们是在量子的框架下考虑问题，量子

中存在跃迁，即使初始时刻系统处的能量是正的，通过量子跃迁也仍然可以跃迁到负能态。因此，我们分别考虑这两种情况。

下面我们非常不严格地做一件事，与其说这是在推导，不如说是在猜解。不过我们也能给出更严格些的推导。关系(2.1)给出了微分算符和能动量之间的关系。形式地我们有

$$E = i\frac{\partial}{\partial t},$$

而我们又有

$$E = \pm\sqrt{-\nabla^2 + m^2},$$

从而

$$\begin{aligned} E\phi\left(\mathbf{x}, t\right) &\sim i\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\mathbf{x}, t\right), \\ E\phi\left(\mathbf{x}, t\right) &\sim \pm\sqrt{-\nabla^2 + m^2}\phi\left(\mathbf{x}, t\right). \end{aligned}$$

将这一结果带到(2.17)中有

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[i\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\mathbf{x}, t\right)\right] = \left(\pm\sqrt{-\nabla^2 + m^2}\right)\left[i\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\mathbf{x}, t\right)\right].$$

这启发我们令

$$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right) \equiv i\frac{\partial}{\partial t}\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right), \tag{2.18}$$

这样就得到了以

$$H = \pm\sqrt{-\nabla^2 + m^2}$$

为Hamilton量的运动方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right) = \pm\sqrt{-\nabla^2 + m^2}\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right).$$

这里的$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right)$和$\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right)$分别对应着正能和负能情况。之所以在这里我们明确地标出正负能是因为在(2.17)中对应正负能的负号是消掉的，但是在作了前面的代换后，实际上得到了两个方程。于是这里我们同时考虑了正能和负能。

有了Hamilton量可以很容易地考虑时间演化问题。时间演化算符为

$$\begin{aligned} U^{(\pm)}\left(t, t_0\right) &= e^{-iHt} \\ &= e^{-i\left(\pm\sqrt{-\nabla^2+m^2}\right)t}. \end{aligned}$$

有了时间演化算符，这样有

$$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t\right) = U^{(\pm)}\left(t, t_0\right)\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x}, t_0\right).$$

考虑一个粒子在$t_0=0$时刻处在$\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$点，即

$$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t_0\right)=\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)=\delta^3\left(\mathbf{x}\right).$$

注意，由于我们取$t_0=0$，这时的$\mathbf{x}$是空间间隔。

正能情况

我们先考虑正能情况，此时$H=\sqrt{-\nabla^2+m^2}$。

用$\Phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)$表示正能Hamilton量情况下的波函数，$t$时刻的波函数为

$$\begin{aligned}\Phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)&=U^{(+)}\left(t,t_0\right)\Phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t_0\right)\\&=e^{-i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\delta^3\left(\mathbf{x}\right)\\&=e^{-i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}e^{-i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}\\&=\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}e^{-ipx},\end{aligned}\tag{2.19}$$

这里$px=Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$。推导中用到了$\delta$-函数的Fourier变换：

$$\delta\left(x\right)=\int\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}.$$

在(2.17)中我们定义了这里的$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$与Klein-Gordon方程的解$\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$之间的关系：$\Phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)\equiv i\frac{\partial}{\partial t}\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$。为了得到$\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)$我们将式(2.19)凑成对时间求导的形式。

$$\begin{aligned}\Phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)&=\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}e^{-ipx}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{-iE}e^{-i\left(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{-iE}e^{-i\left(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}\\&=i\frac{\partial}{\partial t}2\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E}e^{-i\left(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}\\&=i\frac{\partial}{\partial t}2\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx}.\end{aligned}$$

这里在分母上乘上了2纯粹是因为为习惯和以后的方便。与式(2.17)对比就有

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx}. \tag{2.20}$$

只要做出这个积分，我们就得到了粒子在$(\mathbf{x},t)$点的几率振幅。

这里的$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)$就是Klein-Gordon方程的解。我们在上一章就知道$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$必须是Lorentz标量，而这个结果不是明显Lorentz不变的形式。我们一定能将它改写成明显不变的形式。下面我们来做这件事。我们将证明$\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}$就是一个Lorentz不变的体积元。

Lorentz不变的体积元

我们来凑一个满足相对论要求的Lorentz不变的体积元。一个Lorentz不变的结果可以让我们选择一个方便的参照系进行考虑，而结果对任意参照系成立，是普遍的。

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

显然是一个Lorentz不变的体积元。其中因子$\frac{1}{(2\pi)^4}$完全是为了方便，因为自由粒子能量动量的本征值是平面波，而平面波恰好是Fourier变换的形式。所以为了与Fourier变换的形式相适应加上了这个因子。这个体积元虽然是Lorentz不变的，但其中四动量的四个分量却是独立的：$d^4p = dp^0dp^1dp^2dp^3$。而我们知道在相对论中这四个分量并不独立，它们要满足能动量关系$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$。这个关系的明显协变形式是

$$p^2 - m^2 = 0.$$

因此要在这个积分中加上这个约束：

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2 - m^2\right),$$

这里加上因子2π还是为了与Fourier变换的形式一致。从相对论能动量关系中得到能量需要开方，这会给出负能。我们只考虑正能情况，因此还有加上限制$\theta\left(p^0\right)$，从而积分变成

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2 - m^2\right)\theta\left(p^0\right).$$

加入的$\theta\left(p^0\right)$含有时间分量，但这不会破坏协变性。因为$\theta\left(p^0\right)$的值只取决于p^0的符号，而Lorentz变换不改变p^0的符号。这样我们就得到了一个明显Lorentz不变

的形式。但是由于有δ-函数的限制，积分并不是真正的四重积分，而是三重。下面我们将δ-函数积分掉。计算是直接的。利用

$$\delta\left[f\left(x\right)\right]=\sum_{x_0^i}\frac{\delta\left[x-x_0^i\right]}{\left|\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0^i}},\quad f\left(x_0^i\right)=0,$$

即x_0^i是$f\left(x_0^i\right)=0$的第i个根，求和遍及所有根。具体到我们的问题中方程

$$p^2-m^2=\left(p^0\right)^2-\left(\left|\mathbf{p}\right|^2+m^2\right)=0$$

给出了两个根：

$$p^0=\pm\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^2+m^2}\equiv\pm E.$$

相应地

$$\left|\frac{df\left(x\right)}{dx}\right|_{x=x_0^i}=\left|\frac{d\left[\left(p^0\right)^2-\left(\left|\mathbf{p}\right|^2+m^2\right)\right]}{dp^0}\right|_{p=\pm 2E}=2E,$$

从而有

$$\delta\left(p^2-m^2\right)=\frac{\delta\left(p^0-E\right)}{2E}+\frac{\delta\left(p^0+E\right)}{2E}.$$

再考虑正能的限制

$$\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)=\left[\frac{\delta\left(p^0-E\right)}{2E}+\frac{\delta\left(p^0+E\right)}{2E}\right]\theta\left(p^0\right)=\frac{\delta\left(p^0-E\right)}{2E}.$$

这样我们就算出了前面的积分

$$\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)=\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E},\tag{2.21}$$

这里的$E=\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^2+m^2}$。

因此结果可以写成明显协变的形式：

$$\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)=2\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)e^{-ipx}.$$

下面我们就来做式(2.17)中的这个积分。先换到球坐标

$$\begin{aligned}
\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= 2\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3 2E}|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t} e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta} \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3 2E}|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}(2\pi)\int_{-1}^1 d\cos\theta e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta} \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^2 2E}|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\frac{2\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)}{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} \\
&= \frac{1}{\pi^2|\mathbf{x}|}\int_0^\infty \frac{1}{2E}|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|).
\end{aligned}$$

为了去掉积分中不容易处理的$|\mathbf{p}|$，我们对参数求导：

$$\begin{aligned}
\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= -\frac{1}{\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_0^\infty \frac{1}{2E}d|\mathbf{p}| e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|) \\
&= -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|).
\end{aligned}$$

为了便于积分，将三角函数换成指数函数，利用$\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)$是奇函数的性质，将积分限变成对称的：

$$\begin{aligned}
\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\frac{1}{2}\left[\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|) - i\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}e^{-i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\right)},
\end{aligned}$$

其中

$$|\mathbf{p}|^2+m^2 = m^2\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}+1\right).$$

令

$$\frac{|\mathbf{p}|}{m} = \sinh(\xi), \tag{2.22}$$

于是

$$|\mathbf{p}|^2+m^2 = m^2\left[\sinh^2(\xi)+1\right] = m^2\cosh^2(\xi).$$

此外由(2.22)还有

$$d\left|\mathbf{p}\right| = md\sinh\left(\xi\right) = m\cosh\left(\xi\right)d\xi,$$

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right) &= -\frac{1}{4\pi^2\left|\mathbf{x}\right|}\frac{\partial}{\partial\left|\mathbf{x}\right|}\int_{-\infty}^{\infty} m\cosh\left(\xi\right)d\xi\frac{1}{m\cosh\left(\xi\right)}e^{-i[m\cosh(\xi)t+m\sinh(\xi)|\mathbf{x}|]}\\ &= -\frac{1}{4\pi^2\left|\mathbf{x}\right|}\frac{\partial}{\partial\left|\mathbf{x}\right|}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-im[\cosh(\xi)t+\sinh(\xi)|\mathbf{x}|]}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

注意，由于我们取初始点为$(0,\mathbf{0})$，所以这里的t和$|\mathbf{x}|$分别为时间间隔和空间间隔。时空间隔为

$$s^2 = x^2 = t^2 - \left|\mathbf{x}\right|^2,$$

为了讨论因果律的问题我们分别考虑时空间隔为类空和类时的两种情况：

$$\begin{array}{lll} s^2 > 0, & 即\quad t^2 > \left|\mathbf{x}\right|^2 & 类时， \\ s^2 < 0, & 即\quad t^2 < \left|\mathbf{x}\right|^2 & 类空。\end{array}$$

类时情况，$s^2 > 0$：

为了利用关系

$$\cosh\left[a+b\right] = \cosh\left[a\right]\cosh\left[b\right] + \sinh\left[a\right]\sinh\left[b\right],$$

我们针对类时情况，$t^2 > \left|\mathbf{x}\right|^2$ 且$t > 0$（即只关注未来）的情况做一个变换：

$$\left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{s^2}\cosh\left(\zeta\right) \\ \left|\mathbf{x}\right| = \sqrt{s^2}\sinh\left(\zeta\right)\end{array}\right. .$$

由于在$t > 0$，$|\mathbf{x}| > 0$时总会有$\cosh\left(\zeta\right) > \sinh\left(\zeta\right)$，所以这个变换保证了类时的要求。这个变换用另两个独立变量$\sqrt{s^2}$和ζ代替了原来的两个变量$|\mathbf{x}|$和t，且保证了类时的要求。这样有

$$\begin{aligned}\cosh\left(\xi\right)t + \sinh\left(\xi\right)\left|\mathbf{x}\right| &= \cosh\left(\xi\right)\sqrt{s^2}\cosh\left(\zeta\right) + \sinh\left(\xi\right)\sqrt{s^2}\sinh\left(\zeta\right)\\ &= \sqrt{s^2}\left[\cosh\left(\xi\right)\cosh\left(\zeta\right) + \sinh\left(\xi\right)\sinh\left(\zeta\right)\right]\\ &= \sqrt{s^2}\cosh\left(\xi+\zeta\right).\end{aligned}$$

于是由(2.23)

$$\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right)\Big|_{s^2>0} = -\frac{1}{4\pi^2\left|\mathbf{x}\right|}\frac{\partial}{\partial\left|\mathbf{x}\right|}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-im\sqrt{s^2}\cosh(\xi+\zeta)},$$

利用积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ia\cosh(\xi+\zeta)} = -\pi\left[Y_0\left(a\right) + iJ_0\left(a\right)\right],$$

其中$Y_0(z)$为第二类Bessel函数，$J_0(z)$为Bessel函数。于是

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]. \tag{2.24}$$

这个结果实在类时的前提下得到的。

类空情况，$s^2<0$：

为了利用关系

$$\sinh[a+b]=\sinh[a]\cosh[b]+\cosh[a]\sinh[b],$$

我们针对类空情况，$t^2<|\mathbf{x}|^2$且$t>0$（即只关注未来）的情况做一个变换：

$$\begin{cases} t=\sqrt{-s^2}\sinh(\zeta) \\ |\mathbf{x}|=\sqrt{-s^2}\cosh(\zeta) \end{cases}.$$

由于在$t>0$，$|\mathbf{x}|>0$时总会有$\sinh(\zeta)<\cosh(\zeta)$，所以这个变换保证了类空的要求。同前面一样，这个变换用另两个独立变量$\sqrt{-s^2}$和ζ代替了原来的两个变量$|\mathbf{x}|$和t，且保证了类空的要求。这样有

$$\begin{aligned}\cosh(\xi)t+\sinh(\xi)|\mathbf{x}|&=\cosh(\xi)\sqrt{-s^2}\sinh(\zeta)+\sinh(\xi)\sqrt{-s^2}\cosh(\zeta)\\&=\sqrt{-s^2}\left[\cosh(\xi)\sinh(\zeta)+\sinh(\xi)\cosh(\zeta)\right]\\&=\sqrt{-s^2}\sinh(\xi+\zeta).\end{aligned}$$

于是由(2.23)

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0}=-\frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{-im\sqrt{-s^2}\sinh(\xi+\zeta)},$$

利用积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{-ia\sinh(\xi+\zeta)}=2K_0(a),$$

其中$K_0(z)$是第二类变形Bessel函数。于是

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0}=-\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right). \tag{2.25}$$

这个结果是在类空的前提下得到的。

负能情况

上面得到的是正能的结果，下面考虑负能的情况。

$$H=-\sqrt{-\nabla^2+m^2}.$$

时间演化算符为

$$\begin{aligned}U^{(-)}(t,t_0)&=e^{-iHt}\\&=e^{i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}.\end{aligned}$$

一个粒子在$t_0=0$时刻处由$\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$点出发的态的演化为

$$\begin{aligned}\Phi^{(-)}(\mathbf{x},t)&=U^{(-)}(t,t_0)\,\Phi(\mathbf{x}_0,t_0)\\&=e^{i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\delta^3(\mathbf{x})\\&=e^{i\sqrt{-\nabla^2+m^2}t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)},\end{aligned}$$

但是指数上的$\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$不是四矢点乘。利用(2.16)可将这个积分中指数部分改造成四矢点乘的形式：

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\left(\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{ipx}.$$

与正能结果相同我们有

$$\Phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-i2\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.\tag{2.26}$$

与式(2.17)对比有

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.\tag{2.27}$$

改成明显协变的形式是

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)e^{ipx}.$$

显然负能与正能的关系是

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)=-\left[\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\right]^*.\tag{2.28}$$

这样由正能的结果直接得到负能的结果。

类时情况，$s^2>0$：

$$\begin{aligned}
\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0} &= -\left[\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}\right]^* \\
&= -\left[\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\right]^* \\
&= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)-iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

类空情况，$s^2<0$：

$$\begin{aligned}
\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0} &= \left[\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0}\right]^* \\
&= -\left[-\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right)\right]^* \\
&= \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right). \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

2.1.3 因果律，对因果律的破坏

现在我们得到了类空和类时情况下的正能和负能情况下的波函数。即然是波函数，那么它的模平方当然就是几率。由式(2.25)和(2.24)可以看出，不论是类时还是类空$|\psi(\mathbf{x},t)|^2$都不是零。而对类空情况而言这显然是个错误结果。这个结果破坏了因果律。

在此之前，我们只有一条要求（其实也还有定域性的要求），就是理论必须是相对论。这里需要增加另一条要求（注意，我们的原则是基本假设越少越好）：因果律的要求。也就是要求

先有原因，后有结果。

这条要求虽然是硬加进去的，但是显然是自然合理的。

满足因果律要求的同时还有满足相对论的要求：

相对论+因果律=类空间隔的事件是无关的。

这就是说一个粒子演化到一个类空的时间点的几率必须为零。因此将前面得到的相对论方程解释成相对论波动方程，从而将$\psi(\mathbf{x},t)$的模平方解释成几率，必然破坏因果律。这是绝对不能接受的。我们前面的努力实质上是将相对论与量子力学结合在一起的一个尝试。我们尝试得到一个相对论性的量子力学。但这个努力失败了。

Exercise 1 *仿照对标量方程的讨论，讨论旋量方程（$Dirac$方程）*

2.2　相对论+量子力学≠相对论量子力学；相对论量子力学为什么还算成功

前面我们已经看到，将相对论和量子力学结合起来得到相对论量子力学的尝试失败了。这个失败不只是实验精度上的，而是理论内部出现了不自洽：

> 如果因果律是默认的（这是一种宗教式的信仰），那么相对论量子力学将违背相对论（超光速）。

（一点小说明：相对论并没有要求不能超光速，只是要求光速不变。不过我们还是默认不能超光速是相对论的要求。）这一点和牛顿力学不同。牛顿力学虽然苛求地讲也是一个不正确的理论。但是那只是精度上的问题。它没有出现内部的自相矛盾。而相对论量子力学出现的问题是实质性的。原则上，这样一个理论从根本上就是错的，是绝对不能接受的。因为与它矛盾的是它自己，根本还轮不上与实验对比呢。

不过，这个尝试并不是那么一败涂地。事实上，如果你不是那么在乎这种理论上的不自洽，并且对数据的精度要求不是特别特别高的话，相对论量子力学还是可以工作的，经常地工作得还不错。

我们前面得到的结论表明，相对论波动方程的解释破坏因果律。因为计算结果表明超光速的几率不是零。但是由式(2.25)我们也可以看到，这种超光速的几率是指数衰减的。原则上讲，这个几率必须是零，衰减得再快也不行。但是，实用地讲，只要足够快，对数据的精度影响就不大。因此相对论量子力学在数据精度上还算成功。当然，这种成功是有限的，当精度要求再高些后，它就失效了。

在原子的谱方面，相对论量子力学给出的谱达到了很高的精度，这是因为它较好地考虑了磁效应（磁效应是电的一种纯粹的相对论效应）。但是也能够明显地看出进一步提高精度在原则上是不可能的[1]。相对论波动方程解释不了Lamb移动，反常磁矩等问题。

粒子的产生和消失，如光的发射和吸收，在量子力学的框架下完全没有解决的希望，因为这类现象与力学的最基本特征相矛盾：力学，无论是经典的还是量子的，都是粒子数守恒的。在力学的框架下没有根本解决粒子产生和消失的办法（虽然有一些极为漂亮的唯

[1]一个不合适的说法是认为由Klein-Gordon方程给出的氢原子能谱不精确因此这个方程是不对的。我们知道Klein-Gordon方程描述的是零自旋的标量粒子，而电子是自旋$\frac{1}{2}$的旋量粒子。也就是说，Klein-Gordon方程不适于描述电子，就像Dirac方程也不适合描述标量粒子一样。这个错误完全是历史原因造成的。Dirac方程由于描述的是自旋$\frac{1}{2}$的旋量粒子，自然给出的氢原子结果精度要好许多。

象办法，象爱因斯坦的自发辐射理论，核物理中的复数势等等)。因此，对这类问题即使从实用的角度相对论量子力学也是失败的。

相对论量子力学在理论上的实质性困难除表现为破坏因果律以外，还可以以其它方式表现出来。如相对论的标量方程在被解释成相对论波动方程的时候同时给出了负几率和负能量，这都是不能接受的。

Dirac，一个真正的天才，在量子力学的框架下为负能量找的解释是Fermi子海洋。这个想法虽然闪烁着天才的光芒，但是其如以太般的荒谬，以及完全不能解释Bose子产生消失告诉我们这个捉襟见肘的做法本质上并不比Klein-Gordon方程好多少。

（这一部分还可以增加一些相对论量子力学的内容，如Klein-Gordon方程给出负几率，负能量。Dirac方程在氢原子上的结果，以及存在的问题等等）

2.3 正能与负能：一个颇有启发性的尝试

前面的结果表明，将相对论方程解释为波动方程是不成功的，它破坏了因果律。这里我们来做一个尝试，看看有没有不破坏因果律的可能。

2.3.1 途径一：直接计算

破坏因果律体现在类空的传播几率不是零，这意味着出现了超光速的情况。下面我们来尝试能不能去掉这种破坏因果律的情况。

完整起见，将前面得到的结果罗列在下面：

类时($s^2 > 0$)：

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right) + iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right], \qquad \text{正能，}$$

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right) - iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right], \qquad \text{负能。}$$

类空($s^2 < 0$)：

$$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0} = -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right), \qquad \text{正能，}$$

$$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0} = \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right), \qquad \text{负能。}$$

如前面已经分析过的，这四种情况的模平方都不是零。由于这时我们将所得到的相对论方程解释成相对论量子力学的波动方程，所以模平方就是几率。由于因果律的要求我们希望得到结果是，类时的模平方不是零，类空的模平方必须是零。

但是，由前面的结果其实很容易看出，正能$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和负能$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$相差的是一个复共轭。而对类时情况，$\phi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}$即有实部又有虚部，对类空情况则只有虚部。这就是说，如果将正能负能的结果相加就会得到一个符合因果律的结果：类时不是零，类空等于零，即：

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}+\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}\\
&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)-iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]+\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[-Y_0\left(m\sqrt{s^2}\right)+iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]+\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}\left[iJ_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\right]\\
&=i\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}J_0\left(m\sqrt{s^2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0}+\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0}\\
&=-\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right)+\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}K_0\left(m\sqrt{-s^2}\right)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

也就是说如果我们定义

$$\phi(\mathbf{x},t)\equiv\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)+\phi^{(-)}(\mathbf{x},t),\tag{2.31}$$

则有类时情况

$$\phi(\mathbf{x},t)\big|_{s^2>0}=i\frac{1}{2\pi|\mathbf{x}|}\frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}J_0\left(m\sqrt{s^2}\right)\neq0.$$

类空情况

$$\phi(\mathbf{x},t)\big|_{s^2<0}=0.$$

也就是说新定义的$\phi(\mathbf{x},t)$是符合因果律的。注意，这里的$\phi(\mathbf{x},t)$并不是波函数，本质上是Green函数。

但是，一个自然的问题是，$\phi(\mathbf{x},t)$是什么呢。它是$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$的和。本来$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$被解释成波函数，但是这个波函数解释显然已经失败，因为$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$都破坏因果律。现在我们证明了$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)$和$\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)$的和$\phi(\mathbf{x},t)$不破坏因果律，那么$\phi(\mathbf{x},t)$能被解释成波函数吗。不能。这可以从以下两个角度来理解。

第一个角度：认为这个单粒子波函数$\phi(\mathbf{x},t)$是正负能的迭加。这样做的最大问题是此时粒子处在正负能的迭加态，但是由于存在负能，粒子将落向负能。存在负能的世界能量没有下界。于是这将导致世界不稳定。

我们也可以换一个角度考虑这个问题：前面我们与正能完全平权地考虑了负能的情况，但是并没有给负能一个解释。我们知道，一个负能量是不允许的。我们这个世界有一个基本假设（注意：又一个基本假设）：能量是有下界的。这里的负能将导致能量没有下界。如果能量没有下界则世界不稳定，因为世界倾向于处在尽可能的低能状态。因此一个负能量是不能接受的，能量必须是正的。我们来试着理解一下这个负能。

时间演化算符是e^{-iHt}，在能量的本征态上将它写成

$$e^{-iEt}, \qquad (E>0).$$

。它描述了一个正能粒子沿由过去向未来，也就是时间正向的传播。对负能情况，在能量本征态上我们有

$$e^{-i(-E)t}, \qquad (E<0). \tag{2.32}$$

它描述的是一个负能粒子沿由过去向未来，也就是时间正向的传播。但是，如前面已经说明的理由，一个负能量是不能接受的，它会使世界不稳定。我们必须认为这个能量是正的，但数学结果又不能改变，能够改变的只是我们的理解。强迫认为这个能量是正的，为了不改变数学结果将这个负号移动到时间上，将(2.32)式改成

$$e^{-iE(-t)}, \qquad (E>0).$$

能量变成了正的，但粒子的传播方向变成了沿时间的负向，也就是由未来向过去传播。逆着时间传播，这也不是一个能够接受的概念。为了给这件事一个解释，我们回忆一个物理中的简单例子：正电流流进来，在效果上完全相当于负电流流出去。为此一个启发性观点是，如果我们将一个带负能的沿时间正向传播的粒子，理解为带正能的沿时间负向传播的反粒子。那么负能使世界不稳定的问题就能够得到一个解释。当然，代价是引入了一大类新粒子——反粒子。

就是说，如果我们将负能的情况理解为世界上除粒子外还有一类与它们对应的反粒子，那么当我们同时考虑这两种粒子时，因果律就不会被破坏了。但是，此时我们必须同时考虑两个粒子，也就是说，$\phi(\mathbf{x},t)$还是不能被解释成单粒子波函数。它根本不能描述单个粒子。

这个尝试虽然失败了，但是却给了我们一个启发，如果同时考虑正能和负能或者说在考虑正能粒子的同时引入反粒子，因果律是可以保持的。当然，波函数的解释肯定是不行了。

总结一下就是：所谓将$\phi\left(\mathbf{x},t\right)$解释成波函数，或者将意思说得完全些就是将$\phi\left(\mathbf{x},t\right)$理解为一个单粒子的波函数。$\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$分别对应正能和负能，这样我们便有了两个选择：

1. 认为这个单粒子波函数$\phi\left(\mathbf{x},t\right)$是正负能的迭加。负能会使世界不稳定，不能引入负能。

2. 认为$\phi\left(\mathbf{x},t\right)$是一个正粒子的正能波函数和一个反粒子的正能波函数的迭加。这根本不是一个单粒子波函数。

2.3.2 途径二：更定性些

如果我们仅仅希望得到这一小结的结果，那么根本不需要将$\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right)$求解出来。只作一些定性分析就足够了。我们下面给出这个定性分析。

基本思路是，将结果尽可能地用明显协变的形式写出来，这样就很容易看出这些结果在Lorentz变换下的性质。再由此出发分析结果。

由式(2.20)，(2.21)，(2.32)和(2.26)知

$$
\begin{aligned}
\phi^{(\pm)}\left(\mathbf{x},t\right) &= \pm 2\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E}e^{\mp ipx} \\
&= \pm 2\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(\pm p^0\right)e^{-ipx}.
\end{aligned}
$$

定义一个Lorentz不变的函数

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(+)}\left(x\right) &\equiv -i\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)e^{-ipx} = -i\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E}e^{-ipx}, \\
\Delta^{(-)}\left(x\right) &\equiv i\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\left(2\pi\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(-p^0\right)e^{-ipx} = i\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E}e^{ipx}.
\end{aligned}
$$

这里的$\Delta^{(+)}\left(x\right)$和$\Delta^{(-)}\left(x\right)$是Lorentz不变的函数。在定义中引入一个负号是为了使它们有性质：

$$
\left[\Delta^{(+)}\left(x\right)\right]^* = \Delta^{(-)}\left(x\right). \tag{2.33}
$$

可以将上述结果表示为

$$
\begin{aligned}
\phi^{(+)}\left(\mathbf{x},t\right) &= 2i\Delta^{(+)}\left(x\right), \\
\phi^{(-)}\left(\mathbf{x},t\right) &= 2i\Delta^{(-)}\left(x\right).
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

归一化后我们有

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) &= i\Delta^{(+)}(x)\,,\\ \phi^{(-)}(\mathbf{x},t) &= i\Delta^{(-)}(x)\,.\end{aligned} \tag{2.35}$$

此外$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$显然还有性质

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(-x) &= -\Delta^{(-)}(x)\,,\\ \Delta^{(-)}(-x) &= -\Delta^{(+)}(x)\,.\end{aligned} \tag{2.36}$$

显然$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t) = -\left[\phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\right]^*$。同样还可以给出$\phi(\mathbf{x},t)$的表示，由(2.31)，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \phi^{(+)}(\mathbf{x},t) + \phi^{(-)}(\mathbf{x},t)\\ &= 2\left[i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)\right].\end{aligned}$$

由这个结果可以直接看出类空间隔情况下$\phi(\mathbf{x},t)$不是零。

如图（光锥-1），在类空区域可以通过一个连续Lorentz变换将时空坐标x变换成$-x$，而在类时的区域就不存在这样的变换。而$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$都是Lorentz不变的函数，即Lorentz标量。它们的结果在连续的Lorentz变换下是不变的。也就是说如果x与x'之间只差一个连续的Lorentz变换，则$\Delta^{(\pm)}(x) = \Delta^{(\pm)}(x')$。因此有：

类空情况($s^2 < 0$)，通过连续的Lorentz变换使$x \to -x$，从而使$\left.\Delta^{(-)}(x)\right|_{s^2<0}$变换成$\left.\Delta^{(-)}(-x)\right|_{s^2<0}$，由于$\Delta^{(-)}$是Lorentz不变的函数，所以$\left.\Delta^{(-)}(x)\right|_{s^2<0} = \left.\Delta^{(-)}(-x)\right|_{s^2<0}$。而由式(2.36)有$\Delta^{(-)}(-x) = -\Delta^{(+)}(x)$。所以

$$\left.\Delta^{(-)}(x)\right|_{s^2<0} = \left.-\Delta^{(+)}(x)\right|_{s^2<0}$$

（注意，这个结果只在类空情况下成立）。这样

$$\begin{aligned}\left.\phi(\mathbf{x},t)\right|_{s^2<0} &= 2\left[i\left.\Delta^{(+)}(x)\right|_{s^2<0} + i\left.\Delta^{(-)}(x)\right|_{s^2<0}\right]\\ &= 2\left[i\left.\Delta^{(+)}(x)\right|_{s^2<0} + i\left(-\left.\Delta^{(+)}(x)\right|_{s^2<0}\right)\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

这就是我们前面通过直接计算得到过的结论。

对类时情况，由图(1)中可以看出，没有将x变换成$-x$的连续Lorentz变换，所以$\left.\phi(\mathbf{x},t)\right|_{s^2>0} \neq 0$。

可以看到，导致这个结果的根本原因是Lorentz不变函数$\Delta^{(+)}(x)$和$\Delta^{(-)}(x)$在类空时存在这样的关系：

$$\left.\left[\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)\right]\right|_{s^2<0} = 0. \tag{2.37}$$

这个性质是使$\phi\left(\mathbf{x},t\right)$符合因果律的原因。

2.3.3 小结：

前面我们从因果律角度出发直接证明了将相对论与量子论结合是不能给出相对论量子力学的。相对论量子力学只是一个近似。

在这一节中做了一个修复的尝试，看看能不能通过引入一些新的东西使因果律的要求在相对论量子力学的框架下得到满足。结果是失败了。我们确实修复了因果律，但却得不到一个单粒子力学的图像。具体说就是，要想满足因果律，就必须在考虑正粒子的同时考虑反粒子。而同时考虑不止一个粒子不是一个力学理论力所能及的（在量子力学中，总几率守恒，从而粒子不能产生和消失）。就是说要想满足因果律就必须引入反粒子，就必须放弃力学的图像。简单说就是

$$\text{不想破坏因果律}+\text{不想要负能}=\text{放弃力学}+\text{反粒子}$$

下面我们尝试场的图像。

第三章　将方程作为经典场方程的尝试

综上所述，将由相对论要求得到的方程理解为量子力学的波动方程，将$\phi(x)$等量理解为波函数是不成功的。那么我们换条路试试。$\phi(x)$显然可以被理解为场。所谓场，就是在空间每个点上都放上一个量：放的是标量，就是标量场；放的是旋量，就是旋量场；放的是矢量，就是矢量场……。显然，一个自然的选择就是将相对论方程给出的$\phi(x)$等量理解为经典场。

前面指出的力学图像的一个致命的缺点是力学图像，无论是经典力学还是量子力学，都是单粒子的。在力学中我们不能描述产生和消失。在量子力学的框架下，总几率$\int dV\,|\phi(\mathbf{x},t)|^2$无论怎样演化都不会是零，而永远是1。也就是说总几率是守恒的，物质一旦出现，永远不会消失；当然，物质也不会凭空产生。在牛顿力学中我们就已经知道力学的这个特点了。但是在经典场论中，我们可以从某种意义上解决这个问题：一个经典场的强度是可以变化的。场可以由零变成变成任意大，也可以从有限值变成零。比如光的产生和消失就可以通过电磁场从零变到有限大和从有限大变成零来描述。比如在电磁场理论中可以通过一个电振子（这里的电振子就是天线）产生和吸收电磁波。就是说，在经典场理论中可以通过描述场的强度的改变描述物质的产生和消失。

经典场理论最成功的范例就是电磁学。但是，问题并没有真地解决。经典场理论中，场的变化是连续的。而我们知道，根据相对论，$E=mc^2$，任何粒子都可以产生和消失。许多粒子都有确定的质量。用场强度的强弱变化不可能描述一个有确定质量的粒子的产生和消失。因此经典场理论仍然不能解决我们的问题。顺便说一下，那么为什么电磁学那么成功呢。这是因为光子的静质量是零，产生多大能量的光子都是允许的（不过正因为如此，光的量子性也最强，它能在简单的实验条件下直接演示物质的粒子性和波动性。所以量子论的开始一直与光有关）。

当然，这个尝试也取得了虽然有限但非常辉煌的成功。经典电磁学是物理学理论的范例，经典Maxwell方程达到了经典物理中难以置信的精度。一个场理论的优势在这里得到了充分的发挥。当然，即使如此，经典场理论的精度也还是有限的。

第四章　它们是量子化的场!

