辐射转移方程

国家天文台
钱磊
(qianlivan@gmail.com)

Chapter 1

基本量

辐射转移方程描述的是电磁波（光子）传播过程中辐射强度（光子分布函数）的变化规律。其它种类的辐射不在本书范围之内。

1.1 物理量

从电磁波的观点来看，辐射强度可以用单位时间内沿某方向在单位立体角范围内通过单位投影面积的单位频率范围内的能量来 表示，辐射强度I_ν的定义式为

$$dE = I_\nu \cos\theta dt d\Omega dA d\nu, \tag{1.1}$$

其中E是能量，t是时间，Ω是立体角，A是接收面的面积，ν是频率，θ是电磁波传播方向和接收面法线的 夹角，$\cos\theta$的因子来源于将接收面投影到垂直于电磁波传播方向的平面上。设$d\sigma = \cos\theta dA$。

从光子的观点来看，辐射强度可以用光子在相空间中的分布函数$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$表示。辐射强度和光子分布函数的关系为

$$I_\nu = ch\nu f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \tag{1.2}$$

其中c是光速，h是普朗克常数。

对于热平衡辐射，辐射强度I_ν可以用普朗克函数

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{1.3}$$

表示。对于射电频率，通常$h\nu \ll kT$，所以

$$B_\nu(T) \approx \frac{2\nu^2}{c^2}kT. \tag{1.4}$$

对于一个辐射强度，定义亮温度T_B为假设此辐射为热平衡辐射所对应的温度，

$$T_B \equiv \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu. \tag{1.5}$$

1.2 不变量

1.2.1 平直空间中的均匀介质

对于一束光线，考虑路径上没有发射和吸收，光束在光源处的截面积为$d\sigma_s$，在接收者处的截面积为$d\sigma_r$，光源到 接收者的距离为D。在光源处，辐射强度为

$$I_{\nu,s} = \frac{dE_s}{dt_s d\Omega_s d\nu_s d\sigma_s}, \tag{1.6}$$

在接收者处，辐射强度为

$$I_{\nu,r} = \frac{dE_r}{dt_r d\Omega_r d\nu_r d\sigma_r}. \tag{1.7}$$

在平直空间中，$dt_s = dt_r$，$d\nu_s = d\nu_r$。由能量守恒$dE_s = dE_r$可以得到

$$I_{\nu,s} d\Omega_s d\sigma_s = I_{\nu,r} d\Omega_r d\sigma_r, \tag{1.8}$$

注意到对于均匀介质，光沿直线传播，因而有$d\Omega_s = d\sigma_r/D^2$和$d\Omega_r = d\sigma_s/D^2$，可以得到

$$I_{\nu,s} = I_{\nu,r}. \tag{1.9}$$

也就是说，在平直空间的均匀介质中，辐射强度I_ν是一个不变量。

1.2.2 平直空间中的非均匀介质

考虑到介质不均匀，折射率在空间上有变化，此时，光不沿直线传播，光束的立体角会随传播而发生变化，I_ν不再是 不变量。

考虑两个临近的面元1和2，光从面元1入射，入射角为θ_1，此处的折射率为n_1，从面元2出射，出射角为θ_2， 此处的折射率为n_2。根据折射定律

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1.10}$$

微分可得

$$n_1 \cos\theta_1 d\theta_1 = n_2 \cos\theta_2 d\theta_2 \tag{1.11}$$

通过面元1和2的能量分别为

$$dE_1 = I_{\nu,1} \cos\theta_1 dt_1 d\Omega_1 d\nu_1 dA_1, \tag{1.12}$$

$$dE_2 = I_{\nu,2} \cos\theta_2 dt_2 d\Omega_2 d\nu_2 dA_2, \tag{1.13}$$

根据能量守恒$dE_1 = dE_2$得到

$$I_{\nu,1} \cos\theta_1 d\Omega_1 = I_{\nu,2} \cos\theta_2 d\Omega_2. \tag{1.14}$$