相对论量子力学和经典场论都尝试过了，都不成功，它们在概念上都不能自圆其说，只能在非常局限的意义上作为一个近似的模型。下一步怎么办呢。

前面已经讲过，经典场其实是可以描述产生和消失的。只是这个产生和消失是通过场的连续变化来描述的，不能描述质量有限的粒子的产生和消失。描述粒子的产生和消失并不是什么样的场都行，粒子必须一个一个地产生，这就要求粒子产生消失伴随的能量变化必须是一份一份的。这也就是说我们引入了一个新的假设：世界上的粒子可以被分成几类，每类中粒子质量都是相同的。这种一份一份的能量我们是有经验的。量子化的谐振子就具有这种特征：量子振子的能量间隔是等距的，恰好可以用来描述一个一个的粒子。注意，经典理论中的振子是不行的，经典振子的能量是连续变化的。同样，一个量子力学中的振子是不够的，力学肯定不行，前面我们已经讲过，必须是场。场是什么，场就是无穷大自由度的力学体系（这一点在后面将有非常详尽的叙述）。一个力学振子的自由度就是空间的维数，三维振子的自由度就是三。一个无穷大自由度的振子系统就是一大堆振子。因此我们所要面对的就是无穷多个量子化的振子。

振子的特征是什么呢。从能量的角度上讲就是振子的动能和势能都是二次的。比如力学中的振子的运动方程、Hamilton量和Lagrange量分别为：

$$\begin{array}{ll} \text{运动方程} & \ddot{x}+\omega^2 x=0, \\ \text{Hamilton量} & L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}mx^2, \\ \text{Lagrange量} & H=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mx^2. \end{array}$$

粗略地说就是

从运动方程角度讲：振子=坐标的二阶导数+一次方的坐标，
从Lagrange量的角度讲：振子=坐标一阶导数平方+二次的坐标。

这条要求使得

自由场方程=场量的二阶导数+一次方场量，
自由场Lagrange量=场量一阶导数的平方+场量的平方。

因为谐振子就是这样的。

由相对论的要求出发我们当然可以得到高阶方程，但是这与同类粒子质量相同的要求矛盾。所以在前面我们有相对论出发得到场方程的时候我们都作了这个要求，只不过在这里才给了一个解释。注意，对场来说，这是无穷多个振子。

但是，这些振子都是经典的。象前面分析过的，它们不能描述一个一个的粒子。（由无穷多个力学中的振子给出场将在后面详细讲）。我们需要的是一个无穷多个量子化的振子。无穷多个振子将构成一个场，无穷多个量子化的振子显然构成的将是一个量子化的场。一个量子化的振子的正则坐标和正则动量被看成是算符。无穷多个耦合在一起的振子可以被看作是一条弹性弦。无穷多个弹性弦具有无穷多个自由度，完全确定一条弦的位置也需要无穷多个变量。如后面将要详细分析的那样，一条弦可以用一个连续的坐标的函数$\phi(x)$来描述，它是由无穷多个振子的正则坐标q_1，q_2，$\cdots$过渡来的。也就是说一条弦的正则坐标就是函数$\phi(x)$。如果这无穷多个振子的坐标在量子化后变成算符$\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$，$\cdots$，那么由无穷多个$\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$，$\cdots$得到的描述弦的正则坐标也应该是算符，$\phi(x)\to\hat{\phi}(x)$。这就是说由量子化的振子得到的量子化的弦。这种坐标的函数$\phi(x)$从数学上讲当然就是一种场。

总结前面得到的结论：

1. 要想描述产生和消失就必须用场；

2. 经典场可以描述产生和消失，但这种产生和消失引起的能量变化是连续的。因此不能用来描述具有确定质量粒子的产生和消失。

3. 要想描述具有确定质量粒子的产生和消失就必须用量子化的振子构成的场（因为量子化振子的能级间隔是分立的而且是等间距的）。这相当于要求自由场方程的阶数必须不能超过二阶，场量不能超过一次。

总结一下就是

经典场中场的强度的变化→连续的能量的产生和消失，
量子场中场的强度的变化→分立能量的产生和消失，
量子的振子场中场的强度的变化→能量以相同大小一份一份地产生和消失：粒子的产生和消失。

按照前面的分析，由无穷多个量子化振子构成的场的正则坐标也是一个算符，场算符。既然是算符，在进一步做下去之前我们就要回答这样一个问题：

场算符是什么空间中的算符？

4.1 场的态和态空间

算符只有在指明它所作用的态空间之后才真正有意义。一个不谈态的算符是没有意义的。所有算符运算都是作用在态上的，只是有些情况算符运算的结果对所有态都成立，就不明确一一标出态罢了。

4.1.1 态和态空间

那么场算符的态空间是什么呢。

在量子力学中，我们将力学量看作算符，态空间是Hilbert空间。我们知道这是一个单粒子的态空间，这个态空间是由粒子所有可能的状态张成的。

但是，我们之所以引入场理论就是为了克服固定粒子数的力学在对粒子产生和消失的描述上的局限。在经典场中场的强度的变化描述的就是产生和消失；自然量子化后的场，也就是场算符，描述的也将是产生和消失，是粒子的产生和消失（需要说明的是，无论是经典场描述的产生和消失还是量子场描述的产生和消失都必然是能量的产生和消失）。

既然场算符描述的是粒子的产生和消失，那么恒定粒子数的Hilbert空间肯定不是场算符的态空间。因为场算符的作用必将引起粒子数变化。也就是说，场算符的作用在Hilbert空间上不封闭。因此Hilbert空间不是场算符的态空间。

构造一个场算符的态空间是直接的。作为一个算符的态空间必须在该算符的作用下封闭。既然场算符的作用会引起粒子数的变化。那么一个直接的做法就是将不同固定粒子数的Hilbert空间加在一起，构成一个由无穷多个，包含各种粒子数的Hilbert空间的大的态空间。显然场算符在这个空间中的作用是封闭的。

如果我们用H^n表示n个粒子的Hilbert空间，这样场算符的态空间就是

$$\mathcal{H}_{Fock} = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^n \oplus \cdots .$$

这个空间称Fock空间，也叫巨Hilbert空间。

顺便说一下，为什么引入了任意多个有限粒子数的Hilbert空间就可以描述粒子的产生和消失了呢。原因是微妙的。将不管多大但有限数目的Hilbert空间加起来是不能描述粒子的产生和消失的。这是因为只要数目有限，不管多大，总可以通过加入足够多的粒子的办法使场算符的作用不封闭。但是，任意大其实就是无穷大的一种讼师式的说法。无穷大加任意数都仍然是无穷大。所以场算符的作用就封闭了。这就是说，要想描述粒子的产生和消失，就必须引入无穷大的自由度。这很微妙，甚至有些骗人，但确实是个不错的说法。

4.1.2 真空态（基态），真空态的Lorentz不变性

我们的出发点是相对论，一切都必须是Lorentz不变或协变的。这里我们引入了态，那么这个态是否符合相对论的要求呢。我们必须试试看。

最基础的态就是基态。基态是这样的态，它必须是能量最低的。对一个自由的系统，也就是没有相互作用的系统来说，我们选择能量和动量都为零的态作为基态。这也是我们也称基态为真空态的原因。基态有简并和不简并两种情况，我们这里考虑不简并的情况，即只有一个能动量最低的态。对简并的情况我们就考虑其中的一个。

我们来看看能量和动量为零的真空态在Lorentz变换下的性质。所谓一个能动量为零的态，意思就是能量和动量（一共有三个分量）在这个态上都有确定的取值，这个值是零。一个能动量有确定值的态（四动量的四个分量彼此对易）当然是能动量的本征态：

$$p^\mu |0\rangle = 0 |0\rangle .$$

看一个态是否Lorentz不变的就是看这个态在Lorentz群的变换下是否不变。在这里我们只需看这个态在Lorentz群的生成元$J^{\rho\sigma}$的作用下是否不变就可以了。$J^{\rho\sigma}|0\rangle$给出了一个态，如果真空态$|0\rangle$在Lorentz变换下不变，那么$J^{\rho\sigma}|0\rangle$与$|0\rangle$就应该是同一个态，即$J^{\rho\sigma}|0\rangle$与$|0\rangle$只能差一个常数，即

$$J^{\rho\sigma}|0\rangle \stackrel{?}{=} c^{\rho\sigma}|0\rangle .$$

这里的常数$c^{\rho\sigma}$也带Lorentz指标是为了保持协变性。既然Lorentz变换后的态$J^{\rho\sigma}|0\rangle$与$|0\rangle$只差一个常数，那么$J^{\rho\sigma}|0\rangle$一定也应是四动量p^μ的本征值为零的本征态：

$$p^\mu J^{\rho\sigma}|0\rangle \stackrel{?}{=} 0|0\rangle . \tag{4.1}$$

是这样吗？我们来检验一下（以上加问号的等式都是待验证的）。

因为我们知道$p^\mu|0\rangle$的结果，将p^μ移动到$|0\rangle$旁边：

$$\begin{aligned} p^\mu J^{\rho\sigma}|0\rangle &= [p^\mu, J^{\rho\sigma}]|0\rangle + J^{\rho\sigma}p^\mu|0\rangle \\ &= [p^\mu, J^{\rho\sigma}]|0\rangle + 0|0\rangle . \end{aligned}$$

四动量与Lorentz群的生成元$J^{\rho\sigma}$的对易关系我们是知道的

$$[p^\mu, J^{\rho\sigma}] = -i\left(g^{\rho\mu}p^\sigma - g^{\sigma\mu}p^\rho\right).$$

带回上式

$$p^\mu J^{\rho\sigma}|0\rangle = -i\left(g^{\rho\mu}p^\sigma - g^{\sigma\mu}p^\rho\right)|0\rangle + 0|0\rangle = 0|0\rangle .$$

这样就验证了式(4.1)。一个能动量都是零的真空态确实是Lorentz不变的。在此基础上建立起的相对论场论是可以放心的。

同时我们也可以看出，一个能动量不为零的基态不是Lorentz不变的。

4.1.3 零点能

场的基态是一个什么样的基态呢。

猛地看上去，自由场的基态当然就是什么都没有的态。前面我们也提到，我们选择的基态是一个能动量都为零的态。可是等一等，前面我们曾经指出，为了描述能量为一份一份的粒子的产生，我们的场必须是一个具有振子特征的场。振子，我们知道振子的基态能量不是零。谐振子有零点能是量子力学中的一个基本常识。在量子力学中存在零点能的原因是一个被束缚在空间某个区域的态一定具有一个不是零的零点能。这很容易理解：一个被束缚在空间某个区域的粒子，它的位置在某种程度上就被确定了。自然，它的动量的测不准度就不是零。因此存在零点能。[1]现在我们认为自由场是一种振子场。自然就会存在零点能。

零点能是不可避免的，这是测不准关系的体现。一个粒子总可以凭空产生，只要它能够在测不准关系规定的时间和空间限度内消失。这种产生自虚空粒子是有着直接的可观测效果的：这些幽灵般的粒子可能会碰到在轨道上运动着的电子，这会改变这个电子的能量，从而改变能级结构，这就是Lamb移动；可以影响对这个电子磁矩的测量，这就是反常磁矩。所有这些都是纯粹的量子效应。后面我们会看到，在微扰论中，量子效应将出现在圈图中，因此计算这种纯量子效应需要计算圈图。而圈图会发散，需要做一种所谓的重正化的处理。经典体现在树图中，所以经典贡献不会有这种发散，不需要重正化。因此，重正化是量子理论的特征。

前面提到过，只有一个能动量为零的基态才是Lorentz不变的。那么这里出现的零点能会不会破坏Lorentz不变性呢。不会的，这种由于测不准性带来的能量，虽然有实实在在的可观测效应，但它仍不是经典理论中那种实实在在的能量。这种能量是一种纯粹的量子效应。这样产生的粒子是所谓虚粒子。而前面说的基态中能量为零，是指实粒子的能量，就是经典理论中的那种能量。

零点能除了Lamb移动、反常磁矩这样的微观效应外，还可以有宏观的体现。我们来看一下Casimir效应。

---

[1]对比一个位置完全确定的的粒子的动量完全不能确定的情况：位置完全确定的粒子的波函数为$\psi(0) = \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx}$。此时显然动量取所有可能值。同样，对动量确定的粒子，动量表象下的波函数为$\psi(0) = \delta(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-ipx}$，位置完全不确定。

4.1.4 Casimir效应

4.2 因果律，场量子化条件（标量场情况）

前面的分析表明，我们必须将场量理解为算符$\hat{\phi}(x)$。它将引起粒子的产生和消失。既然是算符，那么场算符间就会满足一定的代数关系，这就是量子化条件。那么场算符间应该满足什么样的量子化条件呢。

前面的分析表明，如果将场量$\phi(x)$理解为相对论量子力学中的波函数，那么结果将是破坏相对论下的因果律。现在我们将场量理解为算符，当然首先就要考虑如何使它们满足因果律的要求。

在相对论量子力学的理解中，我们将$\phi(x)$理解为一个粒子出现在x点的几率振幅。说明一点，前面计算的其实是粒子由$(0,\mathbf{0})$点传播到$(t,\mathbf{x})$点的几率振幅，本质上是个点源响应，也就是Green函数。只是我们将初始点取成$(0,\mathbf{0})$而没有将初始点随时标记出来容易引起些误解。这里我们从场的观点出发来重新考虑粒子由$(0,\mathbf{0})$点传播到$(t,\mathbf{x})$点的几率振幅。看看有没有可能不破坏因果律。

场算符$\hat{\phi}(x)$在量子力学的框架下被理解成一个粒子出现在x点的几率振幅；在经典场的框架下可直接用来描述产生和消失。**场在量子化之后，我们通过与经典场对比猜测它一定在描述粒子的产生和消失，因为经典场$\phi(x)$就是通过改变场的强度来描述在x点的以该场为载体的能量的产生和消失的。由于我们的场是量子化的，所以以该场为载体的能量的产生和消失是一份一份的。又因为我们的场本质上是一种谐振子场，所以这种以场为载体的一份一份的能量可以描述粒子的产生和消失。**因此我们猜测场算符$\hat{\phi}(x)$作用在真空态$|0\rangle$上给出的将是

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle$$

将是在x点产生一个粒子的几率振幅。这个假设的依据是

1. 只要是量子理论就是几率性的。一个起产生作用的场算符作用在态空间中的任何一个态上给出的都将是态空间中的另一个态（态算符的作用是封闭的）。因此$\hat{\phi}(x)|0\rangle$一定是一个新的几率振幅。

2. 在这里场算符的作用是产生而不是消失是因为$|0\rangle$已经是真空态了，没有什么可消失的了。所以我们考虑它是产生的情况（消失的情况另有特别的意义）。

3. 我们将$\hat{\phi}(x)$作用在$|0\rangle$上只产生一个粒子作为我们的一个假设，后面将在这个假设的基础上得到正则量子化条件中的一条（尝试要求它与场的Hamilton量对易只产生一个粒子，即$[\hat{\phi}(x),\hat{H}(x)]=\hat{\phi}(x)\Rightarrow[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(x)]=1$）。

这样，场观点下在x点产生一个粒子的几率和量子力学观点下一个粒子出现在x点的几率应该是一样的。

$$\underbrace{\hat{\phi}(x)|0\rangle}_{\text{场观点下在}x\text{点产生一个粒子的几率振幅}} = \underbrace{\phi(x)}_{\text{量子力学观点一个粒子出现在}x\text{点的几率振幅}}$$

注意，这里的$\phi(x)$和$\hat{\phi}(x)|0\rangle$都是在一个点出现粒子的几率振幅，不是前面讲的一个粒子由x_0点出发传播到x点的几率振幅。从某一点传播到另一点的几率振幅本质上是Green函数。但是从某种意义上讲，我们可以将Green函数理解成不关心历史的波函数。这一点可参照式(2.5).

前面当我们将所得到的相对论方程解释为相对论量子力学的波动方程的时候，算出了一个在$y=(0,\mathbf{0})$点产生一个粒子，这个粒子运行到$x=(t,\mathbf{x})$点的几率振幅。在场观点下，粒子在x点和y点的几率振幅是$\hat{\phi}(y)|0\rangle$和$\hat{\phi}(x)|0\rangle$，自然粒子由x点运动到y点的几率振幅是它们的内积：

$$\left(\hat{\phi}(x)|0\rangle,\hat{\phi}(y)|0\rangle\right)=\left(\hat{\phi}(x)|0\rangle\right)^{\dagger}\hat{\phi}(y)|0\rangle=\langle 0|\left(\hat{\phi}(x)\right)^{*}\hat{\phi}(y)|0\rangle=\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle,$$

其中$\left(\hat{\phi}(x)\right)^{*}=\hat{\phi}(x)$，因为我们考虑的是实标量的情况。

可以看到，场算符的平均值是几率振幅。这并不奇怪，因为我们的场量子化就是将本来是一个数的几率振幅$\phi^{(+)}(x)$变成了算符$\hat{\phi}^{(+)}(x)$。将一个算符变成数的最直接的办法显然就是求平均值。

我们在这里考虑的是一个粒子的传播（不是两个粒子一起考虑），比如，考虑一个正粒子的传播，那么这里正粒子由y点运动到x点的几率振幅应该与量子力学图景下得到的几率振幅相同。由式(2.35)我们知道量子力学图景下得到的一个正粒子由$y=(0,\mathbf{0})$点运动到$x=(t,\mathbf{x})$的几率振幅为$\phi^{(+)}(\mathbf{x},t)=i\Delta^{(+)}(x)$。所以

$$\underbrace{\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)|0\rangle}_{\text{场观点}}=\underbrace{\phi(x)|_{\text{正能粒子}}}_{\text{量子力学观点}}.$$

注意，这是我们的猜测，不是推导结果。于是有

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)|0\rangle=i\Delta^{(+)}(x).$$

原来为了方便我们将初始点取做$y=(0,\mathbf{0})$，这里我们将这个结果写回更普遍的形式，即由y点运动到x点的普遍形式：

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle=i\Delta^{(+)}(x-y). \tag{4.2}$$

我们已经知道这个几率振幅是违背因果律的。因为它允许类空的传播。就是说，**我们即使将前面得到的相对论方程解释为场方程，也仍然不能解决这个因果律问题。要想解决违背因果律的问题我们需要引入新的假设**。其实，问题的根本原因在于相对论的要求与单粒子图像本质上是冲突的。我们不可能在一个单粒子图像下给出一个不违背因果律的结果。

所谓符合因果律的要求，就是让类空传播的几率是零。前面的我们曾经做过一个使类空的结果为零的尝试，当时的结果表明，从技术上讲，$\Delta^{(+)}(x-y)$不是零，但是如果引入另一个函数$\Delta^{(-)}(x-y)$，由式(2.37)，就可以有$\left[\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)\right]\big|_{s^2<0}=0$的结果。因此现在的问题就变成了看看如何由场算符得到函数$\Delta^{(-)}(x)$。

做到这点并不难，式(2.33)给出了关系$\left[\Delta^{(+)}(x)\right]^*=\Delta^{(-)}(x)$。这样只需对式(4.2)两边取复共轭就可以了：

$$\begin{aligned}\left[\langle 0|\,\hat\phi(x)\,\hat\phi(y)\,|0\rangle\right]^* &= \left[i\Delta^{(+)}(x-y)\right]^*\\ \langle 0|\,\hat\phi(y)\,\hat\phi(x)\,|0\rangle &= -i\left[\Delta^{(+)}(x-y)\right]^*\\ \langle 0|\,\hat\phi(y)\,\hat\phi(x)\,|0\rangle &= -i\Delta^{(-)}(x-y)\,.\end{aligned}$$

所以我们有

$$i\Delta^{(-)}(x-y)=-\langle 0|\,\hat\phi(y)\,\hat\phi(x)\,|0\rangle\,. \tag{4.3}$$

将式(4.2)与(4.3)相加得到

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\hat\phi(x)\,\hat\phi(y)\,|0\rangle-\langle 0|\,\hat\phi(y)\,\hat\phi(x)\,|0\rangle &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\\ \langle 0|\,\hat\phi(x)\,\hat\phi(y)-\hat\phi(y)\,\hat\phi(x)\,|0\rangle &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\,.\end{aligned}$$

用对易括号的形式表示就是

$$\langle 0|\left[\hat\phi(x)\,,\hat\phi(y)\right]|0\rangle=i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\,.$$

我们将这个结果的类时和类空的情况分别写出来就是

$$\begin{aligned}\langle 0|\left[\hat\phi(x)\,,\hat\phi(y)\right]|0\rangle\Big|_{s^2>0} &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\big|_{s^2>0}\neq 0, \quad \text{类时；}\\ \langle 0|\left[\hat\phi(x)\,,\hat\phi(y)\right]|0\rangle\Big|_{s^2<0} &= i\Delta^{(+)}(x-y)+i\Delta^{(-)}(x-y)\big|_{s^2<0}=0, \quad \text{类空。}\end{aligned} \tag{4.4}$$

显然，到了这里，虽然我们确实凑出了一个不破坏因果律的东西，但是却实质上已经放弃了单粒子图像，因为我们同时考虑了两个传播过程。

这个结果实质上表明，因果律实质上给出了对场算符的约束条件，也就是式(4.4)。这个约束条件的意义非常清楚：它要求两个不同时空点上的场算符，如果间隔是类时的则彼

此间可以互相影响，这种影响体现在这两个不同时空点上的场算符不对易上，不对易就是说，操作顺序不同，其结果也不相同，这显然是在说它们之间存在着关系；如果间隔是类空的，则两算符彼此间不能有任何影响，也就是两算符对易。这体现的正是因果律的要求：**相互影响的两个事件一定是类时的，类空的两个事件间不能有联系**。这个条件其实对类时没有什么要求，但类空必须是零。因此这个条件可以写成

$$\langle 0| \left[\hat{\phi}\left(x\right), \hat{\phi}\left(y\right)\right] |0\rangle = 0, \quad \text{如果} s^2 < 0\text{（类空）。}$$

这个要求实在平均值意义下的，换句话是，这个一个针对基态的平均值条件。如果我们加强一下要求，认为这个要求对任意态成立，则这个条件就变成了一个算符条件

$$\left[\hat{\phi}\left(x\right), \hat{\phi}\left(y\right)\right] = 0, \quad \text{如果} s^2 < 0\text{（类空）。}$$

这个条件比刚才要强得多，我们以后其实是在这个条件下工作的，其实这就是场的正则量子化条件中的一条。

我们的处理完全是在相对论的框架下进行的，所得到的结果都是Lorentz不变的。式(4.4)中的结果在任何参照系中都成立。针对类空情况我们考虑一个特殊的参照系，在这个参照系中两个事件是同时发生的。即$x^0 = y^0$。同时的当然是类空的，否则就是超距作用了。在这种情况下我们显然有

$$\langle 0| \left[\hat{\phi}\left(\mathbf{x}\right), \hat{\phi}\left(\mathbf{y}\right)\right] |0\rangle = 0, \quad x^0 = y^0.$$

同样，如果我们将这个平均值意义下的要求加强成算符条件则有

$$\left[\hat{\phi}\left(\mathbf{x}\right), \hat{\phi}\left(\mathbf{y}\right)\right] = 0, \quad x^0 = y^0.$$

后面我们会看到，这就是正则量子化方案中的等时对易关系。

换句话说，场的正则量子化条件其实是因果律强加给我们的。

4.3 因果律，场量子化条件（旋量场情况）

由前面得到的结果，以与标量场相同的方式可以得到旋量场必须用反对易关系量子化的条件。（练习）

第五章　总结

前面的结果表明：

如果

1. 我们要求理论必须是相对论性的，
2. 我们要求理论符合因果律（不能超光速），
3. 我们要求世界是稳定的（这将要求能量有下界，即不能有真正的负能量），

那么

1. 必须用量子化的场来描述我们的世界，即场量被看作是算符，必须放弃力学的观点（即相对论量子力学），
2. 必须引入反粒子（如不引入反粒子就必须接受负能量，世界将不稳定），
3. 标量场以及自旋为整数的场的场量，量子化后就是场算符，必须满足对易的量子化条件；旋量场这样的自旋半整数的场的场量必须是反对易的。

当然在整个推导中我们还做了其它要求：

1. 要求了定域描述，
2. 要求了世界上的粒子可以被分成几类，每类中粒子质量都是相同的（这要求我们的场方程必须具有量子化谐振子特征，这条要求使自由场方程的阶数必须不能超过二阶，场量不能超过一次，因为谐振子就是这样的）。

第二部分

经典场

第六章　经典场I：一般描述

6.1　场的概念和描述，定域场

在回答什么是场之前，先来看看什么是粒子?我们不妨这样定义粒子：定域在空间某个点物体就是粒子；或者说，可以用有限多个坐标来描述的物体就是粒子。

好了，我们已经可以描述什么是场了。场就是针对粒子而言的。弥漫在空间某个区域的物体就是场。要描述场，我们必须给出这个区域内的每个点上的值。显然，在一个连续的空间中，这需要无穷多个值。也就是说，场的自由度是无穷大的。

这件事可以反过来说：如果你在空间的每个点上放一个量，就得到了一个场。显然，这需要无穷多个量，也就是说，自由度是无穷大。每个点放一个标量，就得到一个标量场；放一个旋量，就得到一个旋量场；放一个矢量，就得到一个矢量场...。（顺便说一下，在空间的每个点上放点儿什么总是个好想法，比如，粗略地讲，你在空间的每个点上建一个坐标系，你就得到了一个纤维丛。）

6.1.1　力学与场论

力学描述的对象是粒子。描述粒子要做的是指明它在空间中的位置。

场论描述的是场。描述场要做的是指明场在空间某个位置的取值。

力学描述的是有限大自由度的力学体系；场论描述的是无穷大自由度的体系。下面我们来做一个比喻性的描述。如果我们要描述一群数量巨大的粒子。原则上我们可以用力学的观点给出所有这些粒子的坐标，并列出一个数量等于系统自由度数的运动方程组，然后求解。你知道这基本上是不可能的（对弱耦合的谐振子系统我们还算有点办法）。但是我们也可以换一个思路：不去描述某个粒子在某个时间出现在某个地点的问题。而考虑在某个时间某个地点附近会出现多少个粒子。显然，在这种框架下，粒子越多，描述得越精确。当粒子足够多时，比如有无穷多个粒子，系统可以过渡到一个连续的极限。某个点附近有多少个粒子的这种描述可以转化成对某点处密度的描述。于是，空间的每个点上就有一个

密度值，这样我们就得到了一个密度场。于是，一个多自由度的力学问题通过被就转化成了一个无穷大自由度的力学问题而变成了一个场理论。

多粒子系统的场描述：

在力学的观点下，我们的注意力在于逐一给出每一个粒子的位置，其中第i个粒子在时刻t的位置用它的坐标来描述：

$$x_i\left(t\right).$$

转换成场观点后我们关注的是t时刻在原来这个第i个粒子所在的空间位置x_i点处的粒子数的密度

$$\varphi\left(x,t\right).$$

也就是说我们做了如下的转化

$$x_i\left(t\right)\rightarrow\varphi\left(x,t\right).$$

其中多粒子系统中某个粒子的标记i变成了它的坐标x，而对该粒子位置的描述，也就是坐标，变成了该位置处的粒子数密度。这个转变的一个深刻之处在于，在力学中时间的地位是微妙的。虽然位置是物理量，但时间不是物理量。时间是作为一个参数出现的。这样一来在力学中空间坐标和时间是完全不对称的。感觉总有些古怪。但在场观点中，空间坐标和时间的位置平等了，它们都不再是物理量了，所起的都是一个参数的作用。此时空间坐标x的作用与力学中标记粒子的参数i是一样的。于是力学中对i的求和将变成对x的积分。

总结一下就是，在将力学的观点变换成场观点时要做如下替换：

$$\begin{gathered}x_i\left(t\right)\rightarrow\varphi\left(x,t\right),\\ i\rightarrow x,\\ \sum_i\rightarrow\int dx.\end{gathered}\tag{6.1}$$

单粒子系统的场描述：

前面我们从多粒子图像讨论了从力学观点到场观点的过渡。一个问题是如果我们关心的是一个单粒子问题，如何考虑这个过渡。

在经典力学中，物体是定域在空间某个位置上的粒子。描述这样的粒子我们给出它的位置矢量

$$\mathbf{r}\left(t\right)=\left(x_i\left(t\right)\right),\quad i=1,2,3.$$

位置矢量$\mathbf{r}\left(t\right)$由经典力学的动力学方程来确定。确定三维空间中的一个位置矢量$\mathbf{r}\left(t\right)$要给出全部三个分量，这三个分量用参数i描述。

量子力学启发我们可以用波的观点来描述一个单粒子。这个波当然是弥漫在全空间的，我们用

$$\varphi(\mathbf{x}, t)$$

来描述它。$\varphi(\mathbf{x}, t)$由经典的波动方程来描述（也就是前面我们得到的各种相对论性方程，在非相对论近似下便是Schrödinger方程）。注意，在这里，各种波动方程都是经典的，因为$\varphi(\mathbf{x}, t)$是一个数而不是算符。要想确定$\varphi(\mathbf{x}, t)$显然要给出$\varphi(\mathbf{x}, t)$在空间每个点的值，这需要无穷多个分量，这无穷多个分量用参数$\mathbf{x}$来描述，也就是说系统的自由度是无穷大的。一个无穷大自由度的系统当然是一个场，就是说$\varphi(\mathbf{x}, t)$是一个场。这就是说当我们用场$\varphi(\mathbf{x}, t)$代替$\mathbf{r}(t)$来描述一个粒子时，我们已经由有限大自由度换成了无穷多自由度。做这种代换后，在力学中对参数i的求和$\sum_i$变成了对连续参数$\mathbf{x}$的积分$\int d\mathbf{x}$。这就是(6.1)中的代换。

6.1.2 最小作用量原理

在力学中，经典力学的运动方程（牛顿方程$F = ma$或等价的Euler-Lagrange方程）可由最小作用原理得到。经典的场方程（我们说过，从物理的角度上讲场就是无穷大自由度力学系统的力学）也服从最小作用原理。就是说经典运动都是符合最小作用原理的。在基本原理中，最小作用原理在表述和理解上是最简单的，从而也是最深刻的。当然，回答最小的是什么并不是一件容易的事。我们不妨称之为作用量。（关于作用量的的引入见《理论力学讲义》）。于是力学和场的经典运动方程都可表示为

$$\delta S = 0.$$

没一条可能的运动轨道都对应一个作用量，也就是说作用量是轨道的函数。轨道本身就是用函数来表示的，因此作用量是函数的函数，称为泛函（后面我们会更详细地介绍泛函）。

作用量中包含的是整条轨道的信息，要将整条轨道而不是某一个点的信息包含在一个数中（作用量泛函将每条轨道给对应成一个数，就像函数将一个数对应成一个数一样），显然最直接的办法便是对整个过程积分。就是说我们可以将作用量表示成一个包含运动信息的函数对整个运动过程的积分。那么这个包含运动信息的函数应当怎样构造呢。从原则上讲，要与实验对比；从操作上讲，我们可以从对称性出发来构造。从实验的总结出的经验告诉我们，坐标和它的一阶导数可以完全确定一个经典系统的状态。因此我们假设这个与运动有关的函数是坐标和坐标一阶导数的函数这个函数称为Lagrange量。因此作用量可以写成

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

的形式。

经典理论满足最小作用量原理，在量子力学中，我们认为粒子以权重e^{iS}走所有可能路径。

下面我们只关注场，也就是无穷大自由度的情况。

6.1.3 Lagrange表述和Hamilton表述

运动方程当然可以有许多等价的形式。这里我们将给出Lagrange方程和Hamilton正则方程。Lagrange方程与Hamilton方程相差一个Legendre变换。拉氏表述中的动力学变量是广义坐标和广义速度；哈氏表述中的动力学变量是广义坐标和广义动量。这两个方程知道了一个就可以通过Legendre变换立刻得到另一个。当然它们都可以从最小作用原理直接得到。

我们熟悉的运动方程的另一个表述就是牛顿的矢量分析的表述。但是我们将看到，Lagrange表述和Hamilton表述显然是更深刻的形式（这丝毫不影响牛顿的光辉）。因为由这两种表述我们可以很容易地过渡到量子理论：Lagrange表述给出量子理论的路径积分表述；Hamilton表述将给出量子理论的正则量子化的表述。

6.1.4 场的Euler-Lagrange方程：分量形式

在有限大自由度的力学中，我们为每一个自由度写下了一个运动方程。那么如何处理一个无穷大自由度的场呢，总不能为无穷多个自由度写下无穷多个方程啊。场$\varphi(\mathbf{x},t)$在空间的每个点都有一个取值（这里我们只考虑定域场）。这个取值是连续的。在任何一个有限大体积内都会有无穷多个取值。而作为出发点，现在我们只有有限大自由度力学的知识。我们先将无穷大自由度的场改造成有限大自由度的系统。可以这样做这件事。将空间分成若干小份（如果空间是无穷大的，那么就有无穷多份。但是这没关系，关键是这是可数的），为每个小份做一个标记i，每份的体积为V_i（图1）。当然在每一小份中场$\varphi(\mathbf{x},t)$仍有无穷多个取值。为了使自由度变成分立自由度，我们在这个小体积内对场$\varphi(\mathbf{x},t)$取平均

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\varphi(\mathbf{x},t)\,.$$

这样我们得到的$\varphi_i(t)$与力学中的$x_i(t)$已经完全一样了。这样我们就可以为每一个$\varphi_i(t)$写一个与力学中一样的运动方程了。此时的系统是一个可数的多自由度系统，它的Lagrange量是

$$L(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots)\,.$$

这样作用量便是

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dtL\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right). \tag{6.2}$$

运动方程可由最小作用原理直接得到：

$$\delta S=0.$$

由此可直接得到运动方程：

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_{t_1}^{t_2}dtL\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right).\end{aligned}$$

注意，变分和微分、积分可以交换顺序（见理论力学讲义）。其中对Lagrange量的变分为

$$\delta L\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right)=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i\right).$$

变分和微分交换顺序

$$\delta\dot{\varphi}=\frac{d}{dt}\delta\varphi,$$

于是

$$\begin{aligned}\delta L&=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\frac{d}{dt}\delta\varphi_i\right)\\&=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i\right].\end{aligned}$$

代回作用量变分中

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i+\sum_i\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i+\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\varphi_i\Big|_{t_1}^{t_2}\right).\end{aligned}$$

我们这里考虑的是等时变分（简单变分），$\delta\varphi_i$在两端的取值为零

$$\delta\varphi_i\left(t_1\right)=\delta\varphi_i\left(t_2\right)=0.$$

于是最小作用原理要求

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\right)\delta\varphi_i=0.$$

这里的$\delta\varphi_i$是一个任意的变分，这要求被积函数是零，即

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}=0.$$

这是是一个方程组。是场的运动方程——Euler-Lagrange方程——的分量形式。每一个i就是一个场的分量，一共有多少个方程取决于我们将空间分成多少份。显然，对一个连续的场来说方程有无穷多个。

6.1.5 场的Euler-Lagrange方程：泛函形式

前面将连续的无穷大自由度的场离散化了，得到了一个由无穷多个自由度组成的方程组。此时的拉氏量$L\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right)$是无穷多个变量$(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots)$的函数。$\varphi_i$是我们将场离散化得到的。但是我们的定域化假设要求场量$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$是连续函数。这就要是说这无穷多个变量$\cdots,\varphi_i,\cdots$连在一起其实是连续函数$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$。这就是说拉氏量$L\left(\cdots,\varphi_i,\cdots;\cdots,\dot{\varphi}_i,\cdots\right)$此时可以看作是一个函数$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$的函数。也就是说，它是一个泛函。

关于泛函的数学小补充

可以这样理解泛函。考虑一个多变量的函数$F\left(y_1,y_2,\ldots y_N\right)$，这里$F$当然是变量$y_1,y_2,\ldots y_N$的函数。但是，如果相邻的两个变量变得非常接近，从而变量的个数趋于无穷，那么显然这些变量$y_1,y_2,\ldots y_N$的下标$1,2,\cdots N$将变成一个连续参数，我们用x来表示，即

$$1,2,\cdots N\rightarrow x,$$

。这样变量y_i就变成了连续参数x的函数，即

$$y_1,y_2,\ldots y_N\rightarrow y=y\left(x\right).$$

自然原来$y_1, y_2, \dots y_N$的函数$F(y_1, y_2, \dots y_N)$就变成了$y(x)$的函数，即

$$F(y_1, y_2, \dots y_N) \to F[y(x)].$$

这种函数的函数我们称之为泛函。

对于泛函我们也可以做微积分。这里我们先来看看泛函的微分。我们并不打算严格地处理这个问题，只想通过与普通函数的微分做类比给出泛函微分。泛函的微分我们称作变分。

普通函数的微分是这样求的

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i) \\ &= \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$

仿照函数微分我们很容易得到泛函微分，也就是变分

$$\begin{aligned} \delta F[y(x)] &= F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)] \\ &= \int dx \frac{\delta F[y(x)]}{\delta y(x)} \delta y(x). \end{aligned}$$

这里其实就是做了替换$x_i \to y(x)$和$\sum_i \to \int dx$。

在将离散化的场量写成一个函数后，我们得到了一个作为场量泛函的拉氏量：

$$L(\cdots, \varphi_i, \cdots; \cdots, \dot{\varphi}_i, \cdots) \Rightarrow L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)].$$

于是式（6.2）变成了

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)]. \tag{6.3}$$

这是一个泛函形式的表达，由此当然我们也可以得到泛函形式的运动方程。

运动方程是由最小作用原理决定的，最小作用原理告诉我们经典系统按照使作用量最小的方式演化，即

$$\delta S = 0.$$

想要得到运动方程只需对式(6.3)求变分就是了：

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)].$$

变分和微分、积分可以交换顺序（见理论力学讲义），于是

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L\left[\varphi\left(\mathbf{x},t\right),\dot{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)\right].$$

其中对Lagrange的变分为

$$\delta L\left[\varphi\left(\mathbf{x},t\right),\dot{\varphi}\left(\mathbf{x},t\right)\right]=\int d^3x\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right).\tag{6.4}$$

变分和微分交换顺序

$$\delta\dot{\varphi}=\frac{d}{dt}\delta\varphi,$$

于是

$$\begin{aligned}\delta L&=\int d^3x\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\frac{d}{dt}\delta\varphi\right)\\&=\int d^3x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi\right].\end{aligned}$$

代回作用量变分中

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_1}^{t_2}dt\delta L\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right]\delta\varphi+\int d^3x\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right]\delta\varphi+\int d^3x\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\varphi\bigg|_{t_1}^{t_2}\right).\end{aligned}$$

我们这里考虑的是等时变分（简单变分），$\delta\varphi$在两端的取值为零

$$\delta\varphi\left(\mathbf{x}_1,t_1\right)=\delta\varphi\left(\mathbf{x}_2,t_2\right)=0.$$

于是最小作用原理要求

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x\left[\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\right]\delta\varphi=0.$$

这里的$\delta\varphi$是一个任意的变分，这要求被积函数是零，即

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}=0.$$

这就是场的运动方程，Euler-Lagrange方程的泛函形式。

6.1.6 场的Euler-Lagrange方程：微分形式

为了描述经典场，前面首先我们将场离散化得到了分量形式的场的运动方程。但是由于场有无穷多个自由度，所以场方程组也包含了无穷多个方程（每个自由度都有一个方程）。这样的描述当然是很难操作的。随后，我们将无穷多个离散的点过渡到一个函数，得到了描述场的一个泛函方程。但是一个泛函方程是同样是很难操作的。

而且前面得到的方程中，对时间的导数处在了一个特殊的地位上：其中一项是拉氏量对场量时间导数求导。在这里时间和空间是不平权的，不容易得到一个相对论协变的方程。下面我们进一步改造这个方程。

前面的结果表明，描述一个场，如果希望得到一个微分方程而不是泛函方程就必须对场进行逐点描述。但是将场离散化显然不是一个好办法。在分量形式方程的讨论中，拉氏量是场量在空间各点取值平均值的函数，变量有无穷多个，此时得到的是微分方程。在泛函形式中，拉氏量是场量的泛函，得到的是泛函方程。如果我们希望得到一个场的微分方程，显然我们仍应逐点描述，我们的定域假设保证了这是可以做到的。

拉氏量和哈氏量本质上都是广延量性质的量。对这样的量逐点描述是困难的。比如空间有一个质量分布，我们不能谈空间某一点的质量。描述一个这种广延性质的量我们采用的办法是引入密度。密度是强度量性质的量。我们当然可以给出它在空间每个点上的取值。这样质量$m=\lim\limits_{V_i\to 0}\sum_i \rho_i V_i$。对拉氏量（或哈氏量）我们也可以这样处理，引入拉氏密度（或哈氏密度）：

$$\begin{aligned}
L(t) &= \lim_{V_i\to 0}\sum_i \mathcal{L}_i V_i \\
&= \sum_i \lim_{V_i\to 0}\int d^3x\mathcal{L}_i \qquad (6.5)\\
&= \int d^3x\mathcal{L}, \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

其中$\mathcal{L}_i$为第i个小格中的拉氏密度。$\mathcal{L}_i$显然是场量$\varphi(\mathbf{x},t)$在第i个小格中的平均值$\varphi_i(t)$的函数（注意，不是泛函，因为$\varphi_i(t)$只是个数）。$\mathcal{L}_i$显然还是$\dot{\varphi}_i(t)$的函数。但是，象前面提到过的，如果$\mathcal{L}_i$只是$\varphi_i(t)$和$\dot{\varphi}_i(t)$的函数，那么不容易满足相对论协变的要求。要满足协变性的要求，必须让空间分量与时间分量有同等的地位。一个自然的办法是，让$\mathcal{L}_i$同时还是场量空间导数

$$\partial_a\varphi_i(t)=\frac{1}{V_i}\int_{V_i}d^3x\partial_a\varphi(\mathbf{x},t)\equiv\frac{1}{V_i}\int_{V_i}d^3x\frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_a}$$

的函数，其中$a=x,y,z$，即

$$\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_i(\varphi_i(t),\dot{\varphi}_i(t),\partial_a\varphi_i(t)).$$

这里的V_i是第i个小格的体积。写成更便于做相对论处理的形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i &= \mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right), \partial_t\varphi_i\left(t\right), \partial_a\varphi_i\left(t\right)\right)\\ &= \mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right), \partial_\mu\varphi_i\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

当$V_i \to 0$时，我们就可以用这个无穷小小格所处的空间位置$\mathbf{x}$来标记这个小格，于是有

$$\varphi_i\left(t\right) \to \bar{\varphi}\left(\mathbf{x}, t\right) = \lim_{V_i\to 0}\frac{1}{V_i}\int_{V_i} d^3x\varphi\left(\mathbf{x}, t\right).$$

特别要注意的是$\bar{\varphi}\left(\mathbf{x}, t\right)$与$\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)$的本质区别$\bar{\varphi}\left(\mathbf{x}, t\right)$是$\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)$在空间$\mathbf{x}$点处的平均值。其实只有这个平均值才是我们真正关心的量。既是平均值，它就是个数，而不是原来的函数$\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)$（差别是微妙的，但你能理解对吧）。这样

$$\mathcal{L}_i\left(\varphi_i\left(t\right), \partial_\mu\varphi_i\left(t\right)\right) \to \mathcal{L}\left(\bar{\varphi}\left(\mathbf{x}, t\right), \partial_\mu\bar{\varphi}\left(\mathbf{x}, t\right)\right)$$

在不引起误解的情况下，为了方便，下面我们将用符号$\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)$来代替$\bar{\varphi}\left(\mathbf{x}, t\right)$，也就是说，今后我们将$\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)$在平均值意义上进行理解。

由式（6.6）可直接得到作用量

$$\begin{aligned}S &= \int dtL\left(t\right)\\ &= \int dt\int d^3x\mathcal{L}\left(\varphi\left(\mathbf{x}, t\right), \partial_\mu\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)\right)\\ &= \int d^4x\mathcal{L}\left(\varphi\left(\mathbf{x}, t\right), \partial_\mu\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)\right).\end{aligned}$$

由$\delta S = 0$可得运动方程。

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\delta\mathcal{L}\left(\varphi\left(\mathbf{x}, t\right), \partial_\mu\varphi\left(\mathbf{x}, t\right)\right)\\ &= \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\delta\partial_\mu\varphi\right]\\ &= \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\partial_\mu\delta\varphi\right]\\ &= \int d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \overbrace{\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\delta\varphi\right]}^{\text{表面项积分后为零}} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\right]\delta\varphi\right\}\\ &= \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\right]\delta\varphi.\end{aligned} \tag{6.7}$$

$\delta\varphi$是任意的，于是$\delta S=0$给出

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}=0.$$

这样，再做了几次尝试后，通过定域的假设，我们得到了一个微分形式的场方程。

6.1.7 泛函形式和微分形式的关系

前面我们通过分量形式的场方程得到了微分形式的场方程。我们在来看看场方程泛函形式和微分形式的关系。

由式（6.6）和作用量的表达式可知

$$\delta S=\int dt\delta L=\int dtd^3x\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right). \tag{6.8}$$

这是泛函形式的结果。

由式（6.7）知

$$\begin{aligned}
\delta S&=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\delta\partial_\mu\varphi\right]\\
&=\int dtd^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}\delta\partial_a\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\varphi\right)}\delta\partial_t\varphi\right]\\
&=\int dtd^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}\partial_a\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\dot{\varphi}\right)}\delta\dot{\varphi}\right]\\
&=\int dtd^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\overbrace{\partial_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}\delta\varphi\right]}^{\text{空间积分表面项为零}}-\partial_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}\right]\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\dot{\varphi}\right)}\delta\dot{\varphi}\right\}\\
&=\int dtd^3x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}\right]\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\dot{\varphi}\right)}\delta\dot{\varphi}\right\}
\end{aligned}$$

与式（6.8）对比：

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}, \tag{6.9}$$

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}. \tag{6.10}$$

这就是说在做了定域的假设后，我们将一个泛函导数变成了一个普通导数。

6.1.8 场的Hamilton正则方程

前面给出的是Lagrange方程，这里我们给出场的Hamilton正则方程。Lagrange方程与Hamilton方程相差一个Legendre变换。拉氏表述中的动力学变量是广义坐标和广义速度；哈氏表述中的动力学变量是广义坐标和广义动量。为此我们要先得到场的广义动量。

6.1.9 正则动量，Legendre变换和Hamilton量

象在拉氏表述的处理中一样，我们可以从分量形式和泛函形式分别得到Hamilton正则方程。但是这里我们不准备重复前面的内容，而是尽量直接利用前面的结果得到Hamilton正则方程。我们将直接利用泛函形式的结果。

在有限大自由度的力学中，正则动量就是Lagrange量对广义速度的导数：$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$。类比前面泛函形式的结果我们可以知道这个一个自由度的正则动量的定义可以表述成

$$\pi(\mathbf{x},t)\equiv\frac{\delta L(t)}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)}.$$

在式（6.10）中我们给出了泛函形式和微分形式的对比$\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$，可知

$$\pi(\mathbf{x},t)\equiv\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)}.$$

这样由Legendre变换我们可以由拉氏量得到哈氏量，在力学中Legendre变换变换为$H=\sum_i p\dot{q}-L$。在前面给出的力学和场的对应中我们有$\sum_i\rightarrow\int d^3x$，这样

$$H(t)=\int d^3x\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-L(t). \tag{6.11}$$

用拉氏密度表示拉氏量

$$L(t)=\int d^3x\mathcal{L}(\mathbf{x},t).$$

则有

$$\begin{aligned}H(t)&=\int d^3x\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-\int d^3x\mathcal{L}(\mathbf{x},t)\\&=\int d^3x\left[\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-\mathcal{L}(\mathbf{x},t)\right].\end{aligned}$$

引入哈氏密度

$$\mathcal{H}(\mathbf{x},t)\equiv\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-\mathcal{L}(\mathbf{x},t)$$

有

$$H(t)=\int d^3x\mathcal{H}(\mathbf{x},t).$$

当然，这里我们也引入了定域假设。

场的Hamilton正则方程：泛函形式

同样，由最小作用原理，$\delta S=0$，我们可以得到Hamilton正则方程，只需将动力学变量换成正则坐标和正则动量。由式(6.11)知

$$L(t)=\int d^3x\pi(\mathbf{x},t)\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)-H(t).$$

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int dtL\\&=\delta\int dt\left[\int d^3x\pi\dot{\varphi}-H\right]\\&=\int dt\left[\int d^3x\delta(\pi\dot{\varphi})-\delta H\right]\\&=\int dt\left[\int d^3x(\delta\pi\dot{\varphi}+\pi\delta\dot{\varphi})-\delta H\right]\end{aligned}$$

其中

$$\pi\delta\dot{\varphi}=\pi\partial_t\delta\varphi=\partial_t(\pi\delta\varphi)-\partial_t\pi\delta\varphi.$$

于是

$$\begin{aligned}\delta S&=\int dt\left[\int d^3x\left[\delta\pi\dot{\varphi}+\partial_t(\pi\delta\varphi)-\partial_t\pi\delta\varphi\right]-\delta H\right]\\&=\int dt\left[\int d^3x(\delta\pi\dot{\varphi}-\partial_t\pi\delta\varphi)-\delta H\right]+\int d^3x\int dt\overbrace{\partial_t(\pi\delta\varphi)}^{\text{表面项为零}}\\&=\int dt\left[\int d^3x(\delta\pi\dot{\varphi}-\dot{\pi}\delta\varphi)-\delta H\right].\end{aligned}$$

其中哈氏量是坐标和动量的泛函，即$H[\varphi,\pi]$，于是

$$\delta H[\varphi,\pi]=\int d^3x\left(\frac{\delta H}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta H}{\delta\pi}\delta\pi\right).$$

所以

$$\begin{aligned}\delta S&=\int dt\left[\int d^3x\left[\delta\pi\dot{\varphi}-\dot{\pi}\delta\varphi\right]-\int d^3x\left(\frac{\delta H}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta H}{\delta\pi}\delta\pi\right)\right]\\&=\int dt\int d^3x\left[\delta\pi\dot{\varphi}-\dot{\pi}\delta\varphi-\frac{\delta H}{\delta\varphi}\delta\varphi-\frac{\delta H}{\delta\pi}\delta\pi\right]\\&=\int dt\int d^3x\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{\delta H}{\delta\pi}\right)\delta\pi-\left(\dot{\pi}+\frac{\delta H}{\delta\varphi}\right)\delta\varphi\right].\end{aligned}$$

最小作用原理要求$\delta S=0$。而$\delta\varphi$和$\delta\pi$是独立的变分所以有

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}&=\frac{\delta H}{\delta \pi},\\ \dot{\pi}&=-\frac{\delta H}{\delta \varphi}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

这就是泛函形式的场的Hamilton方程。

场的Hamilton正则方程：微分形式

通过附加定域假设，我们同样可以得到哈氏方程的微分形式。与（6.9）类比我们有

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta \varphi}&=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}-\partial_a\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)},\\ \frac{\delta H}{\delta \pi}&=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}-\partial_a\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\partial_a\pi\right)}.\end{aligned}$$

这样场的Hamilton方程的微分形式就是

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}&=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}-\partial_a\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\partial_a\pi\right)},\\ \dot{\pi}&=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}+\partial_a\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\partial_a\varphi\right)}.\end{aligned}$$

6.1.10　场的Poisson括号

在力学中我们有正则方程的Poisson括号形式。这一形式有着明显的对称性，其含义非常深刻（见理论力学中的分析）。

考虑一个任意的场的泛函的随时间的变化（与力学对比可直接得到这个形式）：

$$\dot{u}=\int d^3x\left(\frac{\delta u}{\delta\varphi}\dot{\varphi}+\frac{\delta u}{\delta\pi}\dot{\pi}\right).$$

由(6.12)

$$\dot{u}=\int d^3x\left(\frac{\delta u}{\delta\varphi}\frac{\delta H}{\delta\pi}-\frac{\delta u}{\delta\pi}\frac{\delta H}{\delta\varphi}\right).$$

定义经典Poisson括号

$$[u,v]_{cl}=\int d^3x\left(\frac{\delta u}{\delta\varphi}\frac{\delta v}{\delta\pi}-\frac{\delta v}{\delta\pi}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right).$$

于是

$$\dot{u}=[u,H]_{cl}\,.$$

这样Hamilton正则方程便可表示为更为对称的Poisson括号的形式：

$$\dot{\varphi} = [\varphi, H]_{cl}\,,$$
$$\dot{\pi} = [\pi, H]_{cl}\,.$$

这样漂亮的对称形式一定有其深刻的含义。在力学中我们已有分析，下面我们会看到一些端倪。

6.1.11 正则坐标和动量的Poisson括号

我们来计算一下两个共轭的正则变量的Poisson括号：$[\varphi, \pi]_{cl}$，$[\varphi, \varphi]_{cl}$和$[\pi, \pi]_{cl}$。

在力学中我们考虑过$[q_i, p_j]_{cl}$，变换到场语言中我们有$i \to \mathbf{x}$和$j \to \mathbf{y}$。在力学中，我们考虑的本质上当然是同时的$[q_i(t), p_j(t)]_{cl}$。过渡到场，只是作替换$i \to \mathbf{x}$和$j \to \mathbf{y}$，并不涉及时间，所以对场我们自然考虑的是等时的情况：

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_{cl} = ?$$

按照前面的定义可以直接计算

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_{cl} = \int d^3x' \left[\frac{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta\pi(\mathbf{y}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} - \frac{\delta\pi(\mathbf{y}, t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} \right].$$

按照泛函变分定义我们有

$$\delta\varphi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}', t)} \delta\varphi(\mathbf{x}', t)\,.$$

很明显泛函导数是个δ-函数，因为

$$\delta\varphi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \delta\varphi(\mathbf{x}', t)\,.$$

所以

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}', t)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,.$$

同理

$$\frac{\delta\pi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\,.$$

由于正则坐标和正则动量是独立的所以有

$$\frac{\delta\pi(\mathbf{y}, t)}{\delta\varphi(\mathbf{x}', t)} = 0,$$
$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}[\varphi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]_{cl} &= \int d^3x'\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}') \\ &= \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{6.13}$$

同样的办法可以得到

$$\begin{aligned}[\varphi(\mathbf{x},t),\varphi(\mathbf{y},t)]_{cl} &= 0 \\ [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]_{cl} &= 0.\end{aligned} \tag{6.14}$$

在经典理论中这些结果是推导出来的。而在量子理论中，我们要用量子的Poisson括号（对易或反对易括号）来代替经典的Poisson括号。这样一来这样的结果就不能推导出来了，这个结果就变成了我们的要求，这便是正则量子化条件。因此说，Poisson括号是非常深刻的。

6.2 正则变换

6.2.1 经典力学中的正则变换

正则变换就是保运动方程不变的变换。

先看一个小问题：

经典运动方程是

$$\delta S = 0$$

这就是说作用量S相差一个常数，从而拉氏量L相差一个全微分是不会改变运动方程的。也就是说L和$L+\frac{df}{dt}$给出的是完全等价的运动方程。而我们知道，正则动量由

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

给出。这样L和$L+\frac{df}{dt}$给出的动量其实并不是同一个形式。而按照前面的分析，这两个动量显然给出的都等价地描述同一个系统，所以这两个动量间相差的应该是一个等价的变换。

下面我们来讨论普遍的保运动方程的变换。

6.2.2 正则变换定义

广义坐标$q=(q_1,q_2,q_3,....q_N)$，广义动量$p=(p_1,p_2,p_3,....p_N)$

与新广义坐标$Q=(Q_1,Q_2,Q_3,....Q_N)$，新广义动量$P=(P_1,P_2,P_3,....P_N)$

满足变换

$$q_i = q_i(Q_1,Q_2,Q_3,....Q_N,P_1,P_2,P_3,....P_N,t)$$
$$p_j = p_j(Q_1,Q_2,Q_3,....Q_N,P_1,P_2,P_3,....P_N,t)$$

在哈密顿力学力，正则变换将一组正则坐标(q,p)变为一组新的正则坐标(Q,P)，同时维持哈密顿方程的形式不变，即

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

新的变量下也有

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

其中H和H'分别是原本的哈密顿量和新的哈密顿量。

6.2.3 正则变换生成函数

原正则坐标下满足最小作用量原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[p\dot{q}-H(q,p,t)]dt=0$$

新坐标也满足最小作用量原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[P\dot{Q}-H'(Q,P,t)]dt=0$$

即有

$$p\dot{q}-H(q,p,t)=P\dot{Q}-H'(Q,P,t)+\frac{dG}{dt}$$

或改写成

$$p\dot{q}-P\dot{Q}+[H'(Q,P,t)-H(q,p,t)]=\frac{dG}{dt} \tag{6.15}$$

也可表示成全微分形式

$$pdq-PdQ+[H'(Q,P,t)-H(q,p,t)]\,dt=dG$$

G称为生成函数。

第一型生成函数

$$G = G(q, Q, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q, P, t) - H(q, p, t)] = \frac{dG}{dt}$$

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q, P, t) - H(q, p, t)] = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G}{\partial Q}\dot{Q}$$

于是

$$p = \frac{\partial G}{\partial q}$$

$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

第二型生成函数

设G只依赖与原广义坐标与新广义动量，即

$$G = -QP + G(q, P, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q, P, t) - H(q, p, t)] = \frac{dG}{dt}$$

有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q, P, t) - H(q, p, t)] = -Q\dot{P} - P\dot{Q} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G}{\partial P}\dot{P}$$

整理上式有

$$(p - \frac{\partial G}{\partial q})\dot{q} + (Q - \frac{\partial G}{\partial P})\dot{Q} = H(q, p, t) - H'(Q, P, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

于是有方程成立

$$p = \frac{\partial G}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial G}{\partial P}$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

第三型生成函数

设G只依赖与原广义动量与新广义坐标，即

$$G = qp + G(p, Q, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q,P,t) - H(q,p,t)] = \frac{dG}{dt}$$

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q,P,t) - H(q,p,t)] = q\dot{p} + \dot{q}p + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial G}{\partial Q}\dot{Q}$$

整理上式有

$$-(q + \frac{\partial G}{\partial p})\dot{q} - (P + \frac{\partial G}{\partial Q})\dot{Q} = H(q,p,t) - H'(Q,P,t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

于是有方程成立

$$q = -\frac{\partial G}{\partial p}$$

$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q}$$

$$H'(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

第四型生成函数

设G只依赖与原广义动量与新广义动量，即

$$G = qp - QP + G(p, P, t)$$

代入（6.15）有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q,P,t) - H(q,p,t)] = \frac{dG}{dt}$$

有

$$p\dot{q} - P\dot{Q} + [H'(Q,P,t) - H(q,p,t)] = q\dot{p} + \dot{q}p - Q\dot{P} - \dot{Q}P + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial G}{\partial P}\dot{P}$$

整理上式有

$$-(q + \frac{\partial G}{\partial p})\dot{p} - (\frac{\partial G}{\partial P} - Q)\dot{P} = H(q,p,t) - H'(Q,P,t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

于是有方程成立

$$q = -\frac{\partial G}{\partial p}$$
$$Q = \frac{\partial G}{\partial P}$$
$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

举例

例1：第一型生成函数：$G = qQ$

$$G = qQ$$

有方程

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = Q$$
$$P = -\frac{\partial G}{\partial Q} = q$$

即将坐标换成动量，把动量换成坐标

哈密顿量

$$H' = H$$

例2：第二型生成函数：$G = g(q;t)P$

$$G = g(q;t)P$$

有方程

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = P\frac{\partial g}{\partial q}$$
$$Q = \frac{\partial G}{\partial P} = g(q;t)$$
$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

例3：第二型生成函数：无穷小变换

$$\begin{aligned} G(q,P) &= P(q-Q)+\epsilon F(q,P)+O(\epsilon^2) \\ &= P(q-Q)+\epsilon F(q,p)+O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

G是正则变换的生成函数，总可以重复这些小的变换得到一个正则变换。

有方程

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G}{\partial q} = P+\epsilon\frac{\partial F(q,P)}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial G}{\partial P} = q+\epsilon\frac{\partial F(q,P)}{\partial P} = q+\epsilon\frac{\partial F(q,P)}{\partial p} \end{aligned}$$

或者

$$\delta q=\epsilon\{q,F\},\delta p=\epsilon\{p,F\}.$$

例如，哈密顿就是无穷小时间平移的生成元，一个正则变换保正则变换。如果G是运动积分的一个常量，即和哈密顿量的泊松括号是零，那么就有

$$H'(Q,P)=H(p,q)$$

将G称为是哈密顿量对称性的生成元。

例4：时间依赖的正则变换

考虑特殊的时间依赖的正则变换，将$(q(t),p(t))$变到初始点$(q(t_0),p(t_0))$上去。由于这些是不依赖于时间的，所以H'必须是一个常数，事实上可以令其等于0。这个变换的生成函数（即第一型生成函数。），记为$G(q,Q=q(t_0),t)$，

$$p=\frac{\partial G}{\partial q}$$

$$H(q,\frac{\partial G}{\partial q},t)=-\frac{\partial G}{\partial t}$$

这就是哈密顿雅可比方程，我们解$P=p(t_0)=-\frac{\partial G}{\partial Q}(q,Q,t)|_{Q=q(t_0)}$，因为$q$是$Q,P$和$t$的方程，所以我们可以由初始值解出在坐标和动量下的运动方程。这时候G不是一个新东西，它满足

$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial q}\dot{q}=-H(q,\frac{\partial G}{\partial q},t)+p\dot{q}=L$$

有

$$G = S = \int_{t_0}^{t} L dt$$

所以G就是轨迹$q(t)$的作用量，一个$q(t)$和$q(t_0)$的函数。

因此作用量是一个将系统从一个时刻变换到另一个时刻的正则变换。

6.2.4 正则变换下的不变量

6.2.5 辛条件

一个简单有效率的数学表示方法：辛标记。记

$$\xi^T = [q, p]$$

哈密顿正则方程可以简单的写成

$$\dot{\xi} = \Omega \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

Ω是辛连接矩阵

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

H是哈密顿量。在变换下，$\xi \to \Xi$，对应的$H \to H'$

在新正则坐标下哈密顿正则方程满足

$$\dot{\Xi} = \Omega \frac{\partial H'}{\partial \Xi}$$

其中H'和H满足

$$H' = H + \frac{dG}{dt} + P\dot{Q} - p\dot{q}$$

取G为第一型生成函数$G = G(q, Q, t)$，则$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}$

取坐标变换

$$\Xi = \Xi(\xi, t)$$

有

$$\dot{\Xi} = M\dot{\xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial t}$$

其中M是雅可比矩阵满足$M_{ij} = \frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_j}$

代入哈密顿方程

$$M\dot{\xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial t} = \Omega \frac{\partial H'}{\partial \Xi} = \Omega \frac{\partial H}{\partial \Xi} + \Omega \frac{\partial^2 G}{\partial \Xi \partial t}$$

假设正则变换是线性的不依赖于时间的，方程变为

$$M\dot{\xi} = \Omega\frac{\partial H}{\partial \Xi}$$

有

$$M\dot{\xi} = \Omega\frac{\partial \xi}{\partial \Xi}\frac{\partial H}{\partial \xi} = \Omega(M^{-1})^T\frac{\partial H}{\partial \xi} = -\Omega(M^{-1})^T\Omega\dot{\xi}$$

有

$$M = -\Omega(M^{-1})^T\Omega$$

即

$$M^T\Omega M = \Omega$$

可以看到一个变换是正则变换，当且仅当辛条件成立。

6.2.6 保泊松括号

设f, g为正则坐标(q, p)的函数

$$\{f, g\}_{(q,p)} = \sum_i(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i})$$

用辛标记

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_\xi &= (\frac{\partial f}{\partial \xi})^T\Omega\frac{\partial g}{\partial \xi} \\
&= (\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \Xi})^T\Omega\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \Xi} \\
&= (\frac{\partial f}{\partial \Xi})^T M^T\Omega M\frac{\partial g}{\partial \Xi} \\
&= \{f, g\}_\Xi
\end{aligned}$$

其中用到了$M^T\Omega M = \Omega$

可以看到任何两个函数关于正则变量的泊松括号都是不变量。

第七章　经典场II：自由场

上一章中我们讨论了经典场的描述和场的量子化原则。在这一章中我们只涉及经典场，包括自由场和场的相互作用两部分。当然，我们这里只限于讨论相对论性的场。

前面我们分别讨论了将这些方程解释成相对论波动方程、经典场方程和量子场方程的尝试。最后得到的结论是应该将这些方程理解为量子的场方程（这段尝试的真实历史要漫长曲折得多，而且与实验紧密联系）。在上一章中我们讨论了如何由一个经典理论出发得到量子理论。由经典理论得到量子理论的方式（量子化）的基本依据是：经典与量子理论的基本运算性质（定性性质）是一致的。因此在这里我们首先讨论经典场，在通过量子化手续得到量子场。无论如何要记住，经典理论只是量子理论的一个近似。

7.1　自由场

自由场就是没有相互作用的场。由于我们只限于讨论相对论性的场，所以场的种类其实是非常少的，只有标量场，旋量场，矢量场，张量场。

在前面一节我们介绍了场的Lagrange描述和Hamilton描述。这两种描述在量子理论中显示出它们是更加深刻理论形式。量子理论的正则形式的基础是Hamilton描述，量子理论的路径积分形式的基础是Lagrange描述。这里我们将分别给出相对论性场的这两种描述。

在前面我们已经从相对论不变的角度出发得到了相对论性的方程，一番分析后又知道了只能将这些方程解释成场方程。为了用Lagrange和Hamilton的语言来描述场我们应首先得到场的Lagrange量（或作用量）和Hamilton量。原则上，我们只需从相对论方程的角度出发凑出给出这些方程的Lagrange量和Hamilton量就可以了。但是，在这里我们准备从第一原理出发直接凑Lagrange量和Hamilton量。事实上，在实际操作中，我们更倾向于首先给出Lagrange量和Hamilton量，而不是运动方程。或者更本质地说，我们要给出的是场的作用量。

自由场是理论的基础，在力学中对应的就是惯性，也就是一个系统对相互作用的反

应。但是我们也知道，脱离相互作用研究惯性是不够的。在力学中，如果只有自由粒子（相当于自由场），那么我们只知道这个粒子作匀速直线运动。究竟这个粒子的质量是多少，只考虑自由粒子是不能知道的。要想知道粒子质量（也就是自由场的性质），必须借助相互作用，$F=ma$会告诉我们质量。所以，完全弄清自由场，经常需要考虑相互作用。我们寻找自由场场方程的第一出发点是相对论。但是，相对论的要求经常会给出不止一种候选者，需要我们用相对论之外的要求做进一步选择。有时候我们就要借助相互作用的考虑。比如后面我们考虑是否可以有高阶张量场就是借助规范相互作用。

7.2　我们需要一个什么样的作用量

在我们所采用的理论框架下，作用量是最基本的，有了作用量基本上就有了整个理论。

有了作用量，在经典理论中，由$\delta S=0$，可以得到运动方程；

有了作用量，在量子理论中，由$K\left(b,a\right)=\int Dqe^{iS}$得到的是跃迁振幅，而这是我们想得到全部。

得到作用量最本质的当然是靠实验。由实验中我们可以提炼出一些基本原则。比如由电磁学实验得到的相对论的要求，当然，从唯象规律中提炼这样的基本原则需要真正的天才。下面我们列举一些这样的原则，这些原则非常优美深刻，但是我们也要注意到物理定律最终是要从实验确定的，哪怕是最后一个唯象参数。终归需要一个实验，造物主的意图永远不可能被完全猜透。

7.2.1　对称性的要求

我们还不知道为什么对称性这样重要，只是知道对称性确实是这么重要。我们所给的解释是"自然应该是漂亮的，对称是漂亮的，所以正确的理论应该是对称的"。"自然应该是漂亮的"我同意，但是对称是否漂亮纯粹是看法问题，毕竟一幅精确对称的画很难认为是特别漂亮的。而且，显然一个理论也不会具有所有的对称性。于是，自然界选择的这种对称性为什么就比另一种自然没选择对称性更漂亮也是一个问题。不过反正自然确实是漂亮的，而确实也是对称的就是了。

对称性就是不变性，也就是在某种操作下不变的性质。具体到我们这里，操作就是变换。一个理论是否对称就看它在某个操作下变不变。

被要求对称的是什么

我们说物理定律是对称的，究竟被要求对称的是什么。

自然地，作为一个物理理论，我们要求观测结果是对称的。如果像牛顿教给我们的那样，我们认为动力学方程的解与观测是完全一致的。也就是说动力学方程的解应该是对称的。换句话说，我们要求解是对称的。

这个要求是正确的，但是在操作上意义不大。如果我们已经有了解，还去构造什么作用量，构造什么动力学方程。

退一步考虑。

我们认为解的对称性是蕴含在动力学方程中的。也就是说，动力学方程的对称性与解的对称性应该是一致的（这是个假设）。这就是说，我们退而求其次，要求动力学方程是对称的。

构造动力学方程有时也是困难的，在某些情况下由对称性来构造作用量更容易操作。为此，更退一步，要求作用量是对称的。

经常地，代替构造作用量我们是在构造拉氏量。

当然我们也应看到，拉氏量和作用量与运动方程的对应并不惟一，相差一个全微分项的拉氏量对应同一个运动方程。同样，相差一个常数的作用量对应一个运动方程。

而且，从操作上讲，我们经常为了操作上的容易，考虑的其实都是拉氏量在无穷小变换下的对称性。就像在前面我们由Poincaré群构造相对论性方程一样。

7.2.2 相对论不变性

最重要的一条对称性就是相对论不变性。也就是要求物理规律必须是相对论不变的。前面我们已经从相对论的要求出发得到了相对论不变的场方程，所以这一点就不再讲了。需要说明的是，一个符合相对论要求的理论，它的作用量S必须是Lorentz标量。作用量与拉氏密度的关系是

$$S = \int d^4x\mathcal{L}.$$

积分体积元d^4x是Lorentz不变的，因此拉氏密度也是Lorentz标量。

7.2.3 能量有下界

这个世界是稳定的。一个表现就是，你扔一个东西，它迟早会落到地上，达到一个最低能量状态。如果一个系统没有一个有限的最低能量，那么它就是稳定的。也就是说只有

一个能量有下界的系统才能是稳定的。这是因为系统总是趋于能量更低的状态。后面我们会看到，这是一条挺强的要求。

7.2.4 可重整的要求

对一个经典场来说没有这个问题。但是，当我们从一个经典场出发得到一个量子场的时候会同时引入了一个发散。稍微技术化一点儿的说法就是，从微扰论的角度说，经典场只有树图。当我们从这个经典场出发，通过一个所谓的量子化手段获得一个量子场后，就在微扰论中引入了圈图。而这些圈图是发散的。本质上，这些由量子化引入的圈图是测不准关系的结果。测不准当然是纯粹的量子效应。

发散是不允许的。因此必须通过一些手段去掉这些发散。这个去掉发散的手续被称为重整化。

经典场在经过量子化手续的处理后会给出一个量子场。但不是所有这样得到的量子场都是可以重整化的；或者说，不是所有的由量子化带来的发散都可以通过重整化手续去掉。这样，当我们考虑量子理论时候，就不是所有可能的经典理论都是允许的。只有那些在量子化后（量子化一定会带来无穷大）所得到的量子场是可以重整化的那些经典场才是允许的。因此可重整性成了一个由量子化带来的新要求。这一要求大大缩小了我们需要考虑的场的种类。许多场是不可重整的，因此不是一个合适的量子场论的候选者。

判断一个理论是否可重整化需要一些预备知识。在这里只需先知道可重整的一个必要条件就可以了：耦合常数必须没有量纲。

这就是说，单纯考虑经典场自由度太大了，我们需要量子理论的帮助使我们选择的范围小一些。

需要说明的是，按照前面的标准，引力场就不是一个合适的量子场，虽然它作为一个经典场是一个不错的场。

7.3 经典场：坐标和坐标的一阶导数

在力学中我们有一个来自于实验的基本假设，要想唯一地确定一个经典力学系统的状态，就要且只要用到坐标和坐标的一阶导数。这是因为牛顿的$F = ma$是一个二阶微分方程。由力学过渡到场就是由有限大自由度的力学过渡到无穷大自由度的力学，坐标由粒子的位置q变成了场量$\varphi(x,t)$。我们仍然认为确定一个场的的状态需要且只需要用到坐标和它的一阶导数。这当然是个假设，但被反复证明是正确的，从爱因斯坦的广义相对论到规

范场都是这样的。这意味着，场方程也将是一个二阶的微分方程。这也意味着拉氏密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi).$$

仅知道场方程是一个二阶的微分方程还不足以将方程确定下来。我们需要的更多。我们建立场理论，目的是描述自然中的粒子。我们采用了这样一个基本假设：自然界中的基本粒子可以分成几类，每类中的粒子都完全相同。用场来描述粒子，本质上是将粒子理解为场的量子化的激发。同一种粒子的质量是相同的。因此，场的激发必须是等间隔的。如果我们再加上简单性的假设，那么满足等间隔要求的就是谐振子了。一个类似谐振子的场方程要求是一个带有二次零阶导数项的二阶微分方程。

7.3.1 再具体些

拉氏密度必须是Lorentz标量，于是构造一个拉氏量就变成了用坐标和坐标的一阶导数凑一个Lorentz标量。如果考虑的是标量场，那就是标量场的坐标和坐标的一阶导数，如果是旋量场，就是坐标和坐标的一阶导数，等等。要写出所有可能的符合上述要求的项，再由此得到动力学方程，求解后与实验对比，确定凑拉氏量时所引入的待定系数。在我们这里，与实验对比可以简化成与前面的由Lorentz群表示得到的场方程对比。

7.4 自由场：拉氏量的构造

这里我们讨论自由场。这就像是在讲牛顿第一定律。但是我们将会看到，如前面提到过的，完全不借助相互作用完全弄清一个自由场是不可能的。这就像牛顿第一定律虽然是惯性定律，但是却不能给出质量的信息一样。

7.4.1 标量场

如前面分析过的，标量场是Poincaré群的标量表示。按照在力学中的经验我们已经假设，对一个经典场只需考虑到坐标和它的一阶导数，并且因为同类粒子都相同，需要用谐振子来描述，所以对自由场只考虑二次的情况。

Lagrange表述：拉氏量的构造

构造一个无质量自由实标量场的拉氏量，首先写出所有可能满足前面的基本要求的项

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + b_\mu \partial^\mu \phi + c\phi^2,$$

这里b_μ是一个与ϕ无关的矢量。我们考虑的是自由粒子，或说自由场。自由场应该是各向同性的，这样拉氏量中就不能有带有方向的量。因此应该没有与b_μ有关的项。这样拉氏量应为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + c\phi^2,$$

将它代入Euler-Lagrange方程场

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

由于

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = 2a\partial_\mu\left(\partial^\mu\phi\right) = 2a\partial^2\phi$$

以及

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 2c\phi$$

代入拉氏方程得

$$2a\partial^2\phi = 2c\phi$$
$$\left(a\partial^2\phi - c\phi\right) = 0$$

原则上应该从这个方程求出解来，然后与实验对比，确定待定系数a和c。我们前面由相对论不变要求的得到的标量场方程（这就是Klein-Gordon方程，或Klein-Gordon-Schrödinger方程[1]。）

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi = 0$$

在这里可以当作是由实验确定下来的一个结果，我们可以与这个方程对比得到系数。但是，我们可以看到，由于我们这里只有自由场方程，自由场方程的信息量是不够的。这就像由牛顿第一定律不能确定质量一样。我们不能从这个方程完全确定出系数。系数a和c可以确定到差一个常数的程度

$$a = C,$$
$$c = -Cm.$$

这个常数C只能在引入相互作用的时候确定。于是

$$\mathcal{L} = C\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m\phi^2\right).$$

[1] Schrödinger在得到它的Schrödinger方程的同时就已经得到了这个方程。但是由于负能困难它没有发表它。

确定系数C需要引入一个相互作用。这是一个普适常数，所以什么相互作用都会给出相同的值。我们不妨引入常值相互作用，相当于力学中的恒力。此时的动力学方程可以由实验确定，为

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi = J \tag{7.1}$$

此时拉氏量应为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + c\phi^2 + dJ\phi$$

于是

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 2c\phi + dJ$$

代入拉氏方程有

$$2a\partial^2\phi = 2c\phi + dJ$$
$$2a\partial^2\phi - 2c\phi - dJ = 0$$

与（7.1）对比

$$2a = 1$$
$$-2c = m^2$$
$$d = 1$$

所以有

$$2a = \frac{1}{2}$$
$$c = -\frac{1}{2}m^2$$
$$d = 1$$

于是拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2.$$

Hamilton表述

场量ϕ是广义坐标，相应的广义动量为

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi\right)} = \partial_0\phi$$
$$= \dot{\phi}.$$