折射前和折射后光束所张立体角之比为

$$\frac{d\Omega_1}{d\Omega_2} = \frac{\sin\theta_1 d\theta_1}{\sin\theta_2 d\theta_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}. \tag{1.15}$$

带入前一个式子可以得到

$$\frac{I_{\nu,1}}{n_1^2} = \frac{I_{\nu,2}}{n_2^2}. \tag{1.16}$$

所以，在平直空间的折射率随空间变化的介质中，I_ν/n^2是一个不变量。

1.2.3 弯曲空间

在弯曲空间中，不考虑介质的影响，沿类光测地线，I_ν/ν^3是一个不变量。

Chapter 2

辐射转移方程

光子传播的问题可以用一般的基于相空间的玻尔兹曼方程描述，由光子的玻尔兹曼方程可以导出辐射转移方程。

2.1 平直空间的辐射转移方程

2.1.1 均匀介质

在平直空间中光子的玻尔兹曼方程可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f + (F \cdot \nabla_p) f = \left(\frac{Df}{Dt}\right)_c, \tag{2.1}$$

其中右边的碰撞项在不考虑折射率的影响时等于单位体积发射的光子数减去吸收的光子数，

$$\left(\frac{Df}{Dt}\right)_c = (j_\nu - \kappa_\nu I_\nu)/(h\nu) \tag{2.2}$$

其中，j_ν是发射系数，κ_ν是吸收系数。 不考虑广义相对论效应，由于光子的静止质量为0，所以$F \equiv 0$，结合辐射强度和光子的分布函数的关系（方程 1.1）可以得到

$$\frac{1}{ch\nu}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{1}{ch\nu} c (\mathbf{l} \cdot \nabla) I_\nu = (j_\nu - \kappa_\nu I_\nu)/(h\nu) \tag{2.3}$$

其中光子速度$\mathbf{v}$已经写为$c\mathbf{l}$，化简后得到平直空间均匀介质中的辐射转移方程

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{l} \cdot \nabla) I_\nu = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu. \tag{2.4}$$

对于稳态源，方程可以简化为

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu \tag{2.5}$$

定义光深$\tau_\nu \equiv \int \kappa_\nu ds$，上式可以进一步写为

$$\frac{dI_\nu}{d\tau} = S_\nu - I_\nu, \tag{2.6}$$

其中源函数$S_\nu \equiv j_\nu/\kappa_\nu$。

根据方程 1.5，还可以写出亮温度形式的辐射转移方程。

$$\frac{dT_B}{ds} = \left(\frac{c^2}{2\nu^2 k}\right) j_\nu - \kappa_\nu T_B \tag{2.7}$$

在热平衡时，吸收等于发射

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T_S), \tag{2.8}$$

其中T_S是热平衡温度。于是亮温度形式的辐射转移方程可以写为

$$\frac{dT_B}{d\tau} = T_S - T_B, \tag{2.9}$$

其中$d\tau = \kappa_\nu ds$。

2.1.2 考虑折射率变化

考虑折射率变化，辐射转移方程 2.5右边应该加上和折射率有关的一项

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu + \frac{\partial I_\nu}{\partial n_\nu}\frac{dn_\nu}{ds}, \tag{2.10}$$

注意到I_ν/n^2是不变量，即$I_\nu/n^2 =$常数，所以

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial n_\nu} - \frac{2}{n_\nu} I_\nu = 0 \tag{2.11}$$

带入方程 2.10整理后得到

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{I_\nu}{n_\nu^2}\right) = \frac{j_\nu}{n_\nu^2} - \kappa_\nu \left(\frac{I_\nu}{n_\nu^2}\right), \tag{2.12}$$

这个方程和均匀介质中的辐射转移方程非常类似，只是发射系数和折射率有关。从某种意义上来说，这个方程是一种推广形式的辐射转移方程。此 方程还可以写为

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{I_\nu}{n_\nu^2}\right) = S'_\nu - \left(\frac{I_\nu}{n_\nu^2}\right), \tag{2.13}$$