由Legendre变换可以直接得到Hamilton量

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \dot{\phi}^2 - \left[\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi\right] + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2.\end{aligned}$$

Lagrange表述和Hamilton表述当然是等价的。由它们出发可以得到两套了不同的量子化途径：路径积分量子化和正则量子化。

无质量实标量场，$O(1)$对称性，$O(n)$($SO(n)\otimes O(1)$)对称性　有质量和无质量的场的对称性不同，我们分别考虑它们。

按照前面的分析，无质量的相对论不变的标量场场方程为

$$\partial^2\phi = 0,$$

拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi.$$

这个拉氏量显然在

$$\phi \to -\phi$$

变换下是不变的，也就是说它具有$O(1)$群对称性。

有（自旋以外）内部自由度的实标量场，$O(n)$　有内部自由度的意思是，这个场除了Lorentz结构外，还具有自旋以外的其它内禀的结构（自旋这种内禀结构已经包含在Lorentz结构中）。如果一个内部自由度可以从已知的基本原理自然地导出，那当然是最好的了。但是如何处理不能被已知原理包含进去的内部自由度呢。自旋其实是最好的例子。在自旋没有从一个相对论的量子理论中自动给出的时候，我们被迫用Schrödinger方程来描述有自旋的粒子，我们的处理方式就是将这个内部自由度的各个分量写成一个表，当时我们用的是一个列矩阵。在我们可以相对论量子理论直接描述自旋之后，我们不在用这种很唯象的办法了。我们总会遇到未知的新的内部自由度，描述这些内部自由度我们用的

还是列表的方式。在这里，我们就考虑如何通过列表（这个表可以是一个列矩阵也可以是一个方阵）的方法描述内部自由度。可以看到，用这种方法描述内部自由度就意味着我们对这种内部自由度了解的还很不够。

我们将会看到，这种有内部自由度的场可以表示为一个多分量的场的形式。

我们考虑n个不同的无质量的标量场，$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$。它们的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \cdots + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n.$$

将这些场看作是一个矢量的分量（你也可以将它们看作是一个方阵的矩阵元），即

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

这样得到的ϕ是有内部自由度的场，这本质上就是海森堡的同位旋的思想[2]。此时拉氏量可以表示成

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \cdots + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1, \partial_\mu\phi_2, \cdots, \partial_\mu\phi_n\right)\begin{pmatrix} \partial^\mu\phi_1 \\ \partial^\mu\phi_2 \\ \vdots \\ \partial^\mu\phi_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

这个拉氏量显然具有在$O(n)$群的变换下是不变的。这是因为$O(n)$群保二次型$\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \cdots + \partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n$。这可以直接看出在$O(n)$变换下有

$$\phi' = O\phi$$

[2]当初海森堡从强作用的角度考虑质子和中子（考虑强作用时电磁作用可以忽略），认为它们是一个类似于自旋的量的两个分量，这个类似于自旋的东西被称为同位旋。

在这样的变换下

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(\phi') &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\widetilde{\phi'}\right)(\partial^\mu\phi') \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\widetilde{(O\phi)}\right]\left[\partial^\mu(O\phi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\left(\tilde{\phi}\tilde{O}\right)\right]\left[\partial^\mu(O\phi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\tilde{O}O\partial^\mu\phi\end{aligned}$$

要使此式不变就要求

$$\tilde{O}O = 1$$

因此对称群为$O(n)$群。

有（自旋以外）内部自由度的实标量场，$SO(n)\otimes O(1)$ 如前面已经分析过的，多分量的实标量场是$O(n)$对称的。这个对称性可以分开来写。一个具有$O(n)$对称性的系统一定具有纯旋转对称性，即$SO(n)$对称性。我们在$SO(n)$上附加一个反射，得到的就将是$O(n)$。因此，这个对称性可以写成

$$SO(n)\otimes(1,-1)$$

或者说

$$SO(n)\otimes O(1)\,. \tag{7.3}$$

对称性。

结合上面的结果，我们可以将这个多分量的实标量场具有的$O(n)$群对称性写成

$$O(n) = SO(n)\otimes O(1)$$

对称性。可以这样理解这个结果，$O(n)$群与$SO(n)$群相差一个反射（$SO(n)$群可以理解成一个纯转动），即

$$O(n) = SO(n)\otimes(1,-1)\,.$$

$O(1)$群可以理解为一维旋转群，一维旋转只有反射，也就是$(1,-1)$[3]。所以我们用(7.3)表示无质量标量场的$O(n)$对称性。

将对称性写成$SO(n)\otimes O(1)$比$O(n)$群的说法更好些，因为它分开了转动和$\phi\to-\phi$这两种对称性。当然，它们本质上是一样的。

[3] $O(1)$群是比较特殊的。它原则上没有$SO(1)$群，因为$SO(1)$群是平庸的，只有单位元。

作为一个例子，考虑这样的情况。拉氏量(7.2)显然在变换

$$\phi_i \to (-1)^{\alpha_i} \phi_i$$

这里α_i在0和1之间任意选择，即

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

这个变换的行列式为1或-1，不是一个$SO\left(n\right)$群的对称性。我们可以将它形式地写成

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right|_{\det=1} \otimes (1, -1)$$

这里的下标$\det = 1$表示这是一个对角线上的元素为1或-1，而行列式为1的矩阵。我们知道行列式为1的矩阵构成的群是$SO\left(n\right)$群的一个子群。

有质量实标量场，$O\left(1\right)$对称性，$O\left(n\right)$($SO\left(n\right) \otimes O\left(1\right)$)对称性和对称性的破缺 按照前面的结果有质量的标量场的场方程为

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \phi = 0.$$

拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right).$$

这个拉氏量与无质量的情况相同，也在

$$\phi \to -\phi$$

变换下是不变的，具有$O\left(1\right)$群对称性。

同样考虑n个具有相同质量的标量场，$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$。它的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2\right) + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2\right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - m^2 \phi_n^2\right).$$

将它们写成一个矢量

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}.$$

这样拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1-m^2\phi_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2-m^2\phi_2^2\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n-m^2\phi_n^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1,\partial_\mu\phi_2,\cdots,\partial_\mu\phi_n\right)\begin{pmatrix}\partial^\mu\phi_1\\ \partial^\mu\phi_2\\ \vdots\\ \partial^\mu\phi_n\end{pmatrix}-\frac{1}{2}m^2\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right)\partial^\mu\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}-\frac{1}{2}m^2\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}\phi.\end{aligned}$$

基于与前面同样的理由可以看出这个拉氏量同样具有$O\left(N\right)$或$SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right)$对称性。

但是，如果这n个标量场的质量不同，即拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1-m_1^2\phi_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2-m_2^2\phi_2^2\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n-m_n^2\phi_n^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1,\partial_\mu\phi_2,\cdots,\partial_\mu\phi_n\right)\begin{pmatrix}\partial^\mu\phi_1\\ \partial^\mu\phi_2\\ \vdots\\ \partial^\mu\phi_n\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\right)\begin{pmatrix}m_1&&&\\&m_2&&\\&&\ddots&\\&&&m_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}\tilde{\phi}M\phi\end{aligned}$$

这里$M\equiv diag\left(m_1,m_2,\cdots,m_n\right)$。质量的存在破坏了$O\left(n\right)$或$SO\left(n\right)\otimes O\left(1\right)$对称性[4]。但是，系统仍然在变换

$$\phi_i\rightarrow\left(-1\right)^{\alpha_i}\phi_i$$

[4]类比质子和中子的质量不同导致同位旋对称性破缺。

下不变，α_i在0和1之间任意选择。这时系统的对称性变为

$$\overbrace{O(1)\oplus O(1)\oplus\cdots\oplus O(1)}^{n\text{个}}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

这个对称性小多了。但显然质量的存在并没有去掉所有的对称性，仍然有对称性保留下来。

这n个质量中如果有一些是相同的，那么会有一些局部的对称性，这里就不考虑了。

无质量复标量场，$U(1)$对称性和$U(n)$($SU(n)\otimes U(1)$)对称性 前面考虑的是实标量场，这里考虑复标量场的情况。一个复标量场本质上相当于两个实标量场。考虑两个无质量实标量场的拉氏量

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2.$$

做代换

$$\begin{aligned}\phi_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi+\phi^*),\\ \phi_2&=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\phi-\phi^*).\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2),\\ \phi^*&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2).\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2\\ &=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1-i\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_1+i\partial^\mu\phi_2)\\ &=\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2)\,\partial^\mu\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2).\end{aligned}$$

这样我们就得到

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi.$$

这是一个复标量场。可以看到，它本质上是两个实标量场。

这个场明显具有这样的对称性：

$$\phi \to e^{i\theta}\phi.$$

这是一种$U(1)$对称性。这个对称性在实标量场的情况下中变成$\phi \to -\phi$不变的对称性。

有（自旋以外）内部自由度的复标量场，$U(n)$ 像前面一样考虑n个复标量场$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$。拉氏量为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + \cdots + \partial_\mu \phi_n^* \partial^\mu \phi_n.$$

将它们写成

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

则拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + \cdots + \partial_\mu \phi_n^* \partial^\mu \phi_n \\ &= \left(\partial_\mu \phi_1^*, \partial_\mu \phi_2^*, \cdots, \partial_\mu \phi_n^*\right) \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi_1^* \\ \partial^\mu \phi_2^* \\ \vdots \\ \partial^\mu \phi_n^* \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi. \end{aligned} \tag{7.4}$$

容易看出，这个拉氏量是在n-维复空间中的旋转下不变的，也就是是在$U(n)$群变换下不变的。$U(n)$群保复二次型$\partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + \cdots + \partial_\mu \phi_n^* \partial^\mu \phi_n$。

有（自旋以外）内部自由度的复标量场，$SU(n) \otimes U(1)$ 在$U(n)$变换下

$$\phi' = U\phi$$

拉氏量（7.4）的变换下为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(\phi') &= \left(\partial_\mu \phi'^\dagger\right)(\partial^\mu \phi') \\ &= \left[\partial_\mu (U\phi)^\dagger\right][\partial^\mu (U\phi)] \\ &= \left[\partial_\mu \left(\phi^\dagger U^\dagger\right)\right][\partial^\mu (U\phi)] \\ &= \partial_\mu \left(\phi^\dagger\right) U^\dagger U \partial^\mu (\phi)\end{aligned}$$

保拉氏量不变要求

$$U^\dagger U = 1.$$

这是幺正矩阵构成的群，$U(n)$群。幺正矩阵满足行列式模为1，即$|\det U| = 1$的要求[5]。行列式模是1表明行列式可以是$e^{i\theta}$的形式。我们可以用$SU(N)$群的对称性来表示这个对称性。$SU(N)$群的行列式是1，这个对称性比$SU(N)$群的对称性大。$U(1)$群的群元和行列式都是$e^{i\theta}$。因此这个对称性也可以表示成

$$SU(n) \otimes U(1).$$

当然，这本质上就是$U(n)$对称性。

进一步，我们考虑这样一种有物理意义的例子。

我们将每个分量ϕ_i作为一个相位变化

$$\phi_i \to e^{i\theta}\phi_i,$$

也就是

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}e^{i\theta_1}\phi_1\\ e^{i\theta_2}\phi_2\\ \vdots\\ e^{i\theta_n}\phi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

---

[5]

$$\begin{aligned}\det\left(U^\dagger U\right) &= 1\\ \det U^\dagger \det U &= 1\\ (\det U)^* \det U &= 1\\ |\det U| &= 1\end{aligned}$$

显然拉氏量（7.4）在变换$diag\left(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n}\right)$下是不变的。这个变换的行列式是$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$，我们可以将这个变换表示成

$$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)/n}\begin{pmatrix} e^{i[(n-1)\theta_1-(\theta_2+\cdots+\theta_n)]/n} & & & \\ & e^{i[(n-1)\theta_2-(\theta_1+\theta_3+\cdots+\theta_n)]/n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i[(n-1)\theta_n-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-1})]/n} \end{pmatrix}$$

这是一个$U\left(1\right)$的矩阵元$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)/n}$乘上一个行列式为1的矩阵的形式。我们知道行列式为1的矩阵构成$SU\left(n\right)$群。所以，每一个分量做一个相位变化相当于一个$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$的变换。在这个变换下不变，就是具有$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$对称性。

有质量复标量场，$U\left(1\right)$对称性，$U\left(n\right)$($SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$)对称性和对称性的破缺

有质量的复标量场同样是Poincaré群的标量表示。由Poincaré群的表示理论我们已经得到了场方程

$$\left(\partial^2+m^2\right)\phi=0.$$

相应的拉氏密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi\right).$$

显然它具有$U\left(1\right)$对称性。

考虑一个具有n个相同质量分量，$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$，的复标量场。拉氏量为

$$\mathcal{L}=\left(\partial_\mu\phi_1^*\partial^\mu\phi_1-m_1^2\phi_1^*\phi_1\right)+\left(\partial_\mu\phi_2^*\partial^\mu\phi_2-m_2^2\phi_2^*\phi_2\right)+\cdots+\left(\partial_\mu\phi_n^*\partial^\mu\phi_n-m_n^2\phi_n^*\phi_n\right).$$

将场表示成

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}$$

。此时拉氏量（类比实标量场的情况）为

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi.$$

由于质量相同，所以这个拉氏量同样具有$U\left(n\right)$或$SU\left(n\right)\otimes U\left(1\right)$对称性。

但是如果这n个标量场的质量不同，即拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left(\partial_\mu\phi_1^*\partial^\mu\phi_1 - m_1^2\phi_1^*\phi_1\right) + \left(\partial_\mu\phi_2^*\partial^\mu\phi_2 - m_2^2\phi_2^*\phi_2\right) + \cdots + \left(\partial_\mu\phi_n^*\partial^\mu\phi_n - m_n^2\phi_n^*\phi_n\right) \\ &= \left(\partial_\mu\phi_1^*, \partial_\mu\phi_2^*, \cdots, \partial_\mu\phi_n^*\right)\begin{pmatrix}\partial^\mu\phi_1 \\ \partial^\mu\phi_2 \\ \vdots \\ \partial^\mu\phi_n\end{pmatrix} - \left(\phi_1^*, \phi_2^*, \cdots, \phi_n^*\right)\begin{pmatrix} m_1^2 & & & \\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi^\dagger M\phi\end{aligned}$$

这里$M \equiv diag\left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right)$。质量不同使$U\left(n\right)$对称性破坏了。但是，仍然有对称性保持下来，系统仍然在变换

$$\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}e^{i\theta_1}\phi_1 \\ e^{i\theta_2}\phi_2 \\ \vdots \\ e^{i\theta_n}\phi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix},$$

下不变。这时系统的对称性变为

$$\overbrace{U\left(1\right) \oplus U\left(1\right) \oplus \cdots \oplus U\left(1\right)}^{n\text{个}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}.$$

是质量使没有质量时的$SU\left(n\right) \otimes U\left(1\right)$对称性破缺到了这样一个$U\left(1\right) \oplus U\left(1\right) \oplus \cdots \oplus U\left(1\right)$对称性。

与实标量场的情况一样，这n个质量中如果有一些是相同的，那么会有一些局部的对称性。

用方阵（而不是矢量）表示有（自旋以外）内部自由度的场

前面，在考虑一个具有（自旋以外）内部自由度的场（也就是一个多分量的场）的时候，我们将场$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$写成一个矢量的分量，换句话说，我们用了一个矢量来表示一个多分量的场。但是显然，我们也可以用其它方式表示一个多分量的场。比如将场$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$看作是一个方阵的矩阵元。当然，由于方阵的元的个数必须是一个数的平

方，这时候可能会出现场分量数与矩阵元的个数不一样的情况。在这种情况下我们就可以用一些限制条件将那些多出来的自由度限制掉。

在用方阵代替列矩阵表示一个多分量的场以后，我们当然要求原来的各种内禀对称性仍然保持。以前面考虑的多分量的标量场为例，在用矢量表示的形式中，一个具有相同质量的多分量复标量场拉氏量为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi,$$

其中质量矩阵$M = m\mathbf{1}$。这个拉氏量具有$U(n)$对称性。也就是说这个拉氏量在变换

$$\phi \to U\phi$$

下不变。而如果我们用一个方阵$\mathbf{\Phi}$来表示同样这个场，当然要求$\mathbf{\Phi}$在同样的变换下不变，也就是要求拉氏量在

$$\mathbf{\Phi} \to U\mathbf{\Phi}U^{-1} \tag{7.6}$$

变换下不变。$\mathbf{\Phi}$是一个方阵，拉氏量不是，拉氏量必须是一个数。于是问题就变成了怎样将用$\mathbf{\Phi}$表示的拉氏量变成一个在变换（7.6）下不变的数呢。一个明显的答案就是取迹，迹是个不变量。我们可以将拉氏量表示成

$$\mathcal{L} = tr\left[\partial_\mu \mathbf{\Phi}^\dagger \partial^\mu \mathbf{\Phi}\right] - m^2 tr\left[\mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}\right].$$

这个拉氏量与用矢量表示的拉氏量当然是完全等价的。

7.4.2 旋量场

旋量场是Poincaré群的旋量表示，这是一种多值表示。事实上，多值表示是在Dirac引入Dirac方程之后才引入数学的。多值的旋量表示在概念上类似于复变函数中的多值函数。按照函数和表示的最初定义，函数和表示都必须是单值的。但是当多值情况变得有意义的时候，我们便引入了多值函数、多值表示。我们会看到，多值的根源在于拓扑的不平庸。

我们来构造一下旋量场的拉氏量。旋量场ψ是一个旋量，一个列矢量。ψ必须是一个列矢量的原因是作为一种多值表示，它需要一个值有多个对应。这相当于不是转360^0恢复，而是转多圈才恢复。因此ψ不可能是一个普通的数。

拉氏密度必须是一个标量，是一个数，因此每项都要是一个数。将一个列矢量凑成一个数的方式只能是将每项写成

$$\bar{\psi}\mathbf{D}\psi$$

的形式，这里$\bar{\psi}$应该是一个与ψ直接相关的行矢量（但是现在我们并不知道它与ψ的关系），$\mathbf{D}$是一个方阵。$\mathbf{D}$中应该包含一些包含导数∂^μ的部分和常数项。

$\bar{\psi}$是什么

现在的问题是$\bar{\psi}$是什么。最重要的一条要求是$\bar{\psi}\mathbf{D}\psi$必须是一个Lorentz标量。$\mathbf{D}$与ψ是无关的，我们在这里做一个假设（换别的假设也没关系，最后都会得到相同的结果）：只要$\mathbf{D}$是一个Lorentz标量，则$\bar{\psi}\mathbf{D}\psi$就必须是一个Lorentz标量。这样，如果我们取$\mathbf{D}$是一个常数（最简单的Lorentz标量），就要求$\bar{\psi}\psi$自己是一个Lorentz标量（这相当于我们在这里做一个假设，假设了$\mathbf{D}$自己就是一个Lorentz标量，从而假设了$\bar{\psi}\psi$也是一个Lorentz标量）。如果$\bar{\psi}\psi$是一个Lorentz标量，那么$\bar{\psi}$应该是什么呢。

在Lorentz变换下，

$$\psi \to \Lambda_\psi \psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$$

这里Λ_ψ和$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$是Lorentz群的表示，它们当然是维数相同的表示。由于$\bar{\psi}$和ψ是有限维的列矩阵，所以Λ_ψ和$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$是Lorentz群的有限维表示。这样$\bar{\psi}\psi$在Lorentz变换下为

$$\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}\Lambda_\psi\psi.$$

$\bar{\psi}\psi$是Lorentz标量意味着

$$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}\Lambda_\psi = 1. \tag{7.7}$$

这样选择$\bar{\psi}$的问题就变成了寻找一个按照符合（7.7）要求的$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1}$变换的$\bar{\psi}$的问题。猛地看上去，似乎选择$\Lambda_{\bar{\psi}}^{-1} = \Lambda_\psi^\dagger$，然后要求$\Lambda_\psi^\dagger\Lambda_\psi = 1$，从而选择$\bar{\psi} = \psi^\dagger$。这个看似自然的选择是错的。因为这样一来$\Lambda_\psi$就将是一个幺正变换，而Lorentz群是一个非紧的的群，它没有有限维幺正表示[6]。所以这个选择是错的。因此$\bar{\psi}$一定不是$\psi^\dagger$。但是无论如何$\psi^\dagger$都是一个合理的选择，它是一个行矩阵，它带的的复共轭保证了在需要的时候拉氏量或哈氏量是实的。我们不妨假设$\bar{\psi}$与$\psi^\dagger$相差一个变换，即

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\Gamma.$$

$\psi^\dagger$在Lorentz变换下的情况我们是知道的：

$$\psi^\dagger \to \psi^\dagger\Lambda_\psi^\dagger.$$

于是在Lorentz变换下

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\Gamma\psi \to \psi^\dagger\Lambda_\psi^\dagger\Gamma\Lambda_\psi\psi.$$

[6]这是因为boost在旋量表示下不厄米。

这样要求$\bar{\psi}\psi$Lorentz不变相当于要求

$$\Gamma=\Lambda_{\psi}^{\dagger}\Gamma\Lambda_{\psi}.$$

问题变成了寻找一个满足这个条件的Γ。不失一般性，我们考虑无穷小Lorentz变换

$$\Lambda\rightarrow 1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu},$$

有

$$\Gamma=\left(1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)^{\dagger}\Gamma\left(1+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)$$
$$\Gamma=\left(1-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^{\dagger}\right)\Gamma\left(1+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)$$
$$\Gamma=\Gamma+\Gamma\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^{\dagger}\Gamma+\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^{\dagger}\right)\Gamma\left(\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)$$

由于$\omega_{\alpha\beta}$是小量，所以它的二次项可以去掉，有

$$\Gamma S^{\mu\nu}-S^{\mu\nu\dagger}\Gamma=0$$

或

$$\Gamma S^{\mu\nu}=S^{\mu\nu\dagger}\Gamma \tag{7.8}$$

问题变成了构造一个满足（7.8）的Γ。Lorentz变换的生成元$S^{\mu\nu}$是已知的，可以选成

$$S^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},$$

这里$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]=\frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)$[7]。这样很容易知道可以选择

$$\Gamma=\gamma^{0}.$$

于是

$$\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma^{0}.$$

[7]Diracγ-矩阵满足

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu}.$$

在Dirac-Pauli表示下γ-矩阵可以表示成

$$\gamma^{0}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0\\0&-\mathbf{1}\end{pmatrix},\gamma^{i}=\begin{pmatrix}0&\sigma_{i}\\-\sigma_{i}&0\end{pmatrix}.$$

Lagrange表述：拉氏量的构造

拉氏量的形式被我们选作

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\mathbf{D}\psi,$$

并假设$\mathbf{D}$应该是一个Lorentz标量。

在这里我们必须做一个不自然的假设，假设旋量方程不包含二阶导数项。这不是一个自然的选择，自然的选择只包括标量、矢量和张量。旋量是Lorentz群的一个双值表示，旋量的方程是一阶的。这与从牛顿开始的传统是很不一样的。自从牛顿给出了$F = ma$这个二阶动力学方程以后，所有的动力学方程都是二阶的，再也没改过。牛顿考虑的是矢量，牛顿以后考虑的也都是标量、矢量和张量，因此动力学方程都是二阶的。旋量与标量、矢量和张量有着本质的不同，方程变成一阶的。

现在的问题是旋量场ψ究竟是一个几维的列矢量。

2×1的ψ 首先，ψ的列数应该是偶数，否则便是矢量场。最小的不为零的偶数是2，所以我们先从ψ是2×1列矢量试起。

如果ψ是2×1列矢量，$\mathbf{D}$一定是一个2×2方阵，是一个Lorentz标量，它应该包含导数项和常数项。我们来尽可能普遍地写出$\mathbf{D}$的可能的形式。

我们总可以找一组2×2方阵作为基展开任何一个2×2方阵。显然在我们现在的问题中选择一组Lorentz协变的基会方便得多。形式地将这组基写为

$$\sigma^\mu = \left\{\mathbf{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right\}$$

那么$\mathbf{D}$中只能包含这样的项

$$\sigma^\mu \partial_\mu, \mathbf{1}, u_\mu \sigma^\mu$$

于是

$$\mathbf{D} = c\sigma^\mu \partial_\mu + d\mathbf{1} + eu_\mu \gamma^\mu.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}\mathbf{D}\psi \\ &= c\bar{\psi}\sigma^\mu \partial_\mu \psi + d\bar{\psi}\psi + eu_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi\end{aligned}$$

自由粒子必须是各向同性的，因此拉氏量中不能包含含有方向信息的矢量u_μ。所以拉氏量应为

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}\sigma^\mu \partial_\mu \psi + d\bar{\psi}\psi$$

这部分先不讲。

4×1**的**ψ 如果ψ是4×1列矢量，$\mathbf{D}$一定是包含导数项和常数项的一个4×4方阵。现在需要找一组16个Lorentz协变的4×4方阵作为基，这样一组基是现成的，可以选成

$$\{\mathbf{1},\gamma_5,\gamma^\mu,\gamma_5\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu}\}$$

如果我们希望方程的导数是二阶的，从而拉氏量中不能有二阶导数，那么构成Lorentz标量的所有可能的项就是以下这些

$$a^\mu\partial_\mu, b^\mu\gamma_5\partial_\mu, \gamma^\mu\partial_\mu, \gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu, \sigma^{\mu\nu}e_\mu\partial_\nu, \mathbf{1}, \gamma_5, u_\mu\gamma^\mu, v_\mu\gamma_5\gamma^\mu, w_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

其中u_μ，v_μ和$w_{\mu\nu}$是一些Lorentz矢量和张量（注意，拉氏量中只包含场量和它的一阶导数，这是我们的前提假设）。而且$w_{\mu\nu}$应该是反对称的，因为$\sigma^{\mu\nu}$是反对称的。这样，$\mathbf{D}$的最普遍形式就应该写成

$$\mathbf{D}=a^\mu\partial_\mu+b^\mu\gamma_5\partial_\mu+c\gamma^\mu\partial_\mu+d\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu+\sigma^{\mu\nu}e_\mu\partial_\nu+f\mathbf{1}+g\gamma_5+hu_\mu\gamma^\mu+lv_\mu\gamma_5\gamma^\mu+qw_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}.$$

这样拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\bar\psi\mathbf{D}\psi\\&=a^\mu\bar\psi\partial_\mu\psi+b^\mu\bar\psi\gamma_5\partial_\mu\psi+c\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi+d\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi+e_\mu\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\psi+f\bar\psi\psi+g\bar\psi\gamma_5\psi\\&+hu_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi+lv_\mu\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\psi+qw_{\mu\nu}\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi\end{aligned}\tag{7.9}$$

这里我们没考虑$\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$的项，因为$\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi=\partial_\mu\left(\bar\psi\gamma^\mu\psi\right)-\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$，只带来一个全微分项的差异。作为一个拉氏量，这个形式的每项都可以。但是我们寻找的是自由粒子的拉氏量，自由粒子具有最大的对称性。所以这个拉氏量应该是时间平移不变、空间平移不变和空间各向同性的。空间各向同性要求拉氏量中不能包含带有方向信息的量。因此，速度这样的量是不能包含的（速度的大小可以包含，因为它不包含方向）。这样一来方程（7.9）中就不能包含矢量这样有方向的量。因此包含a_μ，b_μ，e_μ，u_μ，v_μ和$w_{\mu\nu}$的项在自由场拉氏量中是不出现的。于是拉氏量变为

$$\mathcal{L}=c\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi+d\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi+f\bar\psi\psi+g\bar\psi\gamma_5\psi.$$

需要说明的是，我们由对称性出发扔掉了所有的常矢量项，但是我们却保留了γ^μ这样的常矢量。这是因为，γ^μ对应的是内禀自由度，如果你愿意可以像$\bar\psi=\psi^\dagger\gamma^0$一样将$\gamma^\mu\psi$理解为一个整体。

拉氏量的每项都是一个Lorentz标量。这个拉氏量包含了两部分：标量部分和赝标量部分。我们假设了自由粒子具有最大的对称性。因此可以假设粒子不是标量的就是赝标量的。不会是混合的。这样拉氏量只能是下面两种情况

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f\bar{\psi}\psi, \tag{7.10}$$
$$\mathcal{L}_{pseudo} = d\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g\bar{\psi}\gamma_5\psi. \tag{7.11}$$

如果我们再引入一条基本假设，认为自由粒子拉氏量必须是标量的，我们就选择了第一个拉氏量（7.10）。

由拉氏量（7.10）可以得到运动方程。选择$\bar{\psi}$作为场变量，Euler-Lagrange方程为

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}.$$

这里

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = c\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f\psi,$$
$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)} = 0$$

于是方程为

$$c\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f\psi = 0. \tag{7.12}$$

选择ψ作为场变量，Euler-Lagrange方程为

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}.$$

这里

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = f\bar{\psi},$$
$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)} = \partial_\mu\left\{c\bar{\psi}\gamma^\mu\right\} = c\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu$$

方程为

$$c\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - f\bar{\psi} = 0 \tag{7.13}$$

取方程（7.13）的厄米共轭[8]

$$
\begin{aligned}
c^*\gamma^{\mu\dagger}\bar{\psi}^\dagger\overleftarrow{\partial}_\mu^\dagger - f^*\bar{\psi}^\dagger &= 0\\
c^*\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger - f^*\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger &= 0\\
c^*\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
c^*\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
-c^*\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*\psi &= 0 \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

这里用到了$\gamma_0^\dagger = \gamma_0$，$\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0 = \gamma_0\gamma^\mu$。与方程（7.12）对比有

$$
\begin{aligned}
c^* &= -c\\
f^* &= f
\end{aligned}
$$

可见，c与f中有一个是实数，有一个是纯虚数。取$c = ia$，$f = b$，这里a和b是实数。于是方程为

$$
\begin{aligned}
ia\gamma^\mu\partial_\mu\psi + b\psi &= 0\\
\left(ia\not\partial + b\right)\psi &= 0.
\end{aligned}
$$

我们需要与实验对比确定参数a和b。Dirac方程

$$\left(i\not\partial - m\right)\psi = 0.$$

在这里可以被视为来自于实验的唯象结果。对比有

$$
\begin{aligned}
a &= C,\\
b &= -Cm.
\end{aligned}
$$

[8]如果认为$\partial_\mu^\dagger = -\partial_\mu^\dagger$，则

$$
\begin{aligned}
c^*\gamma^{\mu\dagger}\bar{\psi}^\dagger\overleftarrow{\partial}_\mu^\dagger - f^*\bar{\psi}^\dagger &= 0\\
-c^*\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger - f^*\left(\psi^\dagger\gamma_0\right)^\dagger &= 0\\
-c^*\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
-c^*\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f^*\gamma_0\psi &= 0\\
-c^*\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f^*\psi &= 0\\
c^*\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*\psi &= 0
\end{aligned}
$$

这样得到的拉氏量为

$$\mathcal{L} = C\left(i\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi - \bar{\psi}m\psi\right).$$

与标量场情况一样，这个对比并不能唯一地将这两个常数确定下来，整体可以相差一个常数，完全确定出待定参数需要通过相互作用。加上一个恒力J，方程为

$$\left(i\ \partial\!\!\!/ - m\right)\psi = J. \tag{7.15}$$

在恒力作用下的拉氏量可写为

$$\mathcal{L} = C\left(i\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi - \bar{\psi}m\psi\right) + \lambda\bar{\psi}J.$$

由Euler-Lagrange方程

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}.$$

其中

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}\right)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= C\left(i\ \partial\!\!\!/ - m\right)\psi + \lambda J \end{aligned}$$

可以得到方程为

$$C\left(i\ \partial\!\!\!/ - m\right)\psi = -\lambda J$$

与方程（7.15）对比

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

于是我们知道自由旋量场的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\ \partial\!\!\!/ - m\right)\psi.$$

Hamilton表述

同样我们也可以等价地采用Hamilton表述。

场量是ψ，相应的场动量为

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \psi\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \psi\right)}\left[\bar{\psi}\left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi\right] \\ &= \bar{\psi} i \gamma^0 \\ &= i \psi^{\dagger}.\end{aligned}$$

若用$\bar{\pi}$表示对应$\bar{\psi}$的正则动量，则类似地有

$$\begin{aligned}\bar{\pi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \bar{\psi}\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \bar{\psi}\right)}\left[\bar{\psi}\left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

由Legendre变换可以直接得到Hamilton量

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} \\ &= i \psi^{\dagger} \dot{\psi} - \bar{\psi}\left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi \\ &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi}\left(i \gamma^0 \partial_0 + i \gamma^j \partial_j - m\right) \psi \\ &= -i \bar{\psi} \gamma^j \partial_j \psi + m \bar{\psi} \psi \\ &= \bar{\psi}\left(-i \gamma^j \partial_j + m\right) \psi \\ &= \bar{\psi}(\gamma \cdot \mathbf{p} + m) \psi \\ &= \psi^{\dagger}(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi.\end{aligned}$$

无质量旋量场，$U(1)$对称性，$U(n)$($SU(n) \otimes U(1)$)对称性

像在实标量场情况中那样，我们先考虑对称性大的无质量情况。无质量的旋量场拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi.$$

与复标量场情况相同，它显然在变换

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi$$

下不变[9]。这是一种$U(1)$对称性。

下面考虑多分量的情况。

有（自旋以外）内部自由度的旋量场，$U(n)$ 考虑n个复标量场$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$，拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1 i \not{\partial} \psi_1 + \bar{\psi}_2 i \not{\partial} \psi_2 + \cdots + \bar{\psi}_n i \not{\partial} \psi_n.$$

将场表示成

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_1 i \not{\partial} \psi_1 + \bar{\psi}_2 i \not{\partial} \psi_2 + \cdots + \bar{\psi}_n i \not{\partial} \psi_n \\ &= \left(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_n\right) i \not{\partial} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi} i \not{\partial} \psi, \end{aligned} \tag{7.16}$$

这里$\bar{\psi} \equiv \left(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_n\right)$。这个拉氏量与复标量场一样，也是在$n$-维复空间中的旋转下不变的，也就是在$U(n)$群变换下不变的[10]。

有（自旋以外）内部自由度的旋量场，$SU(n) \otimes U(1)$ 与复标量场情况相同，这种幺正变换$U(n)$同样也可以用特殊幺正变换$SU(n)$再加一个$U(1)$变换来表示，即将$U(n)$群写成

$$SU(n) \otimes U(1).$$

同样也可以进一步考虑将每个分量ϕ_i作为一个相位变化的情况：

$$\psi_i \to e_i^{i\theta} \psi,$$

[9]将旋量场写成两个实旋量和的形式。试试看，这种实旋量会不会像实标量场那样没有反粒子。

[10]注意，这里的$\not{\partial}$不是这个空间中的矩阵，它可以被理解成一个数。

也就是

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\vdots\\\psi_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}e_1^{i\theta_1}\psi_1\\e_2^{i\theta_2}\psi_2\\\vdots\\e_n^{i\theta_n}\psi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&&\\&e^{i\theta_2}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\vdots\\\psi_n\end{pmatrix},$$

显然拉氏量（7.16）在变换$diag\left(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\cdots,e^{i\theta_n}\right)$下是不变的。这个变换的行列式是$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$。同样我们可以将这个变换表示成（7.5）的形式。从而得到一个$U(1)$的矩阵元$e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)/n}$乘上一个行列式为1的矩阵的形式。行列式为1的矩阵构成$SU(n)$群。所以，每一个分量做一个相位变化相当于一个$SU(n)\otimes U(1)$的变换。在这个变换下不变，就是具有$SU(n)\otimes U(1)$对称性。

有质量旋量场，$U(1)$对称性，$U(n)$($SU(n)\otimes U(1)$)对称性和对称性的破缺

有质量的旋量场场方程为

$$(i\not\partial-m)\psi=0.$$

相应的拉氏量为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not\partial-m)\psi.$$

这个拉氏量显然具有$U(1)$对称性，即在变换$\psi\to e^{i\theta}\psi$下不变。这与无质量情况是相同的。

考虑多分量的旋量场。一个具有n个相同质量分量$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$，的旋量场

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\vdots\\\psi_n\end{pmatrix}$$

。此时拉氏量（类比实标量场的情况）为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}i\not\partial\psi-m\bar{\psi}\psi.$$

这相当于质量矩阵$M\equiv m\mathbf{1}$（$\mathbf{1}$是单位阵）的情况。由于质量相同，所以这个拉氏量与无质量情况一样具有$U(n)$或$SU(n)\otimes U(1)$对称性。

但是如果这n个旋量场的质量不同，即拉氏量为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}_1 (i \not{\partial} - m_1) \psi_1 + \bar{\psi}_2 (i \not{\partial} - m_2) \psi_2 + \cdots + \bar{\psi}_n (i \not{\partial} - m_n) \psi_n \\
&= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_n)\, i \not{\partial} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} + (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \cdots, \bar{\psi}_n) \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \\
&= \bar{\psi} (i \not{\partial} - M) \psi,
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

这里$M \equiv diag\,(m_1, m_2, \cdots, m_n)$。质量不同使$U\,(n) (SU\,(n) \otimes U\,(1))$对称性破坏了。但是，质量并没有破坏掉所有对称性，拉氏量仍然在变换

$$
\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e_1^{i\theta_1} \psi_1 \\ e^{i\theta_2} \psi_2 \\ \vdots \\ e^{i\theta_n} \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},
$$

下不变。对称性降低为

$$
\overbrace{U\,(1) \oplus U\,(1) \oplus \cdots \oplus U\,(1)}^{n\text{个}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.
$$

质量使没有质量时的$SU\,(n) \otimes U\,(1)$对称性破缺到了一个更低的$U\,(1) \oplus U\,(1) \oplus \cdots \oplus U\,(1)$对称性。

与标量场的情况一样，这n个质量中如果有一些是相同的，那么会有一些局部的对称性。

用方阵（而不是矢量）表示有（自旋以外）内部自由度的场

前面，我们用方阵而不是列矩阵表示了复标量场，当然也可以用这种方法表示旋量场。

具有相同质量的多分量旋量场拉氏量为

$$
\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi,
$$

其中质量矩阵$M=m\mathbf{1}$。这个拉氏量具有$U(n)$对称性，即拉氏量在变换

$$\psi\to U\psi \tag{7.18}$$

下不变。用一个方阵$\mathbf{\Psi}$来表示同样这个场，当然要求$\mathbf{\Psi}$在同样的变换下不变，也就是要求拉氏量在

$$\mathbf{\Psi}\to U\mathbf{\Psi}U^{-1} \tag{7.19}$$

变换下不变。$\mathbf{\Psi}$是一个方阵，拉氏量必须是一个数。像处理复标量场一样我们利用迹将拉氏量表示成一个在变换（7.18）下不变的数：

$$\mathcal{L}=tr\left[\bar{\mathbf{\Psi}}i\not{\partial}\mathbf{\Psi}\right]-mtr\left[\bar{\mathbf{\Psi}}^{\dagger}\mathbf{\Psi}\right].$$

这个拉氏量与用矢量表示的拉氏量当然是完全等价的。

手征性

无质量的粒子与有质量的粒子是有非常本质不同的。这种不同的根源是相对论。相对论要求无质量的粒子必须以光速运动，而光速是最特殊的。这导致了有质量和无质量粒子间的本质区别。

有质量和无质量粒子之间的一个重要区别是有质量粒子有自旋，而无质量粒子只有螺度。自旋有$2s+1$个分量，而螺度永远只有两个分量。这就是为什么自旋为1的光子只有两个偏振方向的原因。旋量粒子是自旋半整数的粒子。当自旋为$\frac{1}{2}$时，自旋分量与螺度分量都是两个，反而使这个区别不明显了。

一个以光速运动的粒子一个最明显的特征是没有一个观察它的参照系可以运动得比它更快。而一个低于光速的粒子我们可以有两套参照系，一套比它慢，一套比它块。如果这个粒子在比它慢的参照系中看是左旋的，那么在比它快的参照系中看就可以是右旋的。因此，比光速慢的粒子可以左旋，也可以右旋。但是，如果这个粒子以光速运动，那么就不存在比它快的参照系。这样，一个左旋的粒子永远左旋，一个右旋的粒子永远右旋。这就是说，一个没有质量，从而以光速运动的粒子，要不就是左旋的，要不就是右旋的。不可能既有左旋，又有右旋。这种左右旋的性质显然可以方便地用左右手来表示，所以这种性质被称为手征性。一个有质量的粒子是没有明确的手征性的。对于无质量的粒子，我们就可以将它们分成左手的和右手的两类。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}\cdots\psi\\
&\gamma_5\cdots\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\right)\psi\\
&\gamma_0\cdots\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_0\right)\psi\\
&\gamma_1\\
&\gamma_2\\
&\gamma_3\\
&\gamma_5\gamma_0\\
&\gamma_5\gamma_1\\
&\gamma_5\gamma_2\\
&\gamma_5\gamma_3\\
&\sigma^{01}\\
&\sigma^{02}\\
&\sigma^{03}\\
&\sigma^{12}\\
&\sigma^{13}\\
&\sigma^{23}
\end{aligned}
$$

利用了

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\{\gamma^\mu,\gamma^\mu\}&=\gamma^\mu\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\mu=2g^{\mu\mu}\\
\gamma^{\mu 2}&=g^{\mu\mu}\\
\left(\gamma^0\right)^2&=1\\
\left(\gamma^1\right)^2&=-1\\
\left(\gamma^2\right)^2&=-1\\
\left(\gamma^3\right)^2&=-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_0\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_0\pm 1\right)\psi=\pm\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_0\right)\psi\\
\gamma_1\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_1\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\mp 1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_1\right)\psi\\
\vdots\qquad\qquad\qquad\\
\gamma_i\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_i\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_i\pm 1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_i\right)\psi
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_\mu\right)\psi=\pm g^{\mu\mu}\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_\mu\right)\psi
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_5\gamma_0\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_0\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_0\mp 1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_0\right)\psi\\
\gamma_5\gamma_i\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_i\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_i\pm 1\right)\psi=\pm\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_i\right)\psi
\end{aligned}
$$

或

$$
\gamma_5\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_\mu\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\gamma_5\gamma_\mu\pm 1\right)\psi=\mp g^{\mu\mu}\frac{1}{2}\left(1\pm\gamma_5\gamma_\mu\right)\psi
$$

$$
\sigma^{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{\mu\nu}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu\nu}\pm g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\right)\psi
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sigma^{0i}\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{0i}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\sigma^{0i}\mp 1\right)\psi=\mp\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{0i}\right)\psi\\
\sigma^{ij}\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{ij}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\sigma^{ij}\pm 1\right)\psi=\pm\frac{1}{2}\left(1\pm\sigma^{ij}\right)\psi
\end{aligned}
$$

其中利用了

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}&=\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\left(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\
&=-\frac{1}{4}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu+\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\
&=-\frac{1}{4}\left(-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu g^{\mu\mu}\gamma^\nu-\gamma^\mu g^{\nu\nu}\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\
&=-\frac{1}{4}\left(-\gamma^\nu g^{\mu\mu}\gamma^\nu-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-\gamma^\mu g^{\nu\nu}\gamma^\mu\right)\\
&=-\frac{1}{4}\left(-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}-g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\right)\\
&=g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}
\end{aligned}
$$

引入投影算符

$$P_{\pm}=\frac{1\pm\gamma_5}{2}$$

则可利用这个算符将旋量投影为左手的和右手的：

$$\psi_L=P_+\psi,\psi_R=P_-\psi$$

由此

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L&=\psi_L^\dagger\gamma^0=\psi^\dagger P_+^\dagger\gamma^0=\psi^\dagger P_+\gamma^0=\psi^\dagger\gamma^0P_-=\bar{\psi}P_-\\\bar{\psi}_R&=\psi_R^\dagger\gamma^0=\psi^\dagger P_-^\dagger\gamma^0=\psi^\dagger P_-\gamma^0=\psi^\dagger\gamma^0P_+=\bar{\psi}P_+\end{aligned}$$

其中利用了

$$P_{\pm}\gamma^\mu=\gamma^\mu P_{\mp}$$

于是我们可以把拉氏密度写为

$$\begin{aligned}L&=i\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi\\&=i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\left(P_++P_-\right)\psi\\&=i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_+\psi+i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_-\psi\\&=i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_+^2\psi+i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu P_-^2\psi\\&=i\bar{\psi}P_-\gamma^\mu\partial_\mu P_+\psi+i\bar{\psi}P_+\gamma^\mu\partial_\mu P_-\psi\\&=i\bar{\psi}_L\ \partial\!\!\!/\psi_L+i\bar{\psi}_R\ \partial\!\!\!/\psi_R\end{aligned}$$

这时由于左手部分和右手部分可以独立的变换

$$\psi_L\to U_L\psi_L,\psi_R\to U_R\psi_R$$

每一部分的变换规律与前面的ψ的规律完全相同，而两部分的变换又是独立的，因此这时系统的对称群扩大为两个$SU\left(2\right)\times U\left(1\right)$。

7.4.3 矢量场

描述矢量场我们用场量$\mathcal{A}^\mu$。我们没有采用场强$\mathcal{F}_{\mu\nu}$来描述矢量场是因为$\mathcal{F}_{\mu\nu}$包含的信息量是不够的。

如果我们仍然坚持拉氏量只包含场量$\mathcal{A}^\mu$的二次方（在非Abel的情况下我们会引入非线性的四次方项，从而导致出现自作用），那么普遍地我们可以将拉氏量的各项（必须是Lorentz标量）写成这样两种可能的项：

$$\bar{A}^\mu D_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu,\bar{A}_\mu D\mathcal{A}^\mu.$$

这里$\bar{\mathcal{A}}_\mu$应该是一个与$\mathcal{A}^\mu$直接相关的逆变矢量。这里$D_{\mu\nu}$和D包含导数∂^μ的部分和常数项，普遍地可以写成

$$D_{\mu\nu} = a\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + b\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu,$$
$$D = c\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}^\nu + d.$$

。注意，由于不是旋量这样的多值表示，所以，在Lorentz时空这个空间中它不是一个矩阵。

$\bar{\mathcal{A}}_\mu$是什么

那么$\bar{\mathcal{A}}_\mu$是什么呢。确定$\bar{\mathcal{A}}_\mu$我们不妨由最简单的情况做，得到的结果是普遍的。这里考虑D是标量的情况。

$\mathcal{A}^\mu$和$\bar{\mathcal{A}}_\mu$是Lorentz矢量和Lorentz逆变矢量。

在Lorentz变换下，矢量变换为

$$\mathcal{A}^\mu \to \Lambda^\mu_{\mathcal{A}\sigma}\mathcal{A}^\sigma.$$

逆变矢量的Lorentz变换为[11]

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu \to \bar{\mathcal{A}}_\rho\tilde{\Lambda}^\rho_{\bar{\mathcal{A}}\mu}.$$

由此我们可以得到$\bar{\mathcal{A}}^\nu$在Lorentz变换下的变换

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu g^{\mu\nu} \to \bar{\mathcal{A}}_\rho\tilde{\Lambda}^\rho_{\bar{\mathcal{A}}\mu}g^{\mu\nu}$$
$$\bar{\mathcal{A}}^\nu \to \bar{\mathcal{A}}^\rho\tilde{\Lambda}_{\mathcal{A}\rho}{}^\nu$$

于是在Lorentz变换下

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu \to \bar{\mathcal{A}}_\rho\tilde{\Lambda}^\rho_{\bar{\mathcal{A}}\mu}D\Lambda^\mu_{\mathcal{A}\sigma}\mathcal{A}^\sigma$$

[11]

$$\mathcal{A}^\mu \to \Lambda^\mu_{\mathcal{A}\nu}\mathcal{A}^\nu$$
$$g_{\mu\rho}\mathcal{A}^\mu \to g_{\mu\rho}\Lambda^\mu_{\mathcal{A}\nu}\mathcal{A}^\nu$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \Lambda_{\mathcal{A}\rho\nu}\mathcal{A}^\nu$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \Lambda_{\mathcal{A}\rho}{}^\nu\mathcal{A}_\nu$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \mathcal{A}_\nu\tilde{\Lambda}^\nu_{\mathcal{A}\rho}$$
$$\mathcal{A}_\rho \to \mathcal{A}_\nu\tilde{\Lambda}^\nu_{\mathcal{A}\rho}$$

这相当于

$$\bar{\mathcal{A}}^\nu g_{\nu\mu} D\mathcal{A}^\mu \to \bar{\mathcal{A}}^\rho \tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho}{}^\nu g_{\nu\mu} D\Lambda^\mu_{\mathcal{A}\sigma}\mathcal{A}^\sigma$$

这要求

$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho}{}^\nu g_{\nu\mu} D\Lambda^\mu_{\mathcal{A}\sigma} = g_{\rho\sigma} D$$
$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho\nu} g^{\nu\mu} D\Lambda_{\mathcal{A}\mu\sigma} = g_{\rho\sigma} D$$

这里D是任意的标量，不论D是什么，这个关系都应该成立。我们取$D=1$，有

$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\mathcal{A}}\rho\nu} g^{\nu\mu} \Lambda_{\mathcal{A}\mu\sigma} = g_{\rho\sigma}$$

写成矩阵的形式($g^{\nu\mu}=g_{\nu\mu}$)

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\bar{\mathcal{A}}}\mathbf{g}\,\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{g}$$

这说明我们并不要求$\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}}$是幺正的（幺正要求$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\bar{\mathcal{A}}}\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$）。也就是说，我们不要求$\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{A}}$非得是Lorentz的一个有限维幺正表示。这对我们非常重要，因为Lorentz群没有有限维幺正表示。回顾在旋量的情况中，Lorentz群没有有限维幺正表示的要求使得我们不能将$\bar{\psi}$选成$\tilde{\psi}$或$\psi^\dagger$，而只能在ψ上再乘上一个矩阵Γ。在矢量的情况中Lorentz群没有有限维幺正表示的要求不构成限制，因此我们可以任意选择$\bar{\mathcal{A}}_\mu$。既然是任意的，一个简单自然的选择是

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{A}^*_\mu.$$

如果场量$\mathcal{A}_\mu$描述的是一个有内部自由度的矢量场，这时$\mathcal{A}_\mu$是一个矩阵，那么这个选择就变成了

$$\bar{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{A}^\dagger_\mu.$$

场的描述：（自旋以外）内部自由度

如果矢量场$\mathcal{A}^\mu$有自旋以外的内部自由度，我们当然也可以像前面处理有内部自由度的标量场和旋量场的方法处理，将一系列的矢量场写成一个列矢量，即

$$\mathcal{A}^\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^\mu_1 \\ \mathcal{A}^\mu_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}^\mu_n \end{pmatrix}.$$

但是我们也可以采用前面讨论过的用方阵而不是列矢量来表示有内部自由度的场的方法来表示有内部自由度的矢量场。$\mathcal{A}^\mu$就是一个方阵

$$\mathcal{A}^\mu = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathcal{A}^\mu_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}^\mu$的不同分量表明内部自由度的存在。

无（自旋以外）内部自由度的矢量场

按照前面的分析，一个有（自旋以外）内部自由度的矢量场可以用一个方阵来描述。最简单的情况当然就是没有（自旋以外）内部自由度的情况，这时$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵，也就是一个数。我们先考虑这种简单情况，然后再将结果推广到更普遍的情况。

拉氏量

如前面讨论的，一个有内部自由度的场用一个方阵表示，而一个拉氏量一定是一个数。像在前面一样我们可以普遍地将拉氏量取成迹的形式[12]：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= tr\left(\bar{\mathcal{A}}^\mu D_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu + \bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + b\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right).\end{aligned}$$

在没有内部自由度的情况中$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵，也就是一个数。在这种情况下我们有而且拉氏量中的迹也不用再求了，或者说，可以直接求出来。此时拉氏量为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + b\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu.$$

本质上我们关心的是解，是运动方程，所以拉氏量相差一个全微分（这相当于作用量相差

---

[12]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= tr\left(\bar{\mathcal{A}}^\mu D_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu + \bar{\mathcal{A}}_\mu D\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(\bar{\mathcal{A}}^\mu\left(a\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + b\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu\right)\mathcal{A}^\nu + \bar{\mathcal{A}}_\mu\left(c\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}^\nu + d\right)\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(a\bar{\mathcal{A}}^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu\mathcal{A}^\nu + b\bar{\mathcal{A}}^\mu\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu\mathcal{A}^\nu + c\bar{\mathcal{A}}_\mu\overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu c\mathcal{A}^\mu\right)\\ &= tr\left(a\partial_\mu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + b\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu\bar{\mathcal{A}}_\mu\partial^\nu\mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu\mathcal{A}^\mu\right)\end{aligned}$$

一个常数）是等价的，由于[13]

$$\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu = \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)$$

即$\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu$和$\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu$两项只相差一个全微分，所以可以只保留其中一项就可以：

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu. \tag{7.20}$$

当$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵（也就是一个数）的时候我们还有

$$\mathcal{A}_\mu^\dagger (x) = \mathcal{A}_\mu^* (x) .$$

这样拉氏量变为

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu.$$

当然，这里的常数都还没有确定下来。为了确定这些常数，我们先回到物理意义比较明确的哈密顿量。

哈氏量

由拉氏量(7.20)出发[14]，通过Legendre变换我们可以直接得到哈氏量。

---

[13]

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu &= \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu \\
&= \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \left[\partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right] \\
&= \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) + \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu \\
&= \partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\nu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\nu\right) - \partial_\mu \left(\bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)
\end{aligned}$$

[14]为了使得到的结果更普遍，我们尽量在最普遍的情况下做。

对应$\mathcal{A}_\alpha$的广义动量为[15]

$$\begin{aligned}\pi^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)} \\ &= a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_0 \bar{\mathcal{A}}^\alpha. \end{aligned} \tag{7.21}$$

对应$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$的广义动量为[16]

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)} \\ &= a g_0^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_0 \mathcal{A}^\alpha. \end{aligned} \tag{7.22}$$

---

[15]

$$\begin{aligned}\pi^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)} tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a\left[\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right] + c\left[\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right]\right) \\ &= tr\left(a\left[\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}_\nu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right] + c\left[\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \mathcal{A}_\alpha\right)}\right]\right) \\ &= tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\nu g_\mu^\alpha\right) \\ &= tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu g_0^\alpha + c\partial_0 \bar{\mathcal{A}}^\alpha\right)\end{aligned}$$

[16]

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)} tr\left(a\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a\frac{\partial\left(\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\frac{\partial\left(\partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a\frac{\partial\left(\partial^\mu \bar{\mathcal{A}}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\frac{\partial\left(\partial^\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu\right)}{\partial\left(\partial^0 \bar{\mathcal{A}}_\alpha\right)}\partial_\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a g_0^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c g_0^\nu g_\mu^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= tr\left(a g_0^\alpha \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + c\partial_0 \mathcal{A}^\alpha\right)\end{aligned}$$

Hamilton量为[17]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + \dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\bar{\pi}^{\alpha} - \mathcal{L} \\
&= (a+c)\,\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}.
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

---

[17]Hamilton量

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + \dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\bar{\pi}^{\alpha} - \mathcal{L} \\
&= tr\left(a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu}g_0^{\alpha} + c\partial_0\bar{\mathcal{A}}^{\alpha}\right)\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + \dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}tr\left(ag_0^{\alpha}\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\partial_0\mathcal{A}^{\alpha}\right) - tr\left(a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu}\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\partial_{\nu}\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu} + d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}\right) \\
&= tr\left(a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu}g_0^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}\right) + tr\left(ag_0^{\alpha}\dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\dot{\mathcal{A}}^{\alpha}\right) - tr\left(a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu}\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\partial_{\nu}\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu} + d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}\right) \\
&= tr\left(a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu}\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{\alpha}\dot{\mathcal{A}}_{\alpha} + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_{\alpha}\dot{\mathcal{A}}^{\alpha} - a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu}\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} - c\partial_{\nu}\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu} - d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}\right) \\
&= tr\begin{pmatrix} a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}_0 + a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{i}\dot{\mathcal{A}}_i + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i \\ -a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} - c\partial_0\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\partial^0\mathcal{A}^{\mu} - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\partial^i\mathcal{A}^{\mu} - d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu} \end{pmatrix} \\
&= tr\begin{pmatrix} a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}_0 + a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{i}\dot{\mathcal{A}}_i + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_i\mathcal{A}^i + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i \\ -a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}^0 - a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\partial_i\mathcal{A}^i - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 - c\partial_0\bar{\mathcal{A}}_i\partial^0\mathcal{A}^i - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu} \end{pmatrix} \\
&= tr\begin{pmatrix} \left(a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}_0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}_0 + a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 - a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\dot{\mathcal{A}}^0 - c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0\right) \\ + \left(c\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{i}\dot{\mathcal{A}}_i + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i\right) + \left(a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}_0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\dot{\mathcal{A}}^0\right) \\ + \left(a\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\partial_i\mathcal{A}^i - a\dot{\bar{\mathcal{A}}}^{0}\partial_i\mathcal{A}^i\right) - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu} \end{pmatrix} \\
&= tr\left((a+c)\,\dot{\bar{\mathcal{A}}}_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\bar{\mathcal{A}}}_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\bar{\mathcal{A}}^i\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\bar{\mathcal{A}}_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\bar{\mathcal{A}}_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

其中用到我们有

$$
\begin{aligned}
\pi^0 &= tr\left(a\partial_{\mu}\bar{\mathcal{A}}^{\mu} + c\partial_0\bar{\mathcal{A}}^0\right) \\
\pi^i &= tr\left(c\partial_0\bar{\mathcal{A}}^i\right) \\
\bar{\pi}^0 &= tr\left(\partial_{\nu}\mathcal{A}^{\nu} + c\partial_0\mathcal{A}^0\right) \\
\bar{\pi}^i &= tr\left(c\partial_0\mathcal{A}^i\right)
\end{aligned}
$$

按照前面对$\bar{A}$的讨论，我们选择了$\bar{A}_\mu = \mathcal{A}^\dagger_\mu$。这样拉氏量为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= (a+c)\,\dot{\mathcal{A}}^\dagger_0\dot{\mathcal{A}}^0 + c\dot{\mathcal{A}}^\dagger_i\dot{\mathcal{A}}^i - c\partial_i\mathcal{A}^\dagger_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\partial_i\mathcal{A}^{i\dagger}\partial_j\mathcal{A}^j - c\partial_i\mathcal{A}^\dagger_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\mathcal{A}^\dagger_\mu\mathcal{A}^\mu \\
&= (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 - c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) \\
&- c\partial_i\mathcal{A}^\dagger_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 - c\partial_i\mathcal{A}^\dagger_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\left(\mathcal{A}^\dagger_0\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}^\dagger_1\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}^\dagger_2\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}^\dagger_3\mathcal{A}_3\right) \\
&= (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 - c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) \\
&- c\partial_i\mathcal{A}^\dagger_0\partial^i\mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i\mathcal{A}^i\right|^2 - c\partial_i\mathcal{A}^\dagger_j\partial^i\mathcal{A}^j - d\left(\left|\mathcal{A}_0\right|^2 - \left|\mathcal{A}_1\right|^2 - \left|\mathcal{A}_2\right|^2 - \left|\mathcal{A}_3\right|^2\right)
\end{aligned} \tag{7.24}
$$

能量有下界

我们来确定待定常数a，c和d。我们的依据是这样一个基本假设：世界是稳定的。这是我们所引入的为数不多的基本假设之一。

哈氏量必须有下界是一个非常强的要求。对自由粒子而言，能量有下界要求在任何情况下能量都必须是正的。我们可以考虑一些特殊情况而不失一般性。拉氏量（7.24）第一项$(a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2$是包含$\dot{\mathcal{A}}^0$的唯一的一项。考虑$\dot{\mathcal{A}}^0$非常大的情况。这时拉氏量只有第一项，即

$$\mathcal{H} \sim (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2.$$

由于它是个平方项，要求它大于零就是要求

$$a \geq -c.$$

再考虑，比如，$\partial_1\mathcal{A}^1$特别大的情况，这时拉氏量为

$$\mathcal{H} \sim -a\left|\partial_1\mathcal{A}^1\right|^2 - c\left|\partial^1\mathcal{A}^1\right|^2 = -(a+c)\left|\partial_1\mathcal{A}^1\right|^2.$$

这也是个平方项，要求它大于零就是要求

$$a \leq -c.$$

综合这两个结果有

$$a = -c$$

考虑$\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|$，$\left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|$和$\left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|$特别大的情况，我们有

$$\mathcal{H} \sim -c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) \tag{7.25}$$

这是一个平方和，这项大于零要求

$$c \le 0$$

从而

$$a = -c \ge 0$$

此时哈氏量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= (a+c)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 - c\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) - c\partial_i \mathcal{A}_0^\dagger \partial^i \mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i \mathcal{A}^i\right|^2 - c\partial_i \mathcal{A}_j^\dagger \partial^i \mathcal{A}^j \\
&\quad - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right) \\
&= (a-a)\left|\dot{\mathcal{A}}^0\right|^2 + a\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) + a\partial_i \mathcal{A}_0^\dagger \partial^i \mathcal{A}^0 - a\left|\partial_i \mathcal{A}^i\right|^2 + a\partial_i \mathcal{A}_j^\dagger \partial^i \mathcal{A}^j \\
&\quad - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right) \\
&= |a|\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2\right) + |a|\,\partial_i \mathcal{A}_0^\dagger \partial^i \mathcal{A}^0 - |a|\left|\partial_i \mathcal{A}^i\right|^2 + |a|\,\partial_i \mathcal{A}_j^\dagger \partial^i \mathcal{A}^j - d\bigg(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2 \\
&= |a|\left(\left|\dot{\mathcal{A}}_1\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_2\right|^2 + \left|\dot{\mathcal{A}}_3\right|^2 + \partial_i \mathcal{A}_0^\dagger \partial^i \mathcal{A}^0 - \left|\partial_i \mathcal{A}^i\right|^2 + \partial_i \mathcal{A}_j^\dagger \partial^i \mathcal{A}^j\right) - d\left(|\mathcal{A}_0|^2 - |\mathcal{A}_1|^2 - |\mathcal{A}_2|^2 - |\mathcal{A}_3|^2\right).
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}^{\mu\nu}$

前面由能量有下界这样的条件将拉氏量确定到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= |a|\left(\partial_\mu \bar{\mathcal{A}}^\mu \partial_\nu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \bar{\mathcal{A}}_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + d\bar{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}^\mu \\
&= |a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu\dagger} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^\dagger \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + d\mathcal{A}_\mu^\dagger \mathcal{A}^\mu \\
&= |a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + d\mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu.
\end{aligned}$$

由此我们可以得到运动方程。

取$\mathcal{A}^\mu$为广义坐标，我们有

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)} &= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)+d \mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left[\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \frac{\partial\left(\partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}\right] \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left[\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\rho\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)} g^{\nu \rho}-\partial^\nu \mathcal{A}^{\mu *} \frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta\right)}\right] \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} g_\nu^\alpha g_\rho^\beta g^{\nu \rho}-\partial^\nu \mathcal{A}^{\mu *} g_\nu^\alpha g_\mu^\beta\right) \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} g^{\alpha \beta}-\partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}\right) \\
&= |a|\left(\partial^\beta \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *}-\partial_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}\right) \\
&= -|a|\, \partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}-\partial^\beta \mathcal{A}^{\alpha *}\right)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\beta} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\beta}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)+d \mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= d \mathcal{A}_\mu^* g^{\mu \beta} \\
&= d \mathcal{A}^{\beta *}.
\end{aligned}
$$

这样运动方程为

$$
-|a|\, \partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^{\beta *}-\partial^\beta \mathcal{A}^{\alpha *}\right)-d \mathcal{A}^{\beta *}=0 \tag{7.26}
$$

另外，我们还可以取$\mathcal{A}_\mu^*$为广义坐标，此时

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} &= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)+d \mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left[\frac{\partial\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *}\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^*\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left[\frac{\partial\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\rho^*\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} g^{\mu \rho} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\frac{\partial\left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu^*\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta^*\right)} \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left(g_\mu^\alpha g_\rho^\beta g^{\mu \rho} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-g_\nu^\alpha g_\mu^\beta \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\
&= |a|\, \partial_\alpha\left(g^{\alpha \beta} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta\right) \\
&= |a|\left(\partial^\beta \partial_\nu \mathcal{A}^\nu-\partial_\alpha \partial^\alpha \mathcal{A}^\beta\right) \\
&= -|a|\, \partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta-\partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right),
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\beta^*} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\beta^*}\left[|a|\left(\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu*}\partial_\nu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + d\mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= d g_\mu^\beta \mathcal{A}^\mu \\
&= d\mathcal{A}^\beta .
\end{aligned}
$$

因此方程为

$$
-|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right) - d\mathcal{A}^\beta = 0 \tag{7.27}
$$

对方程（7.26）取复共轭有$-|a|\,\partial_\alpha\left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right) - d^*\mathcal{A}^\beta = 0$。与方程（7.27）对比有

$$
d = d^*,
$$

说明d是个实数。

方程（7.27）的形式启发我们引入

$$
\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu . \tag{7.28}
$$

这可以使方程（7.27）表示成更紧凑的形式

$$
|a|\,\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + d\mathcal{A}^\nu = 0. \tag{7.29}
$$

这个$\mathcal{F}^{\mu\nu}$具有明显的反对称形式，这一点是非常深刻的。回顾这个$\mathcal{F}^{\mu\nu}$是怎样得到的，我们可以看出，这是能量有下界的要求导致的（你可以尝试取一个对称的$\mathcal{F}^{\mu\nu}$，会发现能量不再有下界）。

当然，我们也可以用$\mathcal{F}^{\mu\nu}$来表示拉氏量。$\mathcal{F}^{\mu\nu}$中只包含$\mathcal{A}^\mu$的导数项，因此只需将拉氏量（**??**）中的含导数的项与$\mathcal{F}^{\mu\nu}$对应上。拉氏量中的导数项是二次的，$\mathcal{F}^{\mu\nu}$是一次的，因此拉氏量中一定是$\mathcal{F}^{\mu\nu}$的平方。$\mathcal{F}^{\mu\nu}$的平方是

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu}^* \mathcal{F}^{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^*\right)\left(\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\
&= \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\
&= 2\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right)
\end{aligned} \tag{7.30}
$$

这与拉氏量（??）中的含导数的项并不相等。但是其中

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu &= \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \mathcal{A}_\nu^* \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{A}^\mu \\
&= \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \left[\partial^\nu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial^\nu \mathcal{A}_\nu^* \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right] \\
&= \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial^\nu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right) + \partial^\nu \mathcal{A}_\nu^* \partial_\mu \mathcal{A}^\mu \\
&= \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial^\nu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\
&= \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) - \partial_\mu \left(\mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) \\
&= \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu + \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)
\end{aligned}
$$

这样有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu}^* \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 2\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) \\
&= 2\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - 2\partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu - 2\partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) \\
&= 2\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) - 2\partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}^* \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right) = \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial_\mu \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)
$$

这样拉氏量可以写为

$$
\mathcal{L} = -\left|a\right| \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}^* \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu^* \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \mathcal{A}^{\mu *} \partial_\nu \mathcal{A}^\nu\right)\right) + d\mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu.
$$

这个拉氏量中包含一个全微分项。我们知道，拉氏量相差一个全微分相当于作用量相差一个常数，不影响运动方程。因此我们可以将拉氏量取成

$$
\mathcal{L} = -\frac{|a|}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}^* \mathcal{F}^{\mu\nu} + d\mathcal{A}_\mu^* \mathcal{A}^\mu. \tag{7.31}
$$

$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$

前面我们引入了反对称张量

$$
\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu.
$$

可以直接验证反对称的$\mathcal{F}^{\mu\nu}$满足[18]

$$\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} = 0. \tag{7.32}$$

这个结果其实有更深刻的理由：$\mathcal{F}$是$\mathcal{A}$的外微分，即

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$$

对外微分我们有（外微分是反对称的）

$$d^2 = 0,$$

因此

$$d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0.$$

方程（7.32）可以写成更紧凑的形式[19]

$$\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\lambda\left(\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) = 0.$$

这启发我们引入这样一个反对称张量

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

这样（7.32）可以写成

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = 0$$

的形式。

这个$\tilde{F}^{\mu\nu}$称为$\mathcal{F}^{\mu\nu}$的对偶张量。这个对偶在数学上有非常深刻的含义，就是所谓的Hodge$*$对偶。

18

$$\begin{aligned}
&\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} \\
&= \partial^\lambda\left(\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu\right) + \partial^\mu\left(\partial^\nu \mathcal{A}^\lambda - \partial^\lambda \mathcal{A}^\nu\right) + \partial^\nu\left(\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu - \partial^\mu \mathcal{A}^\lambda\right) \\
&= \partial^\lambda\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\lambda\partial^\nu \mathcal{A}^\mu + \partial^\mu\partial^\nu \mathcal{A}^\lambda - \partial^\mu\partial^\lambda \mathcal{A}^\nu + \partial^\nu\partial^\lambda \mathcal{A}^\mu - \partial^\nu\partial^\mu \mathcal{A}^\lambda \\
&= 0
\end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\left(\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu}\right) &= 0 \\
\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} &= 0 \\
\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\sigma\nu\lambda}\partial^\mu \mathcal{F}^{\nu\lambda} + \varepsilon_{\nu\sigma\lambda\mu}\partial^\nu \mathcal{F}^{\lambda\mu} &= 0 \\
3\varepsilon_{\lambda\sigma\mu\nu}\partial^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}^\mu$：借助一点儿相互作用

基于与前面同样的理由，进一步确定拉氏量需要借助一些相互作用。我们考虑一个恒力的作用。加入一个恒力J_μ拉氏量普遍地可以写成（这也是考虑厄米要求后的最普遍的情况）

$$\mathcal{L}=-\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}+|d|\,\mathcal{A}^*_\mu\mathcal{A}^\mu+\left(J^*_\mu\mathcal{A}^{\mu*}+J_\mu\mathcal{A}^\mu\right).$$

由此可得运动方程。

取$\mathcal{A}^\mu$为广义坐标有

$$\partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\mathcal{A}_\beta\right)}=-\left|a\right|\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^{\beta*}-\partial^\beta\mathcal{A}^{\alpha*}\right)$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{A}_\beta}&=\frac{\partial}{\partial\mathcal{A}_\beta}\left[-\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}+d\mathcal{A}^*_\mu\mathcal{A}^\mu+\left(J^*_\mu\mathcal{A}^{\mu*}+J_\mu\mathcal{A}^\mu\right)\right]\\&=d\mathcal{A}^*_\mu g^{\mu\beta}+J_\mu g^{\mu\beta}\\&=d\mathcal{A}^{\beta*}+J^\beta.\end{aligned}$$

得到方程为

$$-\left|a\right|\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^{\beta*}-\partial^\beta\mathcal{A}^{\alpha*}\right)-d\mathcal{A}^{\beta*}=J^\beta. \tag{7.33}$$

取$\mathcal{A}^*_\mu$为广义坐标有

$$\partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\mathcal{A}^*_\beta\right)}=-\left|a\right|\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^\beta-\partial^\beta\mathcal{A}^\alpha\right),$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{A}^*_\beta}&=\frac{\partial}{\partial\mathcal{A}^*_\beta}\left[-\frac{|a|}{2}\mathcal{F}^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}+d\mathcal{A}^*_\mu\mathcal{A}^\mu+\left(J^*_\mu\mathcal{A}^{\mu*}+J_\mu\mathcal{A}^\mu\right)\right]\\&=dg^\beta_\mu\mathcal{A}^\mu+J^*_\mu g^{\mu\beta}\\&=d\mathcal{A}^\beta+J^{\beta*}.\end{aligned}$$

得到方程为

$$-\left|a\right|\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\mathcal{A}^\beta-\partial^\beta\mathcal{A}^\alpha\right)-d\mathcal{A}^\beta=J^{\beta*}. \tag{7.34}$$

现在，一切都取决于相互作用流的性质。我们取最简单的复标量场流作为例子[20]，得到的结果是普遍的。标量流为

$$J^\mu=\phi^*\partial^\mu\phi-\phi\partial^\mu\phi^*.$$

[20]实标量场是真标量场，没有守恒流。

显然有

$$J^{\mu*} = -\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right) = -J^\mu.$$

于是（7.34）为

$$-\left|a\right| \partial_\alpha \left(\partial^\alpha \mathcal{A}^\beta - \partial^\beta \mathcal{A}^\alpha\right) - d\mathcal{A}^\beta = -J^\beta. \tag{7.35}$$

对比（7.33）和（7.35），有

$$\mathcal{A}^{\beta*} = -\mathcal{A}^\beta.$$

这要求场量$\mathcal{A}^\mu$是一个纯虚数。我们不妨将它表示成

$$\mathcal{A}^\mu \equiv igA^\mu. \tag{7.36}$$

这里g是为了今后方便引入的一个实参数，当然你也可以将它吸收到A^μ中。

$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$

利用（7.36）的关系，我们可以将矢量场拉氏量和方程用实的A^μ表示。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu \\ &= ig\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\ &\equiv igF^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