其中源函数$S'_\nu \equiv j_\nu/(k_\nu n_\nu^2)$。

2.2 弯曲时空的辐射转移方程

引力场是完全时空的表现，在弯曲时空中，即使光子沿测地线传播，频率和光束的截面也会发生变化。因而，在完全时空中，辐射强度I_ν 不再是不变量，而I_ν/ν^3是不变量。此外，电磁波在弯曲时空中传播时，偏振也会受到影响，所以严格来说应该用考虑偏振的辐射转移方程进行描述。在引力场较弱的情况下可以忽略偏振的变化，只考虑辐射强度I_ν的辐射转移方程。

2.2.1 忽略偏振的变化

在弯曲时空中，辐射转移问题通常直接用弯曲空间的波尔斯曼方程处理。有时候为了方便理解，也写出和平直空间里类似的辐射转移方程。和前面类似，这样的辐射转移方程也是用不变量描述的。如前所述，弯曲空间中没有介质时，$\mathfrak{F} = I_\nu/\nu^3$是不变量。辐射转移方程可以写为

$$p^a e^\alpha_{(a)} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^\alpha} - p^a \Gamma^b_{ac} p^c \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p^b} = -f\mathfrak{F} + g, \tag{2.14}$$

其中$e^\alpha_{(a)}$是标架，$\Gamma^b_{ac} = e^\alpha_{(a)} e^{(b)}_\gamma e^\gamma_{(c);\alpha}$。$f$和$g$与吸收系数$\kappa_\nu$和发射系数$j_\nu$的关系为

$$f_\nu = \nu\kappa_\nu, \quad g = j_\nu/\nu^2. \tag{2.15}$$

事实上，从这个方程可以看出点玻尔兹曼方程的影子。

Chapter 3

形式解

3.1 无发射、无吸收传播

对于平直空间中的均匀介质，在没有发射和吸收的时候，辐射转移方程描述的纯粹是电磁波的传播，方程 2.4 简化为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{l}\cdot\nabla)I_\nu = 0. \tag{3.1}$$

这个方程的形式解为

$$I_\nu = F(t - r/c), \tag{3.2}$$

其中$F(x)$是任意可微函数。对于稳态源，这个解说明的正是：辐射强度I_ν是一个不变量。

类似地，对于稳态源，无发射、无吸收时，在考虑折射率变化的情况下，辐射转移方程的解表明I_ν/n^2是不变量；在弯曲时空中 辐射转移方程的解表明I_ν/ν^3是不变量。

3.2 平直时空的一般解

考虑光从介质中的A点传播到B点，方程 2.6的形式解（B点的辐射强度）可以写为

$$I_\nu(B) = I_\nu(A)e^{-(\tau_B-\tau_A)} + \int_A^B e^{-(\tau_B-\tau')}S_\nu(\tau')d\tau'. \tag{3.3}$$

重新规定光深的零点，设$\tau_A = 0$，上式可以写为

$$I_\nu(\tau) = I_\nu(0)e^{-\tau} + \int_0^\tau e^{-\tau'}S_\nu(\tau')d\tau'. \tag{3.4}$$

此形式解也可以写成亮温度的形式。

$$T = T_0e^{-\tau} + \int_0^\tau e^{-\tau'}T(\tau')d\tau' \tag{3.5}$$

Chapter 4

应用实例

4.1 谱线的辐射转移

对于谱线而言，线心附近的发射系数j和吸收系数κ都包括谱线和连续谱两个部分，即$j = j_L + j_c$， $\kappa = \kappa_L + \kappa_c$。假设线心附近的辐射强度为$I_L$，则线心附近的辐射转移方程为

$$\frac{dI_L}{ds} = (j_L + j_c) - (\kappa_L + \kappa_c)I_L. \tag{4.1}$$

形式解为

$$I_L(s) = I_0 e^{-\tau(s)} + \int_0^s (j_L + j_c) e^{-\tau(s')} ds', \tag{4.2}$$

其中光深$\tau = \tau_L + \tau_c$ 在谱线附近的连续谱区，$\kappa_L \simeq 0$，$j_L = 0$，假设连续谱区的辐射强度为I_c，辐射转移方程变为

$$\frac{dI_c}{ds} = j_c - \kappa_c I_c. \tag{4.3}$$

形式解为

$$I_c(s) = I_0 e^{-\tau_c(s)} + \int_0^s j_c e^{-\tau(s')} ds'. \tag{4.4}$$

二者之差即为谱线强度

$$I_L - I_c = I_0(e^{-\tau(s)} - e^{-\tau_c(s)}) + \int_0^s j_L e^{-\tau(s')} ds' + \int_0^s j_c (e^{-\tau(s')} - e^{-\tau_c(s')}) ds'. \tag{4.5}$$

通常谱线的光深远大于连续谱光深$\tau_L \gg \tau_c$，如果介质对连续谱是光学薄的，$\tau_L \ll 1$，将其近似为0。 假设介质处于局域热动平衡，$j_L/\kappa_L = B_L(T)$，上式可以近似为

$$I_L - I_c = I_0(1 - e^{\tau_L}) + B_L(T)(1 - e^{\tau_L}) - \tilde{I}_c(1 - e^{-\tilde{\tau}_L}), \tag{4.6}$$

其中$\tilde{I}_c \equiv \int_0^s j_c ds'$，

$$e^{-\tilde{\tau}_L} \equiv \frac{\int_0^s j_c e^{-\tau_L(s')} ds'}{\int_0^s j_c ds'}. \tag{4.7}$$

注意到τ_L和$\tilde{\tau}_L$同量级，因而可以得出结论：当

$$B_L(T) > I_0 + \tilde{I}_c \tag{4.8}$$

时，$I_L - I_c > 0$，谱线是发射线。反之则是吸收线。由连续谱区辐射转移方程的形式解方程 4.4， $I_c \simeq I_0 + \tilde{I}_c$。所上面的判据变为

$$B_L(T) > I_c. \tag{4.9}$$

也就是，对于处于局域热动平衡的介质，如果在连续谱区是光学薄的，并且线心的普朗克函数值超过附近连续谱的辐射强度，那么介质产生发射线。反之产生吸收线。

用亮温度表示，产生发射线的判据可以表示为

$$T_L > T_c, \tag{4.10}$$

而相应地，产生吸收线的判据为

$$T_L < T_c. \tag{4.11}$$

4.2 Sobolev近似－－逃逸几率法

4.2.1 均匀发光球

在一个均匀发光球表面的一点，出射方向θ的辐射强度为

$$I(\theta) = \int_0^{\tau_\theta} j e^{-\tau'} ds = \frac{j}{\kappa}(1 - e^{-2\tau\cos(\theta)}), \tag{4.12}$$

其中$\tau' = \kappa s'$是路径长度s'处的光深，$\tau = \kappa r$是从球心到表面的光深，r是球的半径。辐射通量

$$\begin{aligned} \pi F &= 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\pi j}{2\kappa\tau^2}[2\tau^2 - 1 + (2\tau + 1)e^{-2\tau}]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

若球完全透明，辐射通量为

$$\pi F_0 = \frac{4\pi j \frac{4\pi}{3} r^3}{4\pi r^2} = \frac{4\pi}{3} jr. \tag{4.14}$$

于是光子的逃逸几率为

$$P_{esc} = \frac{\pi F}{\pi F_0} = \frac{3}{4\tau}\left[1 - \frac{1}{2\tau^2} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\tau^2}\right) e^{-2\tau}\right] \tag{4.15}$$

4.2.2 均匀平行平面

用类似的方法处理均匀平行平面。在均匀平行平面表面的一点，出射方向θ的辐射强度为

$$I(\theta) = \int_0^{\tau_\theta} j e^{-\tau'} ds = \frac{j}{\kappa}(1 - e^{-\tau/\cos\theta}), \tag{4.16}$$