由（7.31）有

$$\mathcal{L} = g^2 \left(-\frac{|a|}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + dA_\mu A^\mu\right). \tag{7.37}$$

同样，可以引入

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = ig\tilde{F}^{\mu\nu}.$$

这样有

$$\tilde{F}^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

无（自旋以外）内部自由度的自由矢量场拉氏量

由此得到的运动方程为

$$\left|a\right| \partial_\mu F^{\mu\nu} + dA^\nu = 0. \tag{7.38}$$

为了确定参数我们将所得结果与实验对比。将有质量的矢量场方程，也就是Proca方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{7.39}$$

看作是唯象方程。

对比这两个方程我们有

$$d = Cm^2,$$
$$|a| = C.$$

于是拉氏量为

$$\mathcal{L} = g^2 C\left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu\right).$$

确定C仍需要借助相互作用。考虑一个恒力的作用，运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu. \tag{7.40}$$

相应的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= g^2 C\left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu\right) + qJ_\mu A^\mu. \\ &= g^2\left(-\frac{C}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Cm^2 A_\mu A^\mu\right) + qJ_\mu A^\mu\end{aligned}$$

方程为

$$2g^2 C\partial_\mu F^{\mu\nu} + 2g^2 Cm^2 A^\nu = qJ^\nu$$

与（7.40）有

$$C = \frac{1}{2g^2},$$
$$q = 1.$$

所以拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu\right) + J_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + J_\mu A^\mu.\end{aligned}$$

由此知自由矢量场的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.$$

自然地，我们也得到了运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0.$$

这里的运动方程是我们从拉氏量得到了，不再是唯象的经验结果了。

场强

前面我们引入了张量$F^{\mu\nu}$来描述矢量场。这里我们考虑$F^{\mu\nu}$的各个分量。反对称的$F^{\mu\nu}$一共有6个分量，分别考虑它们。

其中三个分量是

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla A^0\right)^i.$$

容易看出，非常巧合，$F^{\mu\nu}$的这三个分量F^{0i}在三维转动下完全按照一个三维欧氏空间的矢量那样变换；也就是说，张量$F^{\mu\nu}$的这三个分量可以看作是三维空间中的一个矢量。我们将它写成

$$\mathbf{E} = \left(-F^{01}, -F^{02}, -F^{03}\right) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla A^0.$$

这里的负号是出于习惯的考虑。

另外三个独立的分量是

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \frac{\partial A^j}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
F^{12} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)_z \\
F^{23} &= \frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3} = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = -\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)_x \\
F^{31} &= \frac{\partial A^1}{\partial x_3} - \frac{\partial A^3}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = -\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)_y
\end{aligned}$$

与前面F^{0i}的情况不同，这里的$\nabla \times \mathbf{A}$三维转动下是赝矢量而不是矢量。我们将这个赝矢表示为

$$\mathbf{B} = \left(-F^{23}, -F^{31}, -F^{12}\right) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

写成矩阵形式：

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

这就是说，四维时空中的张量$F^{\mu\nu}$的六个独立的分量可以分成两组：一组构成一个三维旋转下的矢量$\mathbf{E}$，另一组构成一个三维旋转下的赝矢量$\mathbf{B}$。这两组分量在质量为零的无自旋以外的内部自由度的矢量场的情况下就是场强：电场和磁场。可见，电场和磁场本质

上是一个张量的分量。它们不是某个四矢中的去掉一个时间分量后的三个空间分量（四矢的三个空间分量一般在三维旋转下也是个三矢），而是一个四维时空中张量中的六个分量分成两组，这两组一组是三维的矢量，一组是三维的赝矢量。所以，但我们看到一个三维矢量的时候不能立刻认为它就是四矢的三分量。同样，一个高维矢量或张量的分量完全可能在低维情况中按照矢量的变换变。

前面我们引入了张量$F^{\mu\nu}$的对偶张量$\tilde{F}^{\mu\nu}$。$\tilde{F}^{\mu\nu}$也是反对称张量，也只有6个独立分量。$\tilde{F}^{\mu\nu}$的各个分量可以直接看出

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}^{01} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0132}F_{32} = F_{23} = g_{2\mu}g_{3\nu}F^{\mu\nu} = F^{23}, \\
\tilde{F}^{02} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0213}F_{13} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0231}F_{31} = F_{31} = g_{3\mu}g_{1\nu}F^{\mu\nu} = F^{31}, \\
\tilde{F}^{03} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0312}F_{12} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0321}F_{21} = F_{12} = g_{1\mu}g_{2\nu}F^{\mu\nu} = F^{12}, \\
\tilde{F}^{12} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} + \frac{1}{2}\varepsilon^{1230}F_{30} = F_{03} = g_{0\mu}g_{3\nu}F^{\mu\nu} = -F^{03}, \\
\tilde{F}^{23} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{2301}F_{01} + \frac{1}{2}\varepsilon^{2310}F_{10} = F_{01} = g_{0\mu}g_{1\nu}F^{\mu\nu} = -F^{01}, \\
\tilde{F}^{31} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{3102}F_{02} + \frac{1}{2}\varepsilon^{3120}F_{20} = F_{02} = g_{0\mu}g_{2\nu}F^{\mu\nu} = -F^{02}.
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.
$$

可以看出，$\tilde{F}^{\mu\nu}$可以通过在$F^{\mu\nu}$中做代换

$$
\mathbf{E} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \to -\mathbf{E}
$$

得到。

可以看出，$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$就是场强$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$。由$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$直接构造相对论不变量显然是麻烦的。但是借助$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$这个构造是显然的。所有可能的由$F^{\mu\nu}$和$\tilde{F}^{\mu\nu}$得到Lorentz标量的收缩方式只有这几种：$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$和$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$。用$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$表示就是

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -2\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right), \\
F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}.
\end{aligned}
$$

有（自旋以外）内部自由度的矢量场

前面考虑的是无（自旋以外）内部自由度的矢量场。无（自旋以外）内部自由度的矢量场$\mathcal{A}^\mu$是一个1×1的矩阵，也就是一个数。但如果考虑（自旋以外）内部自由度，场量$\mathcal{A}^\mu$就是一个方阵。如果场量$\mathcal{A}^\mu$不是一个数而是一个方阵情况就复杂了。下面我们将无内部自由度的结果推广到有内部自由度的情况，方法不太严格。

场，场强

前面我们已经得到这样的结论，在无内部自由度情况下场量$\mathcal{A}^\mu$是一个纯虚数，可以用一个实的场量表示成$\mathcal{A}^\mu \equiv iA^\mu$的形式。当$\mathcal{A}^\mu$是一个方阵的时候，我们很自然地猜想它也可以表示成$\mathcal{A}^\mu \equiv iA^\mu$的形式，其中$A^\mu$应该是一个相当于实数的方阵。我们知道，实数可以看作是一个自复共轭的数，也就是说，实数的复共轭就是它自己；对于一个实方阵来说，在转置共轭下自共轭的矩阵相当于实数，这样的矩阵就是实对称矩阵，实对称矩阵的本征值是实数；对于一个复方阵来说，在转置共轭下自共轭的矩阵相当于实数，这样的矩阵就是厄米矩阵，厄米矩阵的本征值是实数。这样我们可以类比地认为场量仍可以表示为

$$\mathcal{A}^\mu = ig\mathbf{A}^\mu \tag{7.41}$$

的形式，其中$\mathbf{A}^\mu$是一个厄米矩阵，$\mathbf{A}^{\mu\dagger} = \mathbf{A}^\mu$。

同样，张量$\mathcal{F}^{\mu\nu}$也是一个方阵。在无（自旋以外）内部自由度的情况下，它是反对称的。我们很自然的推广这一结论认为在$\mathcal{F}^{\mu\nu}$是一个方阵的情况下也是反对称的。且当$\mathcal{F}^{\mu\nu}$由$n \times n$方阵变成1×1方阵（也就是一个数）时，应当回到（7.28）的形式。在反对称和简单性的要求下一个方阵形式的$\mathcal{F}^{\mu\nu}$普遍地可以写成

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]\,. \tag{7.42}$$

注意，这是能表示成反对称的最简单形式。导数项（$\partial^\mu \mathcal{A}^\nu$）要表示成反对称只用到导数的一次方就可以了，而场量$\mathcal{A}^\mu$项要表示成反对称的形式就要用到$\mathcal{A}^\mu$的二次项了（其中的加减号并不重要，是习惯）。这样我们就得到了一个推广的场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$。可见，内部自由度的影响是非常大的。如果没有（自旋以外）内部自由度，场量$\mathcal{A}^\mu$是一个数，这样就没有$[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]$项了。但是如果有（自旋以外）内部自由度，场量$\mathcal{A}^\mu$就是一个方阵，它们一般地讲不对易，所以最普遍的反对称形式需要加上$[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]$这一项。可这是怎样的一项啊，它在场强中是二次的，这将意味着在拉氏量中它会给出高次项，从而带来非线性。

拉氏量

一个自然的假设是拉氏量还保持原来的形式。仍然是

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\dagger}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right)+\frac{1}{2}m^2tr\left(\mathcal{A}_{\mu}^{\dagger}\mathcal{A}^{\mu}\right). \tag{7.43}$$

但是场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$则是（7.42）给出的形式。注意，由于$\mathcal{A}^{\mu}$和$\mathcal{F}^{\mu\nu}$此时都已经是矩阵，所以复共轭$*$变成了厄米共轭$\dagger$。

但是，事情发生了微妙的变化，由于$\mathcal{F}^{\mu\nu}$中包含$[\mathcal{A}^{\mu},\mathcal{A}^{\nu}]$项，这一项将给出四次方项。这已经超出了我们最初的假设，即假设拉氏量中只包含二次方项。回忆当时我们假设只有二次方项的理由。当时我们说，只有二次方项是因为自然中粒子都属于几类，每一类中的粒子都具有相同的质量。只有二次的拉氏量才能给出等间距的能量激发（对比谐振子情况），才能产生湮灭每个质量都相同的粒子。

那么这里出现了四次方项如何理解呢，它产生的粒子的质量还相同吗。

四次方项给出了相互作用。在拉氏量（7.43）中只有矢量场$\mathcal{A}^{\mu}$，这种作用是自作用。这种自作用是去不掉的。因此，所有这样的粒子都不会是真正自由的自由粒子。它们永远纠缠在自作用中。对于一个始终处在相互作用中的粒子来说谈一个粒子的能量是没有意义的，这就像不能问地球的势能和太阳各自的势能一样。因此，相互作用是一个粒子的质量有些说不清是正常的。

存在自作用意味着这个拉氏量给出的理论是非线性的。这就是说我们要对付一个非线性理论了。

$\mathcal{A}^{\mu}$和$\mathcal{F}^{\mu\nu}$

前面我们仿照无（自旋以外）内部自由度的矢量场的情况给出了有（自旋以外）内部自由度矢量场的场量$\mathcal{A}^{\mu}$的形式。在无（自旋以外）内部自由度的情况中，$\mathcal{A}^{\mu}$是个纯虚数。类比地（认为无（自旋以外）内部自由度是有（自旋以外）内部自由度的特殊情况），我们猜测在有（自旋以外）内部自由度的情况中，$\mathcal{A}^{\mu}$是一个i乘上厄米矩阵的形式。从而有$\mathcal{A}^{\mu}=ig\mathbf{A}^{\mu}$。

这样我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mu\nu}&=\partial^{\mu}\mathcal{A}^{\nu}-\partial^{\nu}\mathcal{A}^{\mu}-[\mathcal{A}^{\mu},\mathcal{A}^{\nu}]\\&=\partial^{\mu}ig\mathbf{A}^{\nu}-\partial^{\nu}ig\mathbf{A}^{\mu}-[ig\mathbf{A}^{\mu},ig\mathbf{A}^{\nu}]\\&=ig\left(\partial^{\mu}\mathbf{A}^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}\right)+g^2\left[\mathbf{A}^{\mu},\mathbf{A}^{\nu}\right]\\&\equiv ig\mathbf{F}^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right].$$

而

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mu\nu\dagger} &= \left(\partial^\mu \mathbf{A}^{\nu\dagger} - \partial^\nu \mathbf{A}^{\mu\dagger}\right) + ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right]^\dagger \\ &= (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) + ig\left[\mathbf{A}^\nu, \mathbf{A}^\mu\right] \\ &= (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right] \\ &= \mathbf{F}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

用$\mathbf{A}^\mu$和$\mathbf{F}^{\mu\nu}$表示拉氏量，有

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}tr\left(\mathcal{F}^\dagger_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2 tr\left(\mathcal{A}^\dagger_\mu \mathcal{A}^\mu\right) \\ &= -\frac{1}{4}tr\left(-ig\mathbf{F}_{\mu\nu} ig\mathbf{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2 tr\left(-ig\mathbf{A}_\mu ig\mathbf{A}^\mu\right) \\ &= -\frac{1}{4}g^2 tr\left(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g^2 m^2 tr\left(\mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu\right)\end{aligned}$$

将$\mathbf{A}_\mu$在一组完备基上展开

$\mathbf{A}_\mu$在这里是一个厄米矩阵，我们不妨选取一组厄米矩阵$\{T^a\}$，$a = 1, 2, \cdots n$，作为基将它展开

$$\mathbf{A}_\mu = A^a_\mu T^a, \quad a = 1, 2, \cdots n. \tag{7.44}$$

作为基的厄米矩阵$\{T^a\}$只需是完备的就可以。注意，我们要展开的是一个厄米矩阵，基也是厄米矩阵。我们假设展开系数A^a_μ是实数（因为这是我们的物理场），对一个$n \times n$厄米矩阵（厄米矩阵当然一般是复矩阵）来说，一共有n^2个独立的实参数。当我们的展开系数是实数时，就需要n^2个基。

这样场强为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mu\nu} &= (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right] \\ &= (\partial^\mu A^{\nu a}T^a - \partial^\nu A^{\mu a}T^a) - ig\left[A^{\mu a}T^a, A^{\nu b}T^b\right] \\ &= (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a})T^a - igA^{\mu a}A^{\nu b}\left[T^a, T^b\right]\end{aligned}$$

为了后面计算简便，我们先不考虑Lorentz指标，将$\mathbf{A}_\mu$和$\mathbf{F}^{\mu\nu}$写成

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\equiv A^a T^a, \\ \mathbf{F} &\equiv G^a T^a - iK^{ab}\left[T^a, T^b\right],\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
A^a &\equiv A^{\mu a}, \\
\mathbf{F} &\equiv \mathbf{F}^{\mu\nu}, \\
G^a &\equiv \left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right), \\
K^{ab} &\equiv g A^{\mu a} A^{\nu b}.
\end{aligned} \tag{7.45}
$$

这样拉氏量为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\mathbf{F}^2\right) + \frac{1}{2} g^2 m^2 tr\left(\mathbf{A}^2\right) \\
&= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\left(G^a T^a - iK^{ab}\left[T^a, T^b\right]\right)\left(G^c T^c - iK^{cd}\left[T^c, T^d\right]\right)\right) + \frac{1}{2} g^2 m^2 tr\left(\left(A^a T^a\right)\left(A^b T^b\right)\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\left(G^a T^a - iK^{ab}\left[T^a, T^b\right]\right)\left(G^c T^c - iK^{cd}\left[T^c, T^d\right]\right) \\
&= G^a G^c T^a T^c - K^{ab} K^{cd}\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right] - i\left(G^a K^{cd} T^a\left[T^c, T^d\right] + G^c K^{ab}\left[T^a, T^b\right] T^c\right) \\
&= G^a G^c T^a T^c - K^{ab} K^{cd}\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right] - iK^{ab} G^c\left(T^c\left[T^a, T^b\right] + \left[T^a, T^b\right] T^c\right)
\end{aligned}
$$

这样

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(\mathbf{F}^2\right) + \frac{1}{2} g^2 m^2 tr\left(\mathbf{A}^2\right) \\
&= -\frac{1}{4} g^2 tr\left(G^a G^c T^a T^c - K^{ab} K^{cd}\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right] - iK^{ab} G^c\left(T^c\left[T^a, T^b\right] + \left[T^a, T^b\right] T^c\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2} g^2 m^2 A^a A^b tr\left(T^a T^b\right) \\
&= -\frac{1}{4} g^2\left(G^a G^c tr\left(T^a T^c\right) - K^{ab} K^{cd} tr\left(\left[T^a, T^b\right]\left[T^c, T^d\right]\right) - iK^{ab} G^c tr\left(T^c\left[T^a, T^b\right] + \left[T^a, T^b\right] T^c\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2} g^2 m^2 A^a A^b tr\left(T^a T^b\right)
\end{aligned}
$$

T^a是厄米的基，即$T^{a\dagger} = T^a$。它们的对易子

$$
\left[T^a, T^b\right]^\dagger = \left(T^a T^b - T^b T^a\right)^\dagger = T^b T^a - T^a T^b = -\left[T^a, T^b\right]
$$

这就是说这个对易子是反厄米的。我们将这个反厄米的矩阵可以用一个厄米矩阵乘上i表示成

$$
\left[T^a, T^b\right] = iQ^{ab}.
$$

这里Q^{ab}是一个厄米矩阵，它与两个基T^a和T^b相联系，我们便给它加上了a和b两个指标来标记。厄米矩阵Q^{ab}当然可以用那些厄米矩阵的基T^a展开

$$Q^{ab} = C^{abc}T^c$$

这里的常数C^{abc}与三个基T^a，T^b和T^c相联系，所以用三个指标来标记。这样我们有

$$\left[T^a, T^b\right] = iC^{abc}T^c. \tag{7.46}$$

可见这是厄米矩阵满足的普遍规律。

分析一下这个结果。由（7.46）我们有

$$\begin{aligned}\left[T^a, T^b\right]^\dagger &= \left(iC^{abc}T^c\right)^\dagger \\ -\left[T^a, T^b\right] &= -iC^{abc*}T^c \\ \left[T^a, T^b\right] &= iC^{abc*}T^c \end{aligned} \tag{7.47}$$

与（7.46）对比我们有

$$C^{abc*} = C^{abc}, \tag{7.48}$$

即C^{abc}是实数。此外，交换指标a和b，我们有

$$\begin{aligned}\left[T^b, T^a\right] &= iC^{bac}T^c \\ -\left[T^a, T^b\right] &= iC^{bac}T^c \\ \left[T^a, T^b\right] &= i\left(-C^{bac}\right)T^c \end{aligned} \tag{7.49}$$

与（7.46）对比我们有

$$C^{abc} = -C^{bac}.$$

这就是说，C^{abc}是一个实数，且前两个指标反对称。

这样我们的拉氏量变成

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}g^2\left(G^aG^c tr\left(T^aT^c\right) + K^{ab}K^{cd}C^{abf}C^{cde}tr\left(T^fT^e\right) + iK^{ab}G^c trC^{abd}\left(T^cT^d + T^dT^c\right)\right) + \frac{1}{2}g^2m^2A^aA^b tr\left(T^a T\right.$$

在拉氏量中我们遇到的都是求迹，即$tr\left(T^aT^c\right)$。这里的T^a是我们选择的基，这个选择是任意的，我们当然可以将它选择成正交的，毕竟正交基是最方便的基。选择一个正交基是完全不失一般性的，我们选

$$tr\left(T^aT^b\right) = \kappa\delta^{ab}.$$

这样有

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}g^2\left(G^aG^c\kappa\delta^{ac} + K^{ab}K^{cd}C^{abf}C^{cde}\kappa\delta^{fe} + iK^{ab}G^cC^{abd}\left(\kappa\delta^{cd}+\kappa\delta^{dc}\right)\right) + \frac{1}{2}g^2m^2A^aA^b\kappa\delta^{ab}\\ &= -\frac{\kappa}{4}g^2\left(G^aG^a + K^{ab}K^{cd}C^{abe}C^{cde} + i2K^{ab}G^dC^{abd}\right) + \frac{\kappa}{2}g^2m^2A^aA^a\end{aligned}$$

将（7.45）代回来有

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{\kappa}{4}g^2\left(\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) + gA_\mu^aA_\nu^bgA^{\mu c}A^{\nu d}C^{abe}C^{cde} + i2gA_\mu^aA_\nu^b\left(\partial^\mu A^{\nu d} - \partial^\nu A^{\mu d}\right)C^{abd}\right)\\ &+\frac{\kappa}{2}g^2m^2A_\mu^aA^{\mu a}\end{aligned}$$

这里的$A_\mu^aA_\nu^b\left(\partial^\mu A^{\nu d} - \partial^\nu A^{\mu d}\right)C^{abd} = 0$，因为$A_\mu^aA_\nu^bC^{abd} = 0$（$C^{abd} = -C^{bad}$，反对称）。于是

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}g^2\left(\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) + g^2A_\mu^aA_\nu^bA^{\mu c}A^{\nu d}C^{abe}C^{cde}\right) + \frac{\kappa}{2}g^2m^2A_\mu^aA^{\mu a}$$

我们可以引入

$$F^{\mu\nu a} = \partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + gC^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}$$

来更紧凑地表示这个拉氏量。我们有

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}^aF^{\mu\nu a} &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc}A_\mu^bA_\nu^c\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + gC^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}\right)\\ &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) + \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\left(gC^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}\right)\\ &+ \left(gC^{abc}A_\mu^bA_\nu^c\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) + \left(gC^{abc}A_\mu^bA_\nu^c\right)\left(gC^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}\right)\\ &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) + g^2A_\mu^bA_\nu^cA^{\mu d}A^{\nu e}C^{abc}C^{ade}\\ &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\left(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}\right) + g^2A_\mu^bA_\nu^cA^{\mu d}A^{\nu e}C^{bca}C^{dea}\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}g^2F_{\mu\nu}^aF^{\mu\nu a} + \frac{\kappa}{2}g^2m^2A_\mu^aA^{\mu a}. \tag{7.50}$$

在没有（自旋以外的）内部自由度的情况下，由于$\mathbf{F}^{\mu\nu} = (\partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu) - ig\left[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu\right]$中第二项$[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu] = 0$，从而$\mathbf{F}^{\mu\nu} = (\partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu)$，使得常数$g$消失了，但是，这个消失是由于没有（自旋以外的）内部自由度的情况过于简单造成的。当考虑有（自旋以外的）内部自由度的情况时，常数g出现了。常数g出现在两个地方，一个是拉氏量整体有一个g^2的因子，再就是在自作用项中有一个相对的因子。对没有（自旋以外）内部自由度的情况，这个整体的g^2是没有的。我们习惯上不要这个整体因子，将拉氏量写成

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}F_{\mu\nu}^aF^{\mu\nu a} + \frac{\kappa}{2}m^2A_\mu^aA^{\mu a}. \tag{7.51}$$

蕴含在场中的代数结构

这个结果告诉我们，当我们选择了厄米性的时候，矢量场内部蕴含了一个代数结构。这个代数结构满足这样的条件

$$\left[T^a, T^b\right] = iC^{abc}T^c. \tag{7.52}$$

C^{abc}是实数，且

$$C^{abc} = -C^{bac}.$$

即C^{abc}的两个指标反对称。

为了方便，不是一般性地我们选择了这样的正交归一化条件

$$tr\left(T^aT^b\right) = \kappa\delta^{ab}.$$

这个结果在告诉我们，当我们选择了厄米性的时候，这种代数结构就已经蕴含在场中了，不需要另外强加给场这种对称性。

（这个结果直接做下去就会得到规范群只能是$SU\left(n\right)$的结论，以前有一些大统一方案引入了$SU\left(n\right)$以外的其它群其实是错的。而且这种代数结构也不只是矢量场的性质，只要要求厄米性，都会有这种结构。矢量场中蕴含的是代数结构，而物质场则是以这种代数为李代数的群的表示。一种代数对应不止一种群，我们要解决的是对应的同一种代数的不同的群所对应的物质场有什么差别）

无质量的矢量场——规范场

前面考虑的是普遍的矢量场的情况，是有质量的矢量场。可以很容易地猜测，如果没有质量（这时（7.51）只剩下了第一项），对称性一般会更大些。我们来分析一下没有质量时的对称性。此时拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}. \tag{7.53}$$

无（自旋以外）内部自由度的无质量矢量场

如果是没有（自旋以外）内部自由度的情况。场量只有一个分量，这时只有一个厄米基$T^a = 1$就可以了。即$\mathbf{A}_\mu = A_\mu\mathbf{1} = A_\mu$。这样拉氏量变为

$$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{7.54}$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

$F^{\mu\nu}$在变换

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

下不变：

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\to \partial^\mu \left(A^\nu + \partial^\nu \Lambda\right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda\right) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

$F^{\mu\nu}$在这个变换下不变自然拉氏量也不变[21]。这个变换是将场量A^μ加上一个全微分。这个变换由于历史的原因被称作规范变换，在这个规范变换下不变的场称为规范场。

有（自旋以外）内部自由度的无质量矢量场（无穷小变换）

前面讨论的是只有一个厄米基$T^a = 1$的情况。这个结果可以直接推广到有多个厄米基$\{T^a\}$的包含（自旋以外）内部自由度的情况。为了完整我们仍从$\mathcal{A}^\mu$和$\mathcal{F}^{\mu\nu}$出发考虑这个问题。此时无质量的拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}^\dagger_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4} tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}\right), \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - \left[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu\right].$$

这个拉氏量也具有类似的对称性，但要复杂些。可以验证拉氏量在变换

$$\mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - \left[\mathcal{A}_\mu, \Lambda\right] \tag{7.55}$$

下是不变的。

[21] 这个规范变换其实是太强了。我们只需要求拉氏量差一个全微分就可以了。但是它竟然要求$F^{\mu\nu}$不变。也许我们可以找一个更大的对称性。

$\mathcal{F}^{\mu\nu}$在这个变换下有[22]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mu\nu} \to \mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu\right) - \left[\mathcal{A}'_\mu, \mathcal{A}'_\nu\right] \\
&= \left(\partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - [\mathcal{A}_\nu, \Lambda]\right) - \partial_\nu \left(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - [\mathcal{A}_\mu, \Lambda]\right)\right) - \left[\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - [\mathcal{A}_\mu, \Lambda], \mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - [\mathcal{A}_\nu, \Lambda]\right]
\end{aligned}
$$

22

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mu\nu} \to \mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu\right) - \left[\mathcal{A}'_\mu, \mathcal{A}'_\nu\right] \\
&= \left(\partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - [\mathcal{A}_\nu, \Lambda]\right) - \partial_\nu \left(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - [\mathcal{A}_\mu, \Lambda]\right)\right) - \left[\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - [\mathcal{A}_\mu, \Lambda], \mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - [\mathcal{A}_\nu, \Lambda]\right] \\
&= \left(\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\nu\right)\right) - \left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\nu \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\mu\right)\right)\right) \\
&\quad - \left[\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu\right] \\
&= \left(\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\mu \left(\mathcal{A}_\nu \Lambda\right) + \partial_\mu \left(\Lambda \mathcal{A}_\nu\right)\right) - \left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\nu \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda\right) + \partial_\nu \left(\Lambda \mathcal{A}_\mu\right)\right)\right) \\
&\quad - \left(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu\right)\left(\mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu\right) + \left(\mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu\right)\left(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu\right) \\
&= \left(\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \Lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu\right) - \left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \partial_\nu \mathcal{A}_\mu\right)\right) \\
&\quad - \left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \Lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu\right) - \left(\mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda\right) \\
&\quad + \left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda\right) - \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu + \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu\right) \\
&\quad + \left(\mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu\right) + \left(\mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda\right) \\
&\quad - \left(\mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda\right) + \left(\mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \Lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda + \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda + \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu - \Lambda \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \\
&- \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \Lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda + \mathcal{A}_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda \\
&+ \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \partial_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu - \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \\
&+ \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda \\
&- \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda - \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda + \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda + \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \partial_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \\
&= \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda \\
&- \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \Lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda + \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu - \Lambda \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda \\
&+ \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\mu \partial_\nu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda - \partial_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu \\
&- \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda + \Lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda + \mathcal{A}_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu - \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu \\
&+ \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \Lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \Lambda - \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \Lambda \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu \Lambda + \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \Lambda + \partial_\nu \Lambda \partial_\mu \Lambda \\
&- \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu\right) \Lambda + \Lambda \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu\right) \\
&+ \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\mu\right) \partial_\nu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \left(\mathcal{A}_\nu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\nu\right) - \left(\mathcal{A}_\nu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\nu\right) \partial_\mu \Lambda - \partial_\nu \Lambda \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda - \Lambda \mathcal{A}_\mu\right) \\
&- \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu\right) \Lambda + \Lambda \left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu\right) \Lambda + \mathcal{A}_\mu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \Lambda \mathcal{A}_\mu - \Lambda \left(\mathcal{A}_\mu \Lambda \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \Lambda \mathcal{A}_\mu\right) \\
&- \Lambda \left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu\right) + \left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu\right) \Lambda
\end{aligned}
$$

这里考虑的是无穷小变换，我们可以略去所有Λ和$\partial_\mu \Lambda$的高阶项，这样有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\right) + \Lambda \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\right) - \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\right) \Lambda \\
&= \mathcal{F}_{\mu\nu} + \Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\mu\nu} \Lambda \\
&= (1 + \Lambda) \mathcal{F}_{\mu\nu} (1 - \Lambda)
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}'_{\mu\nu}(x) &= (1 + \Lambda) \mathcal{F}_{\mu\nu} (1 - \Lambda) \\
&= \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] \qquad (7.56)
\end{aligned}
$$

这里考虑的是无穷小变换，我们可以略去所有Λ和$\partial_\mu\Lambda$的高阶项，这样有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + \Lambda\mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\mu\nu}\Lambda \\ &= (1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{\mu\nu}(x) &= (1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda) \\ &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{7.57}$$

这样拉氏量在这个变换下，略去高阶小量

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\to\mathcal{L}' &= \frac{1}{4}tr\left(\mathcal{F}'_{\mu\nu}\mathcal{F}'^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4}tr\left((1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\,(1+\Lambda)\,\mathcal{F}^{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4}tr\left((1+\Lambda)\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4}tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\,(1-\Lambda)\,(1+\Lambda)\right) \\ &= \frac{1}{4}tr\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

这就是说，有（自旋以外）内部自由度的无质量矢量场具有(7.55)的规范对称性。

需要注意的是，在没有（自旋以外）内部自由度的情况中，场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$本身就是规范不变的，因为此时$[\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0$。但是在有（自旋以外）内部自由度的情况中，场强$\mathcal{F}^{\mu\nu}$在规范变换(7.55)下是变的，变成了(7.57)的形式，但是拉氏量是规范不变的，从而保证了理论是规范不变的。

7.4.4 张量场

张量场同样是Lorentz（实质是Poincaré群）群的表示。普遍地我们可以将张量场表示成

$$T^{\mu\nu\rho\cdots}$$

这个场是Lorentz不变的经典场。但是，它作为一个量子场是不合适的，因为它会给出量纲为能量负幂次的耦合常数，从而导致理论不可重整（关于可重整性的判断后面会有详细讨论）。这一点可以这样简单分析：

考虑一个最简单的张量场$T^{\mu\nu}$。它作为一个无质量的自由场，拉氏量中将包含这样的项：

$$\mathcal{L}\sim\left(\partial_\mu T^{\mu\nu}\right)^2 + b\left(T^{\mu\nu}\right)^2$$

在第二项加上一个常数是因为这里只考虑相对系数。

由第一项可以看出，场量$T^{\mu\nu}$的量纲应为$[T^{\mu\nu}] = [E^1]$，即能量量纲[23]。由第二项可以看出$[b] = [E^2]$，比如说可以选择$b = m^2$。

由后面的分析我们可以看出与张量场的耦合会导致负幂次的耦合常数，得到不可重整的理论。因此张量场不适宜作为一个量子场的候选者，虽然引力场就是由张量场描述的。

[23] $[\mathcal{L}] = [E^4]$
$[\partial_\mu] = [E^1]$

第八章　　经典场III：Noether定理

第九章　经典场IV：相互作用

从牛顿的观点看，前面的对自由场的讨论就是他的第一定律，一个关于自由粒子的定律。这是一切的基础。相互作用就是牛顿的第二定律，它告诉我们一个粒子在力的作用下如何反映，这是物理定律的最核心的部分。

一个具体的相互作用的形式只能由实验确定，从理论上构造相互作用有无数种可能的方式。非常奇怪的是，大自然选择了很特殊的一种相互作用，规范相互作用。我们下面分别讨论规范的和非规范的相互作用方式。

前面我们已经分析过，自由场是二次的。这样高于二次的便都是相互作用。关键是怎样引入它们。

9.1　可重整的要求

构造相互作用的原则除了相对论这样的自然的要求以外一个特别重要的要求就是这个相互作用应该是可重整的。也就是说，相互作用的耦合常数应该是没有量纲的。可重整的要求将去掉大量的相互作用的候选者。当然，可重整是量子的要求，我们这里考虑的是经典的相互作用。经典相互作用没有这个要求，因此候选者就会很多。为此，我们不得不提前引入可重整的要求，以便能使我们将相互作用的选择范围缩小一些。

可重整的要求简单说就是要求耦合常数没有量纲，理由我们以后讨论。

9.2　经典相互作用：非规范耦合

你随便写一种耦合方式一般都是非规范耦合。耦合方式除了几个基本要求外是任意的。我们首先分别考虑几种非规范耦合。

9.2.1 标量-标量耦合

先考虑标量场和标量场耦合。考虑N个标量ϕ_1，ϕ_2，$\cdots$，ϕ_n之间的耦合。普遍地，我们可以将拉氏量写成

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m_1^2\phi_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m_2^2\phi_2^2\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - m_n^2\phi_n^2\right) - V\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\tilde{\phi}M\phi - V\left(\phi\right),\end{aligned}$$

这里我们已经将这几个场写成一个列矢量的形式

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n\end{pmatrix}.$$

由此可以得到动力学方程

$$\left(\partial^2 + M\right)\phi = \frac{\partial V\left(\phi\right)}{\partial\phi},$$

这里

$$\frac{\partial V\left(\phi\right)}{\partial\phi} \equiv \begin{pmatrix}\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_1} \\ \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_n}\end{pmatrix},$$

以及

$$M = \begin{pmatrix}m_1^2 & & & \\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n^2\end{pmatrix}.$$

相互作用的形式当然取决于$V\left(\phi\right) = V\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right)$的形式。我们不妨将$V\left(\phi\right)$级数展开。

$$V\left(\phi\right) = V\left(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\right) = a_i\phi_i + b_{ij}\phi_i\phi_j + c_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + d_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l + \cdots,$$

注意这里的重复指标求和。这样

$$\frac{\partial V\left(\phi\right)}{\partial\phi_s} = a_s + b_{is}\phi_i + c_{ijs}\phi_i\phi_j + d_{ijks}\phi_i\phi_j\phi_k + \cdots$$

这里的零次项和二次项是不本质的，零次项可以直接扔掉，一次项总可以通过重新定义ϕ_i将整个方程变得只有二次项。

可重整的要求

像以前一样，为了将可能的相互作用形式减少一些，我们借助一下还没有讲到的可重整的要求。可重整的要求简单地讲要求耦合常数没有量纲或有能量正幂次量纲。耦合常数没有量纲的理论是可重整的，耦合常数有能量正幂次量纲的理论是超可重整的[1]。我们选择的理论必须是可重整或超可重整，所以它们的耦合常数不能有小于零的幂次。

简单起见，我们考虑一个d维空间中的ϕ^n理论。它的拉氏量形如（由于只考虑量纲，我们并不给出精确的形式，且不写出对分析没什么影响的质量项）

$$\mathcal{L} \sim (\partial^\mu \phi)^2 + \lambda \phi^n.$$

拉氏密度的量纲是

$$[\mathcal{L}] = E^d.$$

我们有

$$[\mathcal{L}] = \left[(\partial^\mu \phi)^2\right] = E^d,$$

从而

$$[\partial^\mu \phi] = E^{d/2}.$$

因为$[\partial^\mu] = E^1$，所以

$$[\phi] = E^{d/2-1}.$$

因为$[\lambda \phi^n] = E^d$，所以

$$[\lambda] = E^{n\left(1-\frac{d}{2}\right)+d}$$

可重整要求$[\lambda] \geq E^0$，于是对$d \geq 2$有

$$n \leq \frac{d}{\frac{d}{2}-1}.$$

这个结果告诉我们在四维时空中，即$d=4$，可重整要求$n \leq 4$。我们还可以看到，对$d=2$，n取任何值理论都可重整[2]。

[1] 可重整理论中有无穷多个发散的图，但是发散可以通过重整化的方法去掉。超可重整理论中有限多个发散的图，当然也没有问题。不可重整的理论中的无穷大是不能通过重整化方式去掉的。

[2]
$$n \leq \frac{d}{\frac{d}{2}-1}.$$

这里我们暂时先只考虑四维情况。这样我们的标量场耦合就不能超过ϕ^4。鉴于此，我们在这里先只考虑小于四次方的耦合，

$$V(\phi) = V(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) = c_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + d_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l.$$

这样拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\tilde{\phi}M\phi - c_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k - d_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l, \tag{9.1}$$

运动方程为

$$\left(\partial^2 + m_s^2\right)\phi_s = c_{ijs}\phi_i\phi_j + d_{ijks}\phi_i\phi_j\phi_k. \tag{9.2}$$

9.2.2 自作用：标量场

前面讨论的是几个标量场ϕ_1，ϕ_2，$\cdots$，ϕ_n之间的相互作用，这里我们考虑只有一种场ϕ的情况。由于只有一种场，因此这里的作用是自作用。

只有一种场的时候，拉氏量（9.1）变为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda_3}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda_4}{4!}\phi^4, \tag{9.3}$$

运动方程（9.2）变为

$$\left(\partial^2 + m_s^2\right)\phi_s = \frac{\lambda_3}{2!}\phi_j^2 + \frac{\lambda_4}{3!}\phi^3. \tag{9.4}$$

这里我们加入了一个$\frac{1}{n!}$的因子是为了形式上好看一些，对比拉氏量和运动方程就知道了。

出于在四维空间中的可重整的考虑，这里写出的是ϕ^4和ϕ^3。普遍地，当然也可以写出ϕ^n：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{n!}\phi^n, \tag{9.5}$$

只不过n不同的ϕ^n理论在不同维数的空间中可重整罢了。比如，ϕ^3在六维空间中是可重整的（它在四维空间中是超可重整的）；ϕ^6在三维空间中是可重整的。

9.2.3 自作用：旋量场

最简单的旋量场的自作用，也就是一种旋量-旋量耦合显然是

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi.$$

$$d = 5\text{则}n \leq \frac{5}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{10}{3}$$

这意味着在五维空间中没有可重整的标量耦合的理论。

且可重整的理论只存在于足够低的维数空间中。

这可能还意味着，量子的可重整要求对空间维数有一个最大维数要求。

只有四个旋量在一起才能保证拉氏量是一个数。但是很容易验证，由于$[\psi] = \left[E^{3/2}\right]$，使得$[g] = E^{-2}$。耦合常数量纲小于零，这个理论是不可重整的。

9.2.4 自作用：矢量场

矢量场的自作用最简单的情况就是

$$\mathcal{L}_I = g\left(A_\mu A^\mu\right)\left(A_\mu A^\mu\right).$$

两个A_μ不是相互作用，只有四个旋量在一起才能保证拉氏量是一个Lorentz标量。由于$[A^\mu] = E^1$，所以$[g] = E^0$，这个理论是可重整的。

这样的自作用是真实的，它将出现在非Abel的规范场里。

9.2.5 自作用：张量场

场量$T^{\mu\nu}$的量纲应为$[T^{\mu\nu}] = [E^1]$，自作用会出现类似

$$\mathcal{L}_I = g\left(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right)^2$$

的相互作用，这里耦合常数的量纲$[g] = E^0$，可重整。

9.2.6 旋量-标量耦合

一个旋量场ψ与一个标量场ϕ耦合，其相互作用部分的拉氏量如果加上简单性的要求可以写成

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\phi.$$

这里我们被迫同时引入了$\bar{\psi}$和ψ，因为拉氏量必须是一个数，而ψ是一个列矩阵。我们必须检验这个理论是不是可重整，也就是看看耦合常数的量纲。

前面我们已经知道$[\psi] = \left[E^{3/2}\right]$和$[\phi] = E^1$。可见$[g] = E^0$，没有量纲，这是一个可重整的理论。

如果我们不要求系统保持宇称，那么

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$$

也是一个选择。这时$\mathcal{L}_I$不是一个标量，而是一个赝标量。旋量-矢量耦合

9.2.7 旋量-矢量耦合

一个旋量场ψ与一个矢量场A^μ耦合，最简单的方式就是

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu.$$

我们来看看这种方式是不是可重整的。

我们有$[A^\mu] = E^1$，这样有$[g] = E^0$，没有量纲，它可重整。显然其它简单的方式会给出不可重整的结果。

如果不在乎宇称，那么也可以有

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi A^\mu,$$

这种耦合方式。

这种旋量-矢量耦合的一个特别重要的特殊情况就是后面要讨论的规范耦合。但是，显然，在这里矢量场A^μ没有必要是一个规范场，它就是一个矢量场而已，比如它可以有质量，等等。

9.2.8 旋量-张量耦合

一个旋量场ψ与一个张量场$T^{\mu\nu}$耦合。可能的相互作用形式是

$$g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial^\nu T_{\mu\nu}, \tag{9.6}$$

$$g\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi T_{\mu\nu} \tag{9.7}$$

或

$$g\bar{\psi}\psi T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{9.8}$$

其中g是耦合常数。张量场$T^{\mu\nu}$的量纲为$[T^{\mu\nu}] = [E^1]$，旋量场的量纲为$[\psi] = \left[E^{3/2}\right]$。这样我们有

（9.6）要求$[g] = [E^{-1}]$，不可重整。

（9.7）要求$[g] = [E^0]$，可重整。

（9.8）要求$[g] = [E^{-1}]$，不可重整。

但是这里的（9.7）等于零，因为我们$\sigma^{\mu\nu}$是反对称的，而$T_{\mu\nu}$是对称的，至少对引力是如此。

9.2.9 标量-矢量耦合

按照简单性原则，我们可以将这个拉氏量写成

$$\mathcal{L}_I = g\phi A_\mu A^\mu.$$

这样$[g] = E^1$，这是一个超可重整理论。这启发我们构造一个可重整的理论，

$$\mathcal{L}_I = g\phi^2 A_\mu A^\mu,$$

这里$[g] = E^0$。

如果考虑导数耦合，我们也可以有

$$\mathcal{L}_I = g\phi \partial_\mu A^\mu,$$

仍然$[g] = E^1$，超可重整。此外，

$$\mathcal{L}_I = g\phi^2 \partial_\mu A^\mu,$$

$[g] = E^0$，可重整。

9.3 经典相互作用：规范耦合

前面讨论的是一个普遍的场之间的相互作用的原则，给出的是相互作用的可能的形式。显然大自然中的相互作用不会有那么多，但又肯定包含在前面这些种普遍的形式中。最让人不可思议的是，大自然中的为数不多的几种相互作用都依循着一个特别简单的原则，就是对称性的原则。为什么会是这样，我们是不清楚的。

9.3.1 全局的和定域的规范变换

我们先普遍地考虑一个有（自旋以外）内部自由度的场，它可以是标量场也可以是矢量场。按照前面的分析，一个有（自旋以外）内部自由度的场可以将它的分量写在一个列矩阵中：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

这里的ψ表示一个标量场或是一个旋量场。有（自旋以外）内部自由度的ψ是一个复线性空间中的矢量。前面我们已经发现，在各分量的质量相同的情况下，自由的标量场和旋量场的拉氏量（从而运动方程）当ψ在复空间旋转时是不变的（原因是拉氏量是二次型）。也就是说，ψ在

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

下是不变的。U在这里代表一个复空间中的旋转（如前面讨论的，一个复空间中的旋转可以由一个$U(n)$群描述；或者说，复空间中的保内积的旋转构成一个$U(n)$群）。这样一个各分量的质量相同或没有质量的旋量场所具有的对称性就是ψ在变换

$$\psi(x) \to U\psi(x) \tag{9.10}$$

下不变。

这个对称性意味着ψ的各个分量的选择是任意的（用自旋做个比方就是规定那个方向向上都是一样的；用同位旋做个比方就是把哪个分量当质子或中子都行）。注意，ψ的不同分量是自旋以外的内部自由度。这个对称性是无质量场本身就具有的。

式（9.10）对空间中每一点x上的$\psi(x)$都施以同一个变换$U\psi(x)$，也就是都做同样一个旋转。不过，这个变换是任意选取的。

想象这样一种情况。还是这一个有内部自由度的旋量场（9.9）。空间中的每一个点上都有一个观测者，每个观测者都可以任意地选择一个自己喜欢的旋转。我们将空间x点上的观测者选取的参数表示为$U(x)$。每个观测者选取的旋转一般地讲当然不会相同（不过我们不妨要求两个相邻点的选择是连续的光滑的，这个假设是合理的，这使我们可以用微积分），比如转过不同的角度。如果我们要求在空间中的每个观测者看来这个对称性都得以保持；也就是说，虽然每个不同点上的观测者都会选择自己的旋转$U(x)$，x不同$U(x)$也不同，而他们都觉得这个世界像是为他们自己设计的，因为不管他们怎样选择这个旋转，这个对称性都会保持。当然，这其实是提出了更高的要求，要求这个场一人来称万人心。也就是要求场在变换

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x) \tag{9.11}$$

下不变。我们称（9.10）为全局规范变换，因为它对全空间各点都是一样的；而称（9.11）为定域规范变换，因为这个变换是逐点的。规范变换这个名字完全是历史原因，来自Weyl，并不准确。

9.3.2 协变导数

所谓一个物理系统在一个变换下不变，本质上是所观测到的物理现象不变，物理现象和运动方程的解是一一对应的，运动方程和拉氏量在拉氏量差一个全微分项的时候是对应的。因此，所谓系统在某个变换下不变可以认为是运动方程后拉氏量在这个变换下不变。一个系统的拉氏量中包含ψ和它的导数$\partial^\mu\psi$。一个有质量的自由场包含两项，导数项和质量项。我们说这个场具有某个对称性的时候实际上是在说这两项分别具有这种对称性[3]。由前面的分析很容易看出，保持这种对称性要求$\partial^\mu\psi$和ψ必须以同一个方式变换，这样才能抵消这种变化。也就是说在ψ按照（9.10）的方式变换的时候，即$\psi(x)\to U(x)\psi(x)$。$\partial^\mu\psi$也必须按照同样的方式变换，即

$$\partial^\mu\psi(x)\to U(x)\left[\partial^\mu\psi(x)\right].$$

对$U(x)=const$，即变换在全空间是一个常数的情况，这一点很容易做到，因为$\partial^\mu\psi\to\partial^\mu(U\psi)=U(\partial^\mu\psi)$。事实上，前面分析有内部自由度的场的对称性的时候我们就是这样做的。但是，当$U(x)$在空间的不同点上取值不同的时候，做到这一点就复杂了。此时

$$\partial^\mu\psi(x)\to\partial^\mu\left[U(x)\psi(x)\right]\neq U(x)\left[\partial^\mu\psi(x)\right].$$

也就是说，$\partial^\mu\psi(x)$的变换规律与$\psi(x)$并不相同。此时

$$\partial^\mu\psi(x)\to\partial^\mu\left[U(x)\psi(x)\right]=U(x)\left[\partial^\mu\psi(x)\right]+\left[\partial^\mu U(x)\right]\psi(x), \tag{9.12}$$

多出了$\left[\partial^\mu U(x)\right]\psi(x)$这一项。

导致$\partial^\mu\psi$和ψ按照不同方式变换的原因显然是变换$U(x)$是逐点变化的，使得对$U(x)$的求导$\partial^\mu U(x)\neq 0$造成的（观察（9.12）的第二项）。那么如何使对ψ的导数和ψ按照相同方式变换呢。我们来观察一下。在这个问题中只有三个东西：$\psi(x)$，$U(x)$和∂^μ。$\psi(x)$是我们要处理的对象，不能动；$U(x)$是任给的，不能动。只剩下看上去更不能动导数∂^μ。那么我们能否通过改变导数的定义使ψ的导数和ψ按照相同方式变换呢，我们来试一下。

$\partial^\mu\psi$和ψ按照不同方式变换的原因是因为求导运算会作用在变换$U(x)$上。要想抵消（9.12）中$\left[\partial^\mu U(x)\right]\psi(x)$这一项的影响，我们需要在导数算子中引入不求导的项。普遍地我们可以这样引入新的导数算子

$$D_\mu\equiv\partial_\mu-\mathcal{A}_\mu(x), \tag{9.13}$$

[3]这个要求可能太强了，氢原子的两项加在一起给出了更高的动力学对称性。

这里我们在导数项中引入了不求导的项$\mathcal{A}_\mu(x)$。现在我们寄希望于$D_\mu\phi(x)$与$\phi(x)$按照相同的方式变换。也就是说我们要求在变换$U(x)$下有

$$\psi(x)\to\psi'(x)=U(x)\psi(x)$$

并且

$$D_\mu\psi(x)\to[D_\mu\psi(x)]'=U(x)[D_\mu\psi(x)]. \tag{9.14}$$

我们来看看要做到这点需要对所添加的$\mathcal{A}_\mu(x)$项有什么要求。需要注意的是，当导数是∂_μ的时候，在变换后还是∂_μ。但由于D_μ中包含$\mathcal{A}_\mu(x)$，变换后$\mathcal{A}_\mu(x)$也会变化，所以新的导数算子D_μ在变换后也会变，即

$$D_\mu\to D'_\mu=\partial_\mu-\mathcal{A}'_\mu(x).$$

我们来直接计算$D_\mu\psi(x)$变换后的结果

$$\begin{aligned}
D_\mu\psi(x)\to{}&[D_\mu\psi(x)]'\\
&=D'_\mu\psi'(x)\\
&=\left[\partial_\mu-\mathcal{A}'_\mu(x)\right][U(x)\psi(x)]\\
&=\partial_\mu[U(x)\psi(x)]-\mathcal{A}'_\mu(x)[U(x)\psi(x)]\\
&=\partial_\mu U(x)\psi(x)+U(x)\partial_\mu\psi(x)-\mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x)\\
&=U(x)\partial_\mu\psi(x)-U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x)+U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x)+\partial_\mu U(x)\psi(x)-\mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x)\\
&=U(x)D_\mu\psi(x)+U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x)+\partial_\mu U(x)\psi(x)-\mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x)
\end{aligned}$$

按照（9.14）中的要求，必须有$D_\mu\psi(x)\to U(x)[D_\mu\psi(x)]$，所以必须要求

$$U(x)\mathcal{A}_\mu(x)\psi(x)+\partial_\mu U(x)\psi(x)-\mathcal{A}'_\mu(x)U(x)\psi(x)=0.$$

这样我们有

$$U(x)\mathcal{A}_\mu(x)+\partial_\mu U(x)-\mathcal{A}'_\mu(x)U(x)=0,$$

于是有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_\mu(x)U(x)&=U(x)\mathcal{A}_\mu(x)+\partial_\mu U(x)\\
\mathcal{A}'_\mu(x)&=U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x)+[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x).
\end{aligned}$$

也就是说，如果我们要求$D_\mu\psi(x)$与$\psi(x)$按相同的方式变换，就必须要求新引入的导数算子中的$\mathcal{A}_\mu(x)$按

$$\mathcal{A}_\mu(x)\to\mathcal{A}'_\mu(x)=U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x)+[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x)$$

的方式变。

我们来看看新的导数算子如何变换。$D_\mu\psi(x)$与$\psi(x)$按相同的方式变换，由（9.14）我们有

$$D_\mu\psi(x) \to [D_\mu\psi(x)]' = D'_\mu\psi'(x) = U(x)[D_\mu\psi(x)] = U(x)D_\mu U^{-1}(x)U(x)\psi(x)$$

对比有（注意到$\psi'(x) = U(x)\psi(x)$）

$$D_\mu \to D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x).$$

可见D_μ在$U(x)$变换下是一个张量。

D_μ被我们称做协变导数。D_μ有着很深的几何背景。一个平直的空间中的导数算子就是∂_μ。但是当空间是弯曲的时候，显然∂_μ变不再合适了。这时就可以引入协变导数$D_\mu = \partial_\mu - -_\mu(x)$，这里的$-_\mu(x)$就是用来修正空间弯曲带来的影响的，称为联络。空间弯曲的全部信息都包含在联络$-_\mu(x)$中，所以联络是一个核心重要的量。（9.13）中的$\mathcal{A}_\mu(x)$显然就是联络。这说明与定域规范变换有关的这些东西有着深刻的数学背景。

从更加物理的角度说，这个场的引入完全是为了平衡元由定域规范变换带来的变化。换句话说，$\mathcal{A}_\mu(x)$是定域规范不变要求的产物，是一个由定域规范不变引入的场。我们称它为规范场。

9.3.3 场强

为了使ψ的导数与ψ按照相同方式变换，我们引入了协变导数D_μ。在讨论普遍的矢量场的时候我们引入了一个反对称张量，并指出反对称是一个非常深刻的性质。由协变导数D_μ我们也可以直接构造一个具有反对称性质的量，

$$[D_\mu, D_\nu].$$

很容易证明它在$U(x)$变换下是一个张量[4]。

---

[4]

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &\to [D'_\mu, D'_\nu] \\
&= \{D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu\} \\
&= \Omega(x)D_\mu\Omega^{-1}(x)\Omega(x)D_\nu\Omega^{-1}(x) - \Omega(x)D_\nu\Omega^{-1}(x)\Omega(x)D_\mu\Omega^{-1}(x) \\
&= \Omega(x)[D_\mu, D_\nu]\Omega^{-1}(x)
\end{aligned}$$

可以直接计算出$[D_\mu, D_\nu]$的具体形式，这是个微分算子，我们将它作用在$\psi(x)$上

$$
\begin{aligned}
&[D_\mu, D_\nu]\,\phi(x) = \\
&\quad = [\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x), \partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x)]\,\phi(x) \\
&\quad = (\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x))(\partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x))\,\phi(x) - (\partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x))(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x))\,\phi(x) \\
&\quad = [\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x)]\,[\partial_\nu\phi(x) - \mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x)] - [\partial_\nu - \mathcal{A}_\nu(x)]\,[\partial_\mu\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x)] \\
&\quad = -\left\{\begin{array}{c} -\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) + \partial_\mu(\mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x)) + \mathcal{A}_\mu(x)\,\partial_\nu\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\,\mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x) \\ +\partial_\nu\partial_\mu\phi(x) - \partial_\nu(\mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x)) - \mathcal{A}_\nu(x)\,\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\,\mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x) \end{array}\right\} \\
&\quad = -\left\{\begin{array}{c} -\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) + \partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\,\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{A}_\mu(x)\,\partial_\nu\phi(x) \\ -\mathcal{A}_\mu(x)\,\mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x) + \partial_\nu\partial_\mu\phi(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\,\partial_\nu\phi(x) \\ -\mathcal{A}_\nu(x)\,\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\,\mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x) \end{array}\right\} \\
&\quad = -\{\partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x) - \mathcal{A}_\mu(x)\,\mathcal{A}_\nu(x)\,\phi(x) + \mathcal{A}_\nu(x)\,\mathcal{A}_\mu(x)\,\phi(x)\} \\
&\quad = -\{\partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x) - [\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)]\}\,\phi(x)\,.
\end{aligned}
$$

由这个结果可以直接看出

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -[D_\mu, D_\nu]\,,$$

，这就是我们在普遍地讨论矢量场的时候引入的场强。

我们这里引入$\mathcal{A}_\mu(x)$是为了保持ψ的导数与ψ按照相同方式变换而引入了协变导数D_μ。在D_μ中包含了一个时空位置的函数就是$\mathcal{A}_\mu(x)$。从几何的角度讲，引入协变导数的原因是空间不是平直的，联络$\mathcal{A}_\mu(x)$反映了空间弯曲的情况。从物理的角度看，$\mathcal{A}_\mu(x)$显然可以被理解成一个相对论的矢量场，它一定是前面我们讨论的普遍的矢量场的一种特殊情况。这就是说，一个规范相互作用完全可以有一个几何上的原因。如果我们用协变导数D_μ代替普通导数∂_μ，那么一个弯曲空间在我们看来就是平直的了。这本质上就是爱因斯坦的广义协变的思想。即认为物理定律在一切参照系中都相同。在用协变导数D_μ代替普通导数∂_μ后，在弯曲空间中的物理定律的形式与平直空间中的形式是一样的。因此，我们可以认为场$\mathcal{A}_\mu(x)$或场强$\mathcal{F}_{\mu\nu}$实质上体现的是弯曲空间的几何性质。参与相互作用的粒子都是弯曲空间中的自由粒子。

需要注意的是，在广义相对论中，弯曲的是四维时空。在我们现在考虑的问题中，弯曲的是一个内禀空间，它与$\psi(x)$的相位相联系。

9.3.4 规范群

前面提到一个各分量质量相同或零质量的有（自旋以外）内部自由度的场在复空间旋

转下是不变的。而当我们要求在空间中每个点这一对称性都保持的时候，我们将得到一个被称为规范场的矢量相互作用。这样一个复空间中的旋转将构成一个群。选定一个群，就确定了一个规范场，这个群被称为规范群。

稍微仔细一些地来看一下这件事。

一个复空间中的旋转U可以表示成

$$U(\Theta) = e^{i\Theta},$$

的形式[5]。旋转的方式由Θ决定。普遍地，一个复空间中的旋转可以由一个$U(n)$群描述（或者说，复空间中的保内积的旋转构成一个$U(n)$群），所以$U(\Theta)$是一个$U(n)$群的群元。普遍地，一个$U(n)$群的群元可以用生成元表示成

$$U(\Theta) = e^{i\alpha^a T^a},$$

的形式。这里$\Theta = \alpha^a T^a$中T^a是所选定的$U(n)$群的生成元，α^a是转动的参数。这样一个没有质量的旋量场所具有的对称性就是ψ在变换

$$\psi(x) \to e^{i\Theta}\psi(x) = e^{i\alpha^a T^a}\psi(x) \tag{9.15}$$

下不变。

当我们采用（9.15）的形式描述这个变换的时候，变换$U(\Theta)$由一组参数$\{\alpha^a\}$，每一组这样的参数都给出一个变换。参数$\{\alpha^a\}$一旦给定，对空间中每一点x上的$\psi(x)$都施以同一个变换$e^{i\alpha^a T^a}$，也就是都做同样一个旋转。不过，这个变换是任意选取的，也就是说参数$\{\alpha^a\}$是可以随便取的。这就是全局规范变换。

而如果空间中的每一个点上都有一个观测者，每个观测者都选择不同的参数$\{\alpha^a(x)\}$，则变换为

$$\psi(x) \to \psi(x)\, e^{i\Theta(x)} = \psi(x)\, e^{i\alpha^a(x) T^a}.$$

[5]二维实空间旋转可以写成矩阵$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。考虑无穷小旋转，在单位元$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$附近展开：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} &\simeq \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\epsilon\end{aligned}$$

不过形式上我们更愿意将这个展开写成

$$\begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\epsilon = \mathbf{1} - i\sigma_2\epsilon \sim e^{-i\sigma_2\epsilon},$$

σ_2是Pauli矩阵。引入i是因为我们有这样的结论：一个幺正算符总可以写成$U = e^{iH}$的形式，其中H是一个厄米算符。

这便是定域规范不变。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}'_\mu(x) &= U(x)\,\mathcal{A}_\mu(x)\,U^{-1}(x) + [\partial_\mu U(x)]\,U^{-1}(x) \\
&= e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_\mu(x)\,e^{-i\Theta(x)} + \left[\partial_\mu e^{i\Theta(x)}\right] e^{-i\Theta(x)} \\
&= e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_\mu(x)\,e^{-i\Theta(x)} + i\partial_\mu\Theta(x)\,e^{i\Theta(x)}e^{-i\Theta(x)} \\
&= e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_\mu(x)\,e^{-i\Theta(x)} + i\partial_\mu\Theta(x)\,.
\end{aligned}
$$

可以看出，在规范变换下，$\mathcal{A}(x)$所作的变换可以分成两部分：一部分是作一个旋转，即$\mathcal{A}_\mu(x) \to e^{i\Theta(x)}\mathcal{A}_\mu(x)\,e^{-i\Theta(x)}$；另一部分是作一个平移$\mathcal{A}_\mu(x) \to i\partial_\mu\Theta(x)$。在没有（自旋以外）的内部自由度的情况下，我们有$\mathcal{A}_\mu(x) \to \mathcal{A}_\mu(x) + i\partial_\mu\Theta(x)$，即只有平移的情况。

9.3.5 场方程

我们可以直接由规范场的拉氏量得到场方程，之所以推迟到现在才做这件事是因为我们希望采用协变微分这种更自然的形式来表达。

我们由（7.50），$\mathcal{L} = -\frac{\kappa}{4}g^2F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$，给出的拉氏量出发做这件事，当然要去掉（7.50）中的质量项。

直接计算我们有[6]

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}}=-\frac{\kappa}{2}g^3C^{adc}A^{\nu c}F^a_{\rho\nu}-\frac{\kappa}{2}g^3C^{abd}A^{\mu b}F^a_{\mu\rho}.$$

---

[6]

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial A^{\rho d}}&=\frac{\partial}{\partial A^{\rho d}}\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}+gC^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}\right)\\&=gC^{abc}A^{\nu c}\delta^\mu_\rho\delta^{bd}+gC^{abc}A^{\mu b}\delta^\nu_\rho\delta^{cd}\\&=gC^{adc}A^{\nu c}g^\mu_\rho+gC^{abd}A^{\mu b}g^\nu_\rho\\&=gC^{adc}A^{\nu c}g^\mu_\rho+gC^{abd}A^{\mu b}g^\nu_\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial A^{\rho d}}&=g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}\frac{\partial F^{\lambda\tau a}}{\partial A^{\rho d}}\\&=g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}\left(gC^{adc}A^{\tau c}g^\lambda_\rho+gC^{abd}A^{\lambda b}g^\tau_\rho\right)\\&=gC^{adc}A^c_\nu g_{\mu\rho}+gC^{abd}A^b_\mu g_{\nu\rho}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial_\sigma A^{\rho d}}&=\frac{\partial}{\partial_\sigma A^{\rho d}}\left(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a}+gC^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial_\sigma A^{\rho d}}\left(g^{\mu\lambda}\partial_\lambda A^{\nu a}-g^{\nu\lambda}\partial_\lambda A^{\mu a}\right)\\&=g^{\mu\lambda}\delta^\sigma_\lambda\delta^\nu_\rho\delta^{ad}-g^{\nu\lambda}\delta^\sigma_\lambda\delta^\mu_\rho\delta^{ad}\\&=g^{\mu\lambda}g^\sigma_\lambda g^\nu_\rho\delta^{ad}-g^{\nu\lambda}g^\sigma_\lambda g^\mu_\rho\delta^{ad}\\&=g^{\mu\sigma}g^\nu_\rho\delta^{ad}-g^{\nu\sigma}g^\mu_\rho\delta^{ad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial_\sigma A^{\rho d}}&=g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}\frac{\partial F^{\lambda\tau a}}{\partial_\sigma A^{\rho d}}\\&=g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}\left(g^{\lambda\sigma}g^\tau_\rho\delta^{ad}-g^{\tau\sigma}g^\lambda_\rho\delta^{ad}\right)\\&=g^\sigma_\mu g_{\nu\rho}\delta^{ad}-g_{\mu\rho}g^\sigma_\nu\delta^{ad}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A^{\mu a}}{\partial A^{\rho d}}=\delta^\mu_\rho\delta^{ad}=g^\mu_\rho\delta^{ad}$$

$$\frac{\partial A^a_\mu}{\partial A^{\rho d}}=g_{\mu\lambda}\frac{\partial A^{\lambda a}}{\partial A^{\rho d}}=g_{\mu\lambda}g^\lambda_\rho\delta^{ad}=g_{\mu\rho}\delta^{ad}$$

$$\frac{\partial A^{\mu a}}{\partial_\sigma A^{\rho d}}=\frac{\partial A^a_\mu}{\partial_\sigma A^{\rho d}}=0$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}}&=\frac{\partial}{\partial A^{\rho d}}\left(-\frac{\kappa}{4}g^2F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\right)\\&=-\frac{\kappa}{4}g^2\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial A^{\rho d}}F^{\mu\nu a}-\frac{\kappa}{4}g^2F^a_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial A^{\rho d}}\\&=-\frac{\kappa}{4}g^2\left(gC^{adc}A^c_\nu g_{\mu\rho}+gC^{abd}A^b_\mu g_{\nu\rho}\right)F^{\mu\nu a}-\frac{\kappa}{4}g^2F^a_{\mu\nu}\left(gC^{adc}A^{\nu c}g^\mu_\rho+gC^{abd}A^{\mu b}g^\nu_\rho\right)\\&=-\frac{\kappa}{4}g^3C^{adc}A^c_\nu F_\rho{}^{\nu a}-\frac{\kappa}{4}g^3C^{abd}A^b_\mu F^{\mu a}_\rho-\frac{\kappa}{4}g^3F^a_{\rho\nu}C^{adc}A^{\nu c}-\frac{\kappa}{4}g^3F^a_{\mu\rho}C^{abd}A^{\mu b}\\&=-\frac{\kappa}{2}g^3C^{adc}A^{\nu c}F^a_{\rho\nu}-\frac{\kappa}{2}g^3C^{abd}A^{\mu b}F^a_{\mu\rho}\end{aligned}$$

场强$F^{\mu\nu}$是反对称性的，如果我们考虑的是半单李代数的情况，那么结构常数C^{adc}也可以是全反对称性（前面我们讨论过，由厄米性的要求自动蕴含在场中的代数结构其结构常数C^{abc}只需前两个指标反对称，用不着三个指标都反对称。但是如果我们考虑的是半单李代数这种特殊情况，那么结构常数的三个指标就都是反对称的。我们将采用这个假设，但是也要注意，这告诉我们，下面的结果不是完全普适的，只对半单李代数的情况成立），这样有[7]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} = \kappa g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu}.$$

进一步地[8]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} = \kappa g^2 F_\rho^{\ \sigma d}.$$

[7]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} &= -\frac{\kappa}{2} g^3 C^{adc} A^{\nu c} F^a_{\rho\nu} + \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} \\ &= \frac{\kappa}{2} g^3 C^{acd} A^{\mu c} F^a_{\rho\mu} + \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} \\ &= \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} + \frac{\kappa}{2} g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu} \\ &= \kappa g^3 C^{abd} A^{\mu b} F^a_{\rho\mu}\end{aligned}$$

[8]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)}\left(-\frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}\right) \\ &= -\frac{\kappa}{4} g^2 \frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu a}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} \\ &= -\frac{\kappa}{4} g^2 \left(g^\sigma_\mu g_{\nu\rho} \delta^{ad} - g_{\mu\rho} g^\sigma_\nu \delta^{ad}\right) F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} \left(g^{\mu\sigma} g^\nu_\rho \delta^{ad} - g^{\nu\sigma} g^\mu_\rho \delta^{ad}\right) \\ &= -\frac{\kappa}{4} g^2 g^\sigma_\mu g_{\nu\rho} \delta^{ad} F^{\mu\nu a} + \frac{\kappa}{4} g^2 g_{\mu\rho} g^\sigma_\nu \delta^{ad} F^{\mu\nu a} - \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} g^\nu_\rho \delta^{ad} + \frac{\kappa}{4} g^2 F^a_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} g^\mu_\rho \delta^{ad} \\ &= -\frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\ \sigma d} + \frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\ \sigma d} - \frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\ \sigma d} + \frac{\kappa}{4} g^2 F_\rho^{\ \sigma d} \\ &= \frac{\kappa}{2} g^2 F_\rho^{\ \sigma d} - \frac{\kappa}{2} g^2 F_\rho^{\ \sigma d} \\ &= \kappa g^2 F_\rho^{\ \sigma d}\end{aligned}$$

其中最后一步利用了$F^{\mu\nu}$的反对称性。

这样，运动方程为[9]

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} \\
\partial_\mu F^{\mu\nu a} + g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} &= 0.
\end{aligned}$$

两边同乘T^a并求和[10]

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu a} T^a + g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^a &= 0 \\
\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - ig A_\mu^b F^{\mu\nu c}\left[T^b, T^c\right] &= 0 \\
\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - ig\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}^{\mu\nu}\right] &= 0,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu a} T^a, \\
\mathbf{A}_\mu &= A_\mu^a T^a.
\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\sigma A^{\rho d}\right)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\rho d}} \\
\partial_\sigma \kappa g^2 F_\rho^{\ \sigma d} &= \kappa g^3 C^{abd} A^{\mu b} F_{\rho\mu}^a \\
\partial_\sigma F_\rho^{\ \sigma d} &= g C^{abd} A^{\mu b} F_{\rho\mu}^a \\
\partial_\sigma F_\nu^{\ \sigma d} &= g C^{abd} A^{\mu b} F_{\nu\mu}^a \\
\partial_\sigma F^{\nu\sigma d} &= g C^{abd} A_\mu^b F^{\nu\mu a} \\
\partial_\mu F^{\nu\mu d} &= g C^{abd} A_\mu^b F^{\nu\mu a} \\
\partial_\mu F^{\mu\nu d} - g C^{abd} A_\mu^b F^{\mu\nu a} &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu d} - g C^{cbd} A_\mu^b F^{\mu\nu c} &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu a} + g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} &= 0
\end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu a} T^a + g C^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^a &= 0 \\
\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - ig A_\mu^b F^{\mu\nu c}\left[T^b, T^c\right] &= 0 \\
\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - ig A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^b T^c + ig A_\mu^b F^{\mu\nu c} T^c T^b &= 0 \\
\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - ig \mathbf{A}_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} + ig \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{A}_\mu &= 0 \\
\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} - ig\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}^{\mu\nu}\right] &= 0
\end{aligned}$$

我们也可以将方程的形式用$\mathcal{A}^{\mu}$来表示：

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = ig\mathbf{F}^{\mu\nu},$$
$$\mathcal{A}^{\mu} = ig\mathbf{A}^{\mu},$$

从而

$$\frac{1}{ig}\partial_{\mu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{(ig)^2}ig\left[\mathcal{A}^{\mu},\mathcal{F}^{\mu\nu}\right] = 0$$
$$\partial_{\mu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \left[\mathcal{A}^{\mu},\mathcal{F}^{\mu\nu}\right] = 0.$$

利用D_{μ}作用在张量上的结果

$$D_{\mu}\mathcal{B}(x) = \partial_{\mu}\mathcal{B}(x) - \left[\mathcal{A}_{\mu}(x),\mathcal{B}(x)\right]$$

我们有[11]

$$D_{\mu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0.$$

9.3.6　再几何些

前面我们从一个物理的要求（即要求（自旋以外）各内部自由度不可区分）出发引入了协变导数。协变导数是一个非常几何的概念。我们从几何的角度进一步分析一下这件事。

在平直空间中关于矢量我们有这样的知识，一个矢量有大小和方向（当然还要满足平行四边形法则），但没有一个起点。因此我们可以直接比较两个矢量，而不必考虑这个矢量是哪个点上的矢量。

但是，如果是弯曲空间，空间不同点上的矢量是无法比较的。为了比较两个矢量，我们应当首先将这两个矢量移动到同一个点上去。这个移动当然应该是平行移动。也就是说，每次移动后的矢量都与原来的矢量平行。

[11] 参侯伯元、侯伯宇《物理学家用的微分几何（第二版）》P100

对任意张量场Σ，协变微分运算都可以形式地表示为

$$D\Sigma = d + [\Gamma,\Sigma]$$

其中d为外微分，Γ为联络，而方括号$[,]$的意义如下：对张量场Σ的所有逆变指标左作用Γ，而对其所有协变指标乘以$(-1)^{k+1}$后右作用Γ（k的含义：将张量Σ表示为$(1,1)$型张量K与一个k形式ω的乘积，即$\Sigma = K\omega$）。根据这个原则，对于矢量场$\phi(x)$，由于只有一个逆变指标，只需用Γ左作用即可：$D\phi(x) = \partial\phi(x) + \Gamma(x)\phi(x)$；对张量场$\Sigma(x)$，由于它是$(1,1)$型张量，因此应该用$\Gamma$左作用一次，再加上右作用一次及一个负号（$k = 0$），因此$D\Sigma(x) = \partial\Sigma(x) + \Gamma(x)\Sigma(x) - \Sigma(x)\Gamma(x) = \partial\Sigma(x) + [\Gamma(x),\Sigma(x)]$，此处的$[,]$表示对易括号。

在平直的空间中，平行的定义是直接的，但是在弯曲的空间中，平行定义本身将是一个不小的问题。事实上，这个定义是随意的。显然，平行移动涉及两个点之间的联系问题，为此我们引入了联络。从某种意义上讲，联络体现的就是如何进行平行移动。当平行移动的基本原则确定下来后，联络反映的就是空间弯曲的情况了。