其中$\tau' = \kappa s'$是路径长度s'处的光深，$\tau = \kappa L$是沿垂直平面方向从平行平面一边到另一边的光深，L是平行平面的厚度。辐射通量

$$\begin{aligned} \pi F &= 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi j \tau^2}{\kappa}\left[\int_0^{1/\tau}(1 - e^{-1/x})xdx\right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中做了变量代换$x = \cos\theta/\tau$。若平行平面完全透明，则辐射通量为

$$\pi F_0 = \lim_{S\to\infty} 4\pi j LS/2S = 2\pi j L. \tag{4.18}$$

所以光子的逃逸几率为

$$P_{esc} = \tau\left[\int_0^{1/\tau}(1 - e^{-1/x})xdx\right]. \tag{4.19}$$

4.2.3 大速度梯度（LVG）近似

通常分子云的线宽都远大于热展宽，其中有可能有大尺度运动，而且速度梯度很大，以至于从一个地方发出的光子只能被近似局域的介质吸收。而未被吸收的光子可以直接离开分子云。假设谱线形状为$\phi(x)$，满足归一化条件

$$\int \phi(x')dx' = 1, \tag{4.20}$$

其中$x' = \nu - \nu_0 + \frac{\nu_0}{c}\frac{dv_s}{ds}\frac{s}{c}$，$\nu$是频率，$\nu_0$是谱线的中心频率，$\frac{dv_s}{ds}$是分子云的速度梯度。对整个谱线形状和所有角度平均的逃逸几率为

$$P_{esc} = \frac{1}{4\pi}\int dx \int_{4\pi} d\Omega\phi(x')\exp[-\tau(x,\mu)], \tag{4.21}$$

其中$\mu = \cos\theta$，光深

$$\tau(x,\mu) = \kappa_0(\mu)\frac{c}{(dv_s/ds)\nu_0}\int \phi(x')dx'. \tag{4.22}$$

令$y = \int \phi(x')dx'$，将变量x变换为y，注意到$\tau(y,\mu) \propto y$逃逸几率可以写为

$$
\begin{aligned}
P_{esc} &= \frac{1}{4\pi} \int \int \exp[-\tau(x,\mu)] dy d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1-\exp(-\tau(\mu))}{\tau(\mu)} d\mu
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

注意到$\tau \propto 1/\mu^2$，近似用1/3代替μ^2，逃逸几率变为

$$
P_{esc} = \frac{1-\exp(-3\tau)}{2\tau}. \tag{4.24}
$$

考虑上下能级粒子的动态平衡

$$
n_l(C_{lu} + B_{lu} I) = n_u(A_{ul} + B_{ul} I + C_{ul}), \tag{4.25}
$$

注意到

$$
\frac{C_{lu}}{C_{ul}} = \frac{g_u}{g_l} e^{T_0/T_k} \tag{4.26}
$$

和

$$
\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} e^{T_0/T_{ex}}, \tag{4.27}
$$

其中$T_0 \equiv h\nu_0/k$，T_k和T_{ex}分别是动力学温度和激发温度。注意到$n_u(A_{ul} + B_{ul} I) - n_l B_{lu} I$正是离开介质的光子数$n_u A_{ul} P_{esc}$，于是有

$$
n_l C_{lu} = n_u(A_{ul} P_{esc} + C_{ul}), \tag{4.28}
$$

将方程 4.26和4.27带入上式整理得

$$
\exp\left(\frac{T_0}{T_{ex}} - \frac{T_0}{T_k}\right) = 1 + \frac{A_{ul}}{C_{ul}} \tag{4.29}
$$

最终可以得到激发温度的表达式

$$
\frac{T_{ex}}{T_0} = \frac{T_k/T_0}{1 + T_k/T_0 \ln\left[1 + \frac{A_{ul}}{3C_{ul}\tau}(1-\exp(-3\tau))\right]}. \tag{4.30}
$$

注意到这个表达式中激发温度的计算至依赖于局域量，这就将问题极大地简化了。