第十章　经典场，经典相互作用IV：对称破缺，Higgs机制

我们已经看到，一个有（自旋以外）内部自由度没有质量（或各分量的质量相同）的场具有$U(n) = SU(n) \times U(1)$对称性。但是如果有质量这个对称性就破坏了。这个问题主要出现在规范场的情况中。我们现在用规范场来描述电磁、弱和强三种作用。其中弱作用所对应的规范场应该是有质量的。可是如果有作用这个场就是一个普通的矢量场，而不会真的是一个规范场（矢量破坏了规范任意性）。那么怎么解决这个矛盾呢。也就是说，怎样在不破坏规范对称性的情况下考虑一个有质量的规范场呢。

我们考虑的是一个物理问题。对一个物理问题来说，本质上只有观测才是有意义的，其它都是中间过程。一个物体是否有质量，从观测的意义上讲就是要看它是否表现出惯性。只要表现出惯性就是有质量。产生惯性的原因其实我们从来都是不知道的。在所有现有理论中，质量都是一个唯象参数。它标记了惯性的大小，但是完全不反映质量的起源。

在操作意义上讲，质量与摩擦系数是一样的。摩擦系数只是唯象地标记了摩擦的大小，而完全不考虑摩擦的起源。事实上，当我们刚刚考虑摩擦的时候还对产生摩擦的原因一无所知。后来我们知道了，摩擦就是两个物理中分子间的电磁作用，这样我们完全可以由电磁作用出发计算出摩擦系数。这就是说，我们说得摩擦实际上是由一个持续不断的电磁相互作用产生的。

解决质量问题的办法与处理摩擦的思路是一样的。我们认为质量是一个标记惯性的唯象参数。而惯性则产生于一个持续的相互作用。由于存在一个这样的持续的相互作用。当物体受到外力的时候，会对外力有不同的反映。这就是惯性。

将质量理解成一个持续不断的相互作用的结果就是解决规范场质量问题的核心思想。

10.1 对称性自发破缺

在讨论质量问题之前我们先泛泛讨论一下对称性自发破缺。

先以磁性为例。我们不妨粗粗地按照磁性将物质分成两类：一种是可以带有磁性的，一种不可以。可以带磁性的物质我们不妨称它为磁性物质，不能带磁性的物质我们不妨称它为非磁性物质。

所谓带磁性是指它在没有外磁场的情况下仍然带有磁性。就是说这种物质在没有外磁场的情况下可以存在这样的态：它内部的小磁筹可以有足够多的比例指向一个方向，从而使它带有磁性。非磁性物质就不能做到这一点，当外磁场撤掉之后，它内部的磁筹均匀地指向各个方向，从而使它没有磁性。

这就是说，一个磁性物质是具备带有磁性能力的物质，但是并不等于它在任何时候都是带磁性的，它的磁筹完全可以处在一种各向同性的状态。一个非磁性的物质在磁场中磁筹也会偏离各向同性，从而表现出磁性质。但是当外磁场撤掉后，它的磁筹会立刻恢复到各向同性的状态。也就是说，一个磁性物质存在一种在没有外场的情况下也具有磁性的状态，而非磁性物质则不具有这样的状态。一个磁性物质处在具有磁性的状态是不需要外力维持的，原则上是可以自发形成的。而非磁性物质如果没有外力的维持是不可能有磁性质的，也就是说，非磁性物质原则上不可能自发地具有磁性。

但是一个磁性物质真的能自发地有不具有磁性转化成具有磁性的状态吗。显然也不能。没有磁性的状态对称性很高，有磁性后，系统便有了一个优势方向，对称性降低了。可是，对一个磁性物体来说，这个优势方向是可以随便选取的，选哪个方向完全是任意的。究竟选哪个方向需要一个外界因素指出来。这个外界因素可以是非常微小的扰动，它是用来破坏对称性的。不论扰动多小，都会破坏对称性。使系统从对称变到不对称。由此可以知道，一个磁性物质确实是可以自发磁化的。因为外因的作用只是指出一个优势方向，其作用的强度是可以忽略的。这就像是一个直立在地上的几十吨重的杆，处在一种不稳定的平衡状态。对它来说，空间是各向同性的，倒向哪个方向都一样。这时只需要蚊子那么大的小扰动，这个杆就轰然倒下了。它倒下时释放出大量的能量。这个能量不是那只蚊子给它的，是它自己本身就具有的。蚊子只是破坏了对称性。从某种意义上讲，你可以认为这个杆的倒下是自发的。这就是我们平时不这样放一个杆的原因，因为我们知道它会自发地倒下。

可见，一个物体能否在没有外场的时候带有磁性完全取决于它自身的性质。如果它有这样一个具有磁性的态那么它就可以在某些微小扰动下达到这个态，并处在这个态上。这个过程就像杆倒下一样，你可以认为是自发的。这就是说，这个物体可以自发磁化。如果它不具备这样的磁性的态，那么它就不会自发磁化。

一句话，一个系统可不可以自发地处在某个不对称的态上，或者说一个系统是不是可以自发磁化，完全取决于这个系统本身有没有这样一个态。

在场的问题中，同样，是否可以自发破缺完全取决于这个场是否有这样的一个不对称的态，如果有它就可以自发破缺。现在我们还都是在经典场的情况下讨论的这件事，如果是量子场，只需认为是场算符平均值对称自发破缺就是了。

10.2 实标量场：分立对称性的破缺

先考虑一个实标量场的对称性自发破缺的例子。这里我们将场看作是一个经典的场。

一个没有质量的自由标量场的拉氏量是

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i-V\left(\phi\right).$$

这个拉氏量的自由部分$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i$具有在变换

$$\phi\to-\phi \tag{10.1}$$

下不变的对称性，这是一个$O\left(1\right)$对称性。考虑同样具有这样的对称性的相互作用$V\left(\phi\right)$。按照前面的讨论，如果我们只讨论多项式的势，考虑到可重整的要求，在四维时空中方次最高到四次。但是如果我们仍要求$V\left(\phi\right)$具有（10.1）的对称性，那么$V\left(\phi\right)$中就不能出现三次方项ϕ^3。这样，一个可重整的，具有（10.1）对称性的势就是

$$V=\frac{1}{2!}a\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{10.2}$$

我们仍坚持以前引入的一个基本假设，认为世界是稳定的。这样必须有$\lambda>0$，否则势能曲线开口向下，能量没有下界，世界不稳定了。

显然，这样一来，二次项的系数a的符号会带来很本质的不同。

- $a>0$情况

在这种情况中，$a=m^2$就是粒子的质量。我们可以直接计算这个经典场

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i-\frac{1}{2!}a\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

的基态（能量最低态）。

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}=a\phi+\frac{\lambda}{6}\phi^3=0$$

由于$a>0$且$\lambda>0$，显然有$\phi=0$[1]。此时$V\left(\phi\right)\big|_{\phi=0}=0$。

[1]注意，是能量而不是拉氏量的最小值。

- $a<0$情况

显然这时不能将ϕ^2项理解为质量项了，否则粒子的质量就会是虚的[2]，这时的ϕ^2项也是一种相互作用。我们再来看看经典场的基态。极小值由

$$\frac{\partial V}{\partial \phi}=a\phi+\frac{\lambda}{6}\phi^3=0$$

确定，我们有[3]极值为

$$\phi=0,\quad \phi=\pm\sqrt{\frac{6\left(-a\right)}{\lambda}}\equiv\pm\,\phi_0.$$

其中$\phi_0=\sqrt{6\left(-a\right)/\lambda}$。能量最小态（真空态）是二度简并的，出现在$\phi=\pm\,\phi_0$处，如图。

此时的基态能量小于零，我们不妨将基态移为零。这时候我们面临一个选择：我们有两个能量最低态，选择哪个当作场量为零的点呢，左边还是右边。我们此时的境遇与将一个磁性物质磁化是一样的了。磁性物质存在一个表现出磁性的态（表现出磁性的态当然是个不对称的态），完全不需要借助外界力量的维持，系统就可以处在这个态上。但是，如果系统开始的时候处在无磁性的态上，此时系统处在各向同性的最大对称性状态，那么过渡到磁性态需要一个小扰动帮助它指出一个磁化的方向，磁化方向的选择是完全任意的。选择磁化方向后，各向同性的对称性就被破坏了。在我们现在的情况中也是一样，我们可以任意选择左或右，选择后，对称性就被破坏了。

我们将基态平移到场量为0的位置（如图），引入

$$\tilde{\phi}=\phi-\phi_0.$$

---

[2] 当粒子的速度超过光速时质量会变为虚数，因此虚质量可以对应这种快子。

[3]

$$\phi\left(a+\frac{\lambda}{6}\phi^2\right)=0$$
$$\phi=0,\ \phi^2=-\frac{6a}{\lambda}$$

具体地，我们可以将（10.2）写成[4]

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2!}a\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \\
&= \frac{1}{2!}a\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{3a^2}{2\lambda} - \frac{3a^2}{2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2 - \frac{3a^2}{2\lambda}.
\end{aligned}
$$

此时当$\phi = \phi_0$时$V = -\frac{3a^2}{2\lambda}$。只需将$V \to V + \frac{3a^2}{2\lambda}$就可以将基态移为零。移动后$V$变成

$$
V = \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2.
$$

它在$\phi = \phi_0$时为零。下面将两个简并基态中的一个移动到坐标原点[5]

4

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\lambda}{24}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2 - \frac{3a^2}{2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{24}\left(\phi^4 - 2\phi^2\phi_0^2 + \phi_0^4\right) - \frac{3a^2}{2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{24}\phi^4 - \frac{\lambda}{12}\phi^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{24}\phi_0^4 - \frac{3a^2}{2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{24}\phi^4 - \frac{\lambda}{12}\phi^2\frac{6(-a)}{\lambda} + \frac{\lambda}{24}\left(\frac{6(-a)}{\lambda}\right)^2 - \frac{3a^2}{2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{24}\phi^4 + \frac{1}{2}a\phi^2 + \frac{3a^2}{2\lambda} - \frac{3a^2}{2\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{24}\phi^4 + \frac{1}{2}a\phi^2
\end{aligned}
$$

5

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}(\phi - \phi_0)^2(\phi + \phi_0)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}(\phi - \phi_0)^2((\phi - \phi_0) + 2\phi_0)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^2\left(\tilde{\phi} + 2\phi_0\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{24}\tilde{\phi}^2\left(\tilde{\phi}^2 + 2\phi_0\tilde{\phi} + 4\phi_0^2\right) \\
&= \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^4 + \frac{\lambda\phi_0}{12}\tilde{\phi}^3 + \frac{\lambda\phi_0^2}{6}\tilde{\phi}^2 \\
&= \frac{\lambda\phi_0^2}{6}\tilde{\phi}^2 + \frac{\lambda\phi_0}{12}\tilde{\phi}^3 + \frac{\lambda}{24}\tilde{\phi}^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi^2-\phi_0^2\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi-\phi_0\right)^2\left(\phi+\phi_0\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\left(\phi-\phi_0\right)^2\left(\left(\phi-\phi_0\right)+2\phi_0\right)^2 \\
&= \frac{\lambda}{4!}\tilde{\phi}^2\left(\tilde{\phi}^2+2\phi_0\tilde{\phi}+4\phi_0^2\right) \\
&= \frac{\lambda\phi_0^2}{6}\tilde{\phi}^2+\frac{\lambda\phi_0}{12}\tilde{\phi}^3+\frac{\lambda}{24}\tilde{\phi}^4.
\end{aligned}
$$

可以看到，这样我们得到的新标量场$\tilde{\phi}$获得了质量，出现了$\tilde{\phi}^2$项。其质量为$m^2=\frac{\lambda\phi_0^2}{6}>0$。

此外，相互作用中出现了三次方项。在没有三次方项的时候，势能V中只包含ϕ的偶数项。因此只有偶数条外线的相互作用。这时可以定义这样一个量子数

$$
P_C=(-1)^N,
$$

，其中N为参与相互作用的粒子的总数。但是出现了三次项后，允许两个粒子在相互作用之后变为一个粒子，或一个粒子变成两个粒子。这样P_C不再是守恒量。对称性发生了破缺，在$\phi\to-\phi$下三次方项$\tilde{\phi}^3$不再是不变的了。这是破缺的是一个分立对称性。下面我们讨论连续对称性破缺的情况。

10.3 复标量场：连续对称性的破缺

在实标量场的情况下，我们讨论的是分立对称性的破缺，这里我们讨论复标量场的情况，这时候破缺的连续对称性。

一个复标量场相当于两个实标量场，一个做实部，一个做虚部：

$$
\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1+i\phi_2\right).
$$

前面我们考虑了具有$O(1)$对称性的实标量场，出于与前面同样的考虑我们讨论具有$U(1)$对称性的复标量场，取势能为

$$
V\left(\phi,\phi^*\right)=a\phi^*\phi+\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2. \tag{10.3}
$$

它显然在变换

$$
\phi\to e^{i\theta}\phi
$$

下不变。这里显然没有三次项，因为要在这个变换下不变，场量必须以$\phi^*\phi$的形式出现。用两个实场表示就是[6]

$$\begin{aligned} V\left(\phi,\phi^*\right) &= a\phi^*\phi+\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \\ &= \frac{a}{2}\phi_1^2+\frac{a}{2}\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_1^4+\frac{\lambda}{2}\phi_1^2\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_2^4. \end{aligned}$$

- $a>0$情况

在$a>0$情况中，$a=m^2$就是质量。此时的经典基态就是$\phi=0$。此时$U\left(1\right)$对称性仍然保持。这时两个实标量场ϕ_1和ϕ_2都有$\sqrt{\frac{a}{2}}$的质量。

- $a<0$情况

这时候$\phi^*\phi$或ϕ_1和ϕ_2的系数不再能被解释成质量，否则我们就会有虚质量。

我们先看一下这时候能量的基态（真空态），由于动能项总是正的，我们直接来看势能的最小值，这是直接的：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}\left[a\phi^*\phi+\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2\right]=0 \\ a\phi^*+2\lambda\left(\phi^*\phi\right)\phi^* &= 0 \\ \phi^*\phi &= -\frac{a}{2\lambda} \\ \left|\phi\right|^2 &= \frac{(-a)}{2\lambda}\equiv\left|\phi_0\right|^2 \end{aligned}$$

---

[6]

$$\begin{aligned} V\left(\phi,\phi^*\right) &= a\phi^*\phi+\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \\ &= \frac{a}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2 \\ &= \frac{a}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2 \\ &= \frac{a}{2}\phi_1^2+\frac{a}{2}\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^4+2\phi_1^2\phi_2^2+\phi_2^4\right) \\ &= \frac{a}{2}\phi_1^2+\frac{a}{2}\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_1^4+\frac{\lambda}{2}\phi_1^2\phi_2^2+\frac{\lambda}{4}\phi_2^4 \end{aligned}$$

我们可以将（10.3）写成[7]

$$\begin{aligned}V &= a\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \\ &= a\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 + \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 - \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(\phi^*\phi - \frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2 - \lambda\left(\frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(|\phi|^2 - |\phi_0|^2\right)^2 - \lambda\left(|\phi_0|^2\right)^2\end{aligned}$$

的形式。做一个$V \to V + \lambda\left(\frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2$的移动将基态移为零，有

$$V = \lambda\left(\phi^*\phi - |\phi_0|^2\right)^2.$$

此时，势能的最小值出现在

$$|\phi|^2 = \frac{(-a)}{2\lambda}$$

的圆上，这些ϕ的最小值的圆的圆心是$\phi = 0$（如图）。与实标量场情况相同，我们将系统的基态移到$\phi = 0$处。这时候我们面临一个问题，在以$\phi = 0$为圆心，以$\frac{(-a)}{2\lambda}$为半径的圆上都是基态，移动哪个点呢。这就是需要我们来破缺对称性了。在实标量场的情况中只有两个基态，我们要做的是在两个里选一个，现在要做的是在圆上的无穷多个点上选一个。简单起见我们选择实轴上的一个点。这相当于选择

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{(-a)}{2\lambda}},$$

这是一个实数。引入一个移动后的新场

$$\tilde{\phi} = \phi - \phi_0.$$

[7]

$$\begin{aligned}V &= \lambda\left(\phi^*\phi - \frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{(-a)}{\lambda}\phi^*\phi + \left(\frac{(-a)}{2\lambda}\right)^2\right) \\ &= \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 + a\phi^*\phi + \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 \\ &= a\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 + \lambda\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

这样势能为[8]

$$
\begin{aligned}
V &= \lambda \left(\phi^*\phi - \phi_0^2\right)^2 \\
&= \lambda \left[\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} + \phi_0 \left(\tilde{\phi}^* + \tilde{\phi}\right)\right]^2 .
\end{aligned}
$$

移动后的$\tilde{\phi}$也是一个复标量场，我们可以用两个实标量场来表示它：

$$
\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\phi}_1 + i\tilde{\phi}_2\right) .
$$

这样有

$$
\begin{aligned}
V &= \lambda \left[\left|\tilde{\phi}\right|^2 + \phi_0 \left(2 \operatorname{Re} \tilde{\phi}\right)\right]^2 \\
&= \lambda \left[\frac{1}{2}\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + 2\phi_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\phi}_1\right]^2 \\
&= \lambda \left[\frac{1}{2}\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + \sqrt{2}\phi_0 \tilde{\phi}_1\right]^2 \\
&= \lambda \left[2\phi_0^2\tilde{\phi}_1^2 + \sqrt{2}\phi_0\tilde{\phi}_1 \left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right)^2\right] \\
&= 2\lambda\phi_0^2\tilde{\phi}_1^2 + \sqrt{2}\lambda\phi_0\tilde{\phi}_1 \left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right) + \frac{1}{4}\lambda \left(\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2\right)^2 .
\end{aligned}
$$

移动基态后，对称破缺了。我们得到了两个移动后的新实标量场$\tilde{\phi}_1$和$\tilde{\phi}_2$。可以看到，这里有$\tilde{\phi}_1^2$项，没有$\tilde{\phi}_2^2$项，这就是说原来都没有质量的两个实标量场在对称自发破缺后其中的一个获得了质量，大小为$m^2 = 2\lambda\phi_0^2$，另一个仍然没有质量。其实进一步地我们可以有非常普遍地证明存在一个无质量的有效场是一个连续对称性的自发对称破缺的普遍结论。这就是Goldstone定理。

Goldstone定理：如果系统的对称性由具有N个生成元的连续对称群描述，自发破缺后变为一个具有N'个生成元的对称群，则将有$N - N'$个无质量的有效场出现。

---

[8]

$$
\begin{aligned}
V &= \lambda \left(\phi^*\phi - \phi_0^2\right)^2 \\
&= \lambda \left[\left(\tilde{\phi}^* + \phi_0\right)\left(\tilde{\phi} + \phi_0\right) - F^2\right]^2 \\
&= \lambda \left[\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} + \phi_0 \left(\tilde{\phi}^* + \tilde{\phi}\right) + \phi_0^2 - \phi_0^2\right]^2 \\
&= \lambda \left[\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} + \phi_0 \left(\tilde{\phi}^* + \tilde{\phi}\right)\right]^2
\end{aligned}
$$

我们可以看到，实标量场和复标量场它们的拉氏量都是对称的（所考虑的实标量场是$O(1)$对称，复标量场是$U(1)$对称），但是这两个种情况的基态的对称性要低。这一点构成了规范场在保持规范对称性的同时又获得质量基础。

10.4 Higgs机制

我们关心的是规范场如何在不破坏运动方程规范对称的情况下获得质量。我们将看到，如果我们将一个有四次方自作用的复标量场（这样这样基态才可能对称破缺）与一个矢量场规范耦合（也就是在原来的自作用上再附加一个规范耦合），那么那个Goldstone定理给出的，当系统发生自发对称破缺时会出现的无质量的Goldstone粒子，便不再出现了（只剩下那个有质量的标量粒子），代之以这个矢量场获得了质量。原来没有质量的矢量粒子只有两个自旋分量（螺度），获得质量后，自旋有了三个分量，承担了消失了一个标量粒子而失掉的那个自由度。或者说，原来那个无质量的Goldstone粒子的自由度变成了矢量场的纵向自由度，从而使矢量场获得质量。这时候，自作用导致的那个有质量的标量粒子仍然存在，这个粒子被称作Higgs粒子。这个新的粒子是否存在，或者说这个有质量标量粒子的自由度是不是物理的完全取决于能否在实验中观测到。实验正在进行中。

$U(1)$规范场

这里我们考虑一个Higgs机制的简单例子：$U(1)$规范场的情况。

一个有自作用的复标量场的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi) - V(\phi,\phi^*)\\ &= (\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2\end{aligned}$$

如果$\mu^2 > 0$，那么这一项就是通常的质量项；但是如果$\mu^2 < 0$，就像前面分析的那样就会出现基态不在$\phi = 0$处的情况，也就是会出现对称自发破缺。这时的拉氏量在整体规范变换$\phi \to \phi' = e^{-i\theta}\phi$下是不变的，但是基态却不具有这样的对称性。这个系统在对称自发破后（当然需要人为选择破缺方式，在自然中则归结为我们不了解的自然因素的扰动），按照Goldstone的结果会出现一个有质量的标量粒子和一个无质量的标量粒子。现在我们让这个自作用的标量场与一个规范场耦合。具体操作就是用协变导数代替普通导数，即

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

这样参与规范耦合的标量场拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\left(\left(\partial_\mu + igA_\mu\right)\phi\right)^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (10.4)\end{aligned}$$

一个拉氏量当然包含自由的矢量场部分。

我们仍将复标量场ϕ写成实部和虚部的形式

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right).$$

拉氏量为[9]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\} \\ &- \mu^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right] - \lambda\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\}^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ = &\frac{1}{2}\left[D_\mu^*\phi_1 D^\mu\phi_1 + D_\mu^*\phi_2 D^\mu\phi_2\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

在我们的情况中，$\mu^2 < 0$，不是质量。这样另一个参数λ必满足

$$\lambda > 0,$$

以使得势能曲线开口向上，如果开口向下则系统能量没有下界，不稳定了。

9

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left\{\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^* \left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\} \\ &- \mu^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right] - \lambda\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right]\right\}^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ = &\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\left(\phi_1 - i\phi_2\right)\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ = &\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1 - i\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\right]\left[\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + i\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2\right]\right\} - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ = &\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + i\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2 \\ -i\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + \left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2\end{array}\right\} - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ = &\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_1\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_1 + \left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi_2\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi_2\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ = &\frac{1}{2}\left[D_\mu^*\phi_1 D^\mu\phi_1 + D_\mu^*\phi_2 D^\mu\phi_2\right] - \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

我们仍然来看一看能量的最小值出现在哪里，这可以直接求势能的最小值：

$$\begin{aligned} V(\phi_1,\phi_2) &= \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2+\frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2-\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}, \end{aligned}$$

因此势能在

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}=0$$

即

$$\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}=\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}\equiv\phi_0,$$

或

$$|\phi|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_1^2+\phi_2^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0$$

时取最小值

$$V_{\min}=-\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}.$$

注意这里的$\mu^2<0$，因此$\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$是大于零的实数，即$V_{\min}=-\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}$。

首先将系统基态移动为零

$$V(\phi_1,\phi_2)\to V(\phi_1,\phi_2)-V_{\min}=\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2. \tag{10.5}$$

可以更简洁地表示成[10]

$$V(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{4}\lambda\left(2|\phi|^2-\phi_0^2\right)^2.$$

---

[10]

$$\begin{aligned} V(\phi_1,\phi_2) &= \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2 \\ &= \left[\sqrt{\lambda}|\phi|^2+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sqrt{\lambda}}\right]^2 \\ &= \lambda\left(|\phi|^2+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(|\phi|^2-\frac{1}{2}\frac{-\mu^2}{\lambda}\right)^2 \\ &= \lambda\left(|\phi|^2-\frac{1}{2}\phi_0^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda\left(2|\phi|^2-\phi_0^2\right)^2 \end{aligned}$$

显然，在做了式（10.5）给出的移动后，在$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0$时$V(\phi_1, \phi_2) = 0$。

我们用一种与前面少许不同的方式处理来做这件事。ϕ是一个复标量场，我们以前将它写成实部加虚部的形式

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2).$$

。当然我们也可以用极坐标来表示这件事，即

$$\begin{aligned}\phi &= |\phi| e^{i\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} e^{i \arctan \phi_2/\phi_1}.\end{aligned}$$

纯粹是为了后面形式上的方便，我们暂时将场的形式写成

$$\sqrt{2}\phi = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} e^{i \arctan \phi_2/\phi_1}.$$

现在能量零点在半径为ϕ_0的圆上，我们要做的是将能量零点移动到场量为零的位置上。我们可以这样做（方法不是唯一的）。在极坐标下移动前的矢径是$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$，幅角是$\arctan \phi_2/\phi_1$。一个复场中包含两个实场，在直角坐标表示中，我们用实部和虚部来表示这两个实场；在极坐标表示中，我们用矢径和幅角来表示这两个实场。移动的方式，也就是打破对称性的方式，完全是任意的。我们这样来完成移动，代替这个矢径和幅角，我们引入新的矢径h和幅角Φ，将场量写成

$$\sqrt{2}\phi = (h + \phi_0) e^{i\Phi/\phi_0} \tag{10.6}$$

h和幅角Φ当然是实的。这样选取移动方式的目的是这个形式很容易做规范变换，而规范变换在后面对我们是非常重要的。这样

$$\begin{aligned}V(\phi_1, \phi_2) \to V(h, \Phi) &= \frac{1}{4}\lambda\left(2|\phi|^2 - \phi_0^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda\left(|h + \phi_0|^2 - \phi_0^2\right)^2\end{aligned}$$

在$h = 0$的时候有$V(0, \Phi) = 0$。也就是说用新场量h和Φ来描述，能量的最小值出现在场量$h = 0$的地方。

由前面的Goldstone定理我们已经知道，这样的对称破缺会导致无质量的自作用的复标量场变成一个有质量的实标量场和一个没有质量的实标量场（Goldstone粒子）。前面我们破缺对称性的方式是直接移动，$\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$。现在我们采用了另一种形式的破缺（移动）方式（破缺方式是任选的），式（10.6），我们来看看在这种破缺方式下复标量场会怎样。

将变换（10.6）代入自由复标量场的拉氏量中有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \\
&= \left[\partial_\mu\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\partial^\mu\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)\right] - \mu^2\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \lambda\left[\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)\right]^2 \\
&= \left(\partial_\mu\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{-i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}\partial_\mu e^{-i\Phi/\phi_0}\right)\left(\partial^\mu\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}\partial^\mu e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \mu^2\frac{(\phi_0+h)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+h)^4}{4} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu h e^{-i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}\left(\frac{-i}{\phi_0}\right)\partial_\mu\Phi e^{-i\Phi/\phi_0}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu h e^{i\Phi/\phi_0} + \frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}\left(i\frac{1}{\phi_0}\right)\partial^\mu\Phi e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \mu^2\frac{(\phi_0+h)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+h)^4}{4} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu h e^{-i\Phi/\phi_0} - i\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}\phi_0}\partial_\mu\Phi e^{-i\Phi/\phi_0}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu h e^{i\Phi/\phi_0} + i\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}\phi_0}\partial^\mu\Phi e^{i\Phi/\phi_0}\right) \\
&- \mu^2\frac{(\phi_0+h)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+h)^4}{4} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - i\frac{\phi_0+h}{2\phi_0}\partial_\mu\Phi\partial^\mu h + i\frac{\phi_0+h}{2\phi_0}\partial_\mu h\partial^\mu\Phi + \frac{(\phi_0+h)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \mu^2\frac{(\phi_0+h)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+h)^4}{4} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{(\phi_0+h)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \mu^2\frac{(\phi_0+h)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+h)^4}{4}
\end{aligned}
$$

这个拉氏量中不包含Φ的二次项，这就是说Φ场是没有质量的，说明在自发对称破缺发生后产生了一个无质量的粒子，仍然是Goldstone定理的结果。这不奇怪，Goldstone定理是严格的，其结论不依赖破缺方式的选择。

下面我们来看看如果在复标量场自作用的基础上再加上一个规范耦合，会是什么结果。

将代换（10.6）代入（10.4），有[11]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^*\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+h\right)^4}{4} \\
&- ig\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\partial^\mu\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)A_\mu + ig\partial_\mu\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)A^\mu \\
&+ g^2\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+h}{\sqrt{2}}e^{i\Phi/\phi_0}\right)A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \mu^2\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0+h\right)^4}{4} + g^2\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{2}A_\mu A^\mu \\
&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g\frac{\left(\phi_0+h\right)^2}{\phi_0}\partial^\mu\Phi A_\mu.
\end{aligned}$$

[11]

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^*\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi \\
&= \left(\partial_\mu\phi^* - igA_\mu\phi^*\right)\left(\partial^\mu\phi + igA^\mu\phi\right) \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - igA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^* igA^\mu\phi - igA_\mu\phi^* igA^\mu\phi \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu
\end{aligned}$$

因此拉氏量

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left[\left(\partial_\mu - igA_\mu\right)\phi^*\left(\partial^\mu + igA^\mu\right)\phi\right] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 - ig\phi^*\partial^\mu\phi A_\mu + ig\partial_\mu\phi^*\phi A^\mu + g^2\phi^*\phi A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

将变换（10.6）代入并利用前面自由场的结果有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+\eta)^4}{4} \\
&- ig\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)^*\partial^\mu\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu + ig\partial_\mu\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)A^\mu \\
&+ g^2\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)^*\left(\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+\eta)^4}{4} + g^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&- ig\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/\phi_0}\left(\partial^\mu\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0} + \frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial^\mu e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu + ig\left(\partial_\mu\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/\phi_0} + \frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial_\mu e^{-i\xi/\phi_0}\right)\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+\eta)^4}{4} + g^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&- ig\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{-i\xi/\phi_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu\eta e^{i\xi/\phi_0} + i\frac{1}{\phi_0}\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial^\mu\xi e^{i\xi/\phi_0}\right)A_\mu + ig\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\eta e^{-i\xi/\phi_0} - i\frac{1}{\phi_0}\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}\partial_\mu\xi e^{-i\xi/\phi_0}\right)\frac{\phi_0+\eta}{\sqrt{2}}e^{i\xi/\phi_0}A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+\eta)^4}{4} + g^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&- ig\frac{\phi_0+\eta}{2}\partial^\mu\eta A_\mu + g\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0}\partial^\mu\xi A_\mu + ig\frac{\phi_0+\eta}{2}\partial_\mu\eta A^\mu + g\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0}\partial_\mu\xi A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{(\phi_0+\eta)^2}{2\phi_0^2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2} - \lambda\frac{(\phi_0+\eta)^4}{4} + g^2\frac{(\phi_0+\eta)^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g\frac{(\phi_0+\eta)^2}{\phi_0}\partial^\mu\xi A_\mu
\end{aligned}$$

我们关心的是质量项，而质量项是二次项，因此我们在这里只观察二次项，有[12]

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\Phi A_\mu + \mu^2h^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda}"$$

原来的规范场A_μ没有二次项，也就是没有质量项。但是对称破缺后出现了二次项，$\frac{1}{2}g^2\phi_0^2A_\mu A^\mu$，这暗示我们出现了质量项，从而也就使规范场获得了质量。但是，这里出现二次项的同时还出现了一个交叉项$g\phi_0\partial^\mu\Phi A_\mu$，这样，我们就不能简单地将二次项解释成质量项了。我们来看看这一项。

我们的拉氏量是定域规范不变的。因此我们可以尝试找一个合适的规范变换将拉氏量中我们不需要的项变换掉。当然这在一般情况下是不可能做到的，只能对某些特殊的拉氏量才能成功。

我们选择这样的规范变换

$$\phi \to \phi' = e^{-i\Phi/\phi_0}\phi = \frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}},$$

即取

$$\theta(x) = \frac{\Phi(x)}{\phi_0}.$$

这时，势A_μ在这个变换下

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) = A_\mu + \frac{1}{g\phi_0}\partial_\mu\Phi.$$

12

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \sim\ & \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\phi_0^2}{2} - \mu^2\frac{2\phi_0\eta}{2} - \mu^2\frac{\eta^2}{2} - \lambda\frac{\phi_0^4}{4} - \lambda\frac{4\phi_0^3\eta}{4} - \lambda\frac{6\phi_0^2\eta^2}{4} \\
& + g^2\frac{\phi_0^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g\frac{\phi_0^2}{\phi_0}\partial^\mu\xi A_\mu \\
& = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{\phi_0^2}{2} - \lambda\frac{\phi_0^4}{4} - \mu^2\phi_0\eta - \lambda\phi_0^3\eta - \mu^2\frac{\eta^2}{2} - \lambda\frac{6\phi_0^2\eta^2}{4} \\
& + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu \\
& = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - \mu^2\frac{-\frac{\mu^2}{\lambda}}{2} - \lambda\frac{\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2}{4} - \left[\mu^2 + \lambda\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)\right]\phi_0\eta \\
& - \left(\mu^2\frac{1}{2} + \lambda\frac{3\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{2}\right)\eta^2 + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu \\
& = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{\mu^4}{2\lambda} - \frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu \\
& = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + g\phi_0\partial^\mu\xi A_\mu + \mu^2\eta^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda}
\end{aligned}$$

场在规范变换下是不变的

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

拉氏量在变换下为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \left[\left(\partial_\mu - igA'_\mu\right)\phi'^*\left(\partial^\mu + igA'^\mu\right)\phi'\right] - \mu^2\phi'^*\phi' - \lambda\left(\phi'^*\phi'\right)^2 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \left[\left(\partial_\mu - igA'_\mu\right)\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}}\left(\partial^\mu + igA'^\mu\right)\frac{\phi_0 + h}{\sqrt{2}}\right] - \mu^2\frac{\left(\phi_0 + h\right)^2}{2} - \lambda\frac{\left(\phi_0 + h\right)^4}{4} - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - igA'_\mu\right)\left(\phi_0 + h\right)\right]\left[\left(\partial^\mu + igA'^\mu\right)\left(\phi_0 + h\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_0^2 + 2\phi_0 h + h^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi_0^4 + 4\phi_0^3 h + 6\phi_0^2 h^2 + 4\phi_0 h^3 + h^4\right) - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu h - igA'_\mu\left(\phi_0 + h\right)\right)\right]\left[\left(\partial^\mu h + igA'^\mu\left(\phi_0 + h\right)\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\mu^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\mu^2 2\phi_0 h - \frac{1}{2}\mu^2 h^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi_0^4 - \frac{1}{4}\lambda 4\phi_0^3 h - \frac{1}{4}\lambda 6\phi_0^2 h^2 - \frac{1}{4}\lambda 4\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\partial_\mu h\partial^\mu h - igA'_\mu\left(\phi_0 + h\right)\partial^\mu h\right] + \left[\partial_\mu h igA'^\mu\left(\phi_0 + h\right) - igA'_\mu\left(\phi_0 + h\right)igA'^\mu\left(\phi_0 + h\right)\right]\right\} \\
&- \frac{1}{4}\left(2\mu^2 + \lambda\phi_0^2\right)\phi_0^2 - \left(\mu^2 + \lambda\phi_0^2\right)\phi_0 h - \frac{1}{2}\left(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2\right)h^2 - \lambda\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu h\partial^\mu h + g^2 A'_\mu A'^\mu\left(\phi_0^2 + 2\phi_0 h + h^2\right)\right] - \frac{1}{4}\mu^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\left(\mu^2 + 3\lambda\phi_0^2\right)h^2 - \lambda\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}g^2 A'_\mu A'^\mu h\left(2\phi_0 + h\right) - \frac{1}{4}\mu^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\left(3\lambda\phi_0^2 + \mu^2\right)h^2 \\
&- \lambda\phi_0 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4.
\end{aligned}$$

可以看到，在做了这个规范变换后（这个规范变换当然不会影响结果），拉氏量中不再出现标量场Φ，而同时出现了二次的矢量场项$\frac{1}{2}g^2\phi_0^2 A'_\mu A'^\mu$，这就是说原来没有质量的矢量场$A^\mu$获得了质量。也就是说，自发对称破缺后出现的无质量的Goldstone粒子在引入规范场后不再出现，而原本无质量的规范场获得了质量。由于标量Goldstone粒子的消失而去掉的自由度被矢量场获得了。我们知道，自旋为1的无质量的矢量场只有两个两个螺度自由度，而自旋为1的有质量的矢量场则有三个自由度：除了无质量情况下的两个螺度自由度外，还会有一个纵向自由度。这个纵向自由度就是由那个消失了的Goldstone粒子转化来的。我们也看到，矢量场通过这种方式获得质量的同时还要伴随着产生一个有质量的标量场，这就是Higgs粒子。找到了它，这种使矢量场获得质量的机制就可以认为被证实了。

第十一章　经典场V：自由粒子解

第十二章　经典场VI：微扰处理

12.1　微扰处理：经典情况

出于可重整的考虑，在四维时空中我们只关心势$V(\phi)$小于四次方的情况，它们的拉氏量是（9.1），运动方程是（9.2）。精确求解这个问题当然是困难的，我们采用微扰的办法。