从两个游戏谈信息量

我给你一张表（附表 2），它在我国人口中最多的姓中列举了前 32 个姓。作为一个游戏，你能在表中找出一个姓，并告诉我所在的列。我就可以告诉你，你所找的是什么姓。例如你告诉我，所找的姓在第 1、3、5 列，我就会马上告诉你，这个姓是梁。

这是什么道理呢。你仔细注意表 1，就会明白。原来把所说的 32 个性，排列一个顺序。然后把序号都换成二进制。例如把 3 换成 00011，把 21 换成 10101 等等。表 1，就是把二进制列在第一列，把十进制列在第二列，第三列则列出对应的姓。我给你看的表 2，它是按表 1 的二进制制成的。32 在二进制上一共需要 5 位数，那么表 2，就设定为 5 列。例如张姓的二进制是 00011，在表 2 的第四、五两列就填上张。梁性的二进制是 10101，就在表 2 的第一、三、五列填上梁。依此类推。

现在，我只给你表 2，而表 1 拿在我手上。你所找的姓的列数，正好对应于我手上表 1 的二进制数。我在表 1 上一看就会立马告诉你找的是什么姓了。

经过这样一解释，这个游戏只不过是把普通的序数用二进制表示罢了，实在一点神秘都没有。

明白了这个游戏的道理。其实，猜的对象不一定是姓，也可以是任何事物。其数量也不一定限于 32，可以任意多，只不过第二张表的列数，应当满足二进制数位的要求。例如如果有 1024 个对象，第二张表就应当有 10 列等等。

附表 1

二进制序号	十进制序号	姓
00001	1	李
00010	2	王
00011	3	张
00100	4	刘
00101	5	陈
00110	6	杨

00111	7	赵
01000	8	黄
01001	9	周
01010	10	吴
01011	11	徐
01100	12	孙
01101	13	胡
01110	14	朱
01111	15	高
10000	16	林
10001	17	何
10010	18	郭
10011	19	马
10100	20	罗
10101	21	梁
10110	22	宋
10111	23	郑
11000	24	谢
11001	25	韩
11010	26	唐
11011	27	冯
11100	28	于
11101	29	董
11110	30	萧
11111	31	程
00000	32	曹

附表 2

1	2	3	4	5
林	黄	刘	王	李
何	周	陈	张	张
郭	吴	杨	杨	陈
马	徐	赵	赵	赵
罗	孙	孙	吴	周
梁	胡	胡	徐	徐
宋	朱	朱	朱	胡
郑	高	高	高	高
谢	谢	罗	郭	何
韩	韩	梁	马	马
唐	唐	宋	宋	梁
冯	冯	郑	郑	郑
于	于	于	唐	韩
董	董	董	冯	冯
萧	萧	萧	萧	董
程	程	程	程	程

还有一个游戏，也是和二进制有关的，也称为“点头”或“摇头”游戏。现在设有甲乙两个人参加游戏，游戏要求甲在乙所熟悉的事物中，指定一样，并且把它写在一张纸上不告诉乙，要求乙向甲提问，而甲只能用“是”或“否”即“点头”或“摇头”来回答，允许乙向甲提问 64 次后，乙能够猜出来就获得胜利。

这个游戏对于乙来说是具有挑战性的。它要考察乙提问的智慧。乍一看，对于乙来说，似乎是根本不可能的，因为乙所熟悉的事物有成千上万，而提问只有 64 次，实在有点难为他了。

其实，只要稍为分析，就知道要猜中还是不难的。我们用上面关于百家姓的游戏来说，设想甲在表 1 中的 32 个姓中 任意指定了一个，而乙手头又有一张表 2。这时，乙最优的提问策略就是按照表 2 的每一列来问，顺序问甲，这一列有吗，5 次问完，按照甲的回答，乙就可以唯一地确定甲所指定的姓了。

问 5 次能够“猜”中 32 个事物中的一个指定的事物，那末我们允许问 64 次，便一定能够在 2^{64}=18 446 744 073 709 551 616 个事物中“猜”中指定的事物。这是一个非常大的数。我们人类所熟悉的事物无论如何都不会比它多。由此乙如果提问提得巧妙，一般都是能够“猜”中的。唯一的窍门是每一次提问都能够使你需要猜的对象范围缩小大致一半。

可别小瞧这个“点头”“摇头”的游戏，它能够从方法论上启示我们，用把未知事物的范围划分为两半的方法是十分有效的方法。在计算机对未知对象搜索时采用的算法大多就是这个所谓的“二分法”。前面我们能够用 64 次是非之问从那个巨大数目的事物中找到所寻求的事物，足见它的效率之高。

为了使你对这个数字的大小有一个概念，要提起一个古老的印度故事。我们原原本本第把它复述在下面：

在印度有一个古老的传说：舍罕王打算奖赏国际象棋的发明人——宰相西萨·班·达依尔。国王问他想要什么，他对国王说：“陛下，请您在这张棋盘的第 1 个小格里，赏给我 1 粒麦子，在第 2 个小格里给 2 粒，第 3 小格给 4 粒，以后每一小格都比前一小格加一倍。请您把这样摆满棋盘上所有的 64 格的麦粒，都赏给您的仆人吧！”国王觉得这要求太容易满足了，就命令给他这些麦粒。当人们把一袋一袋的麦子搬来开始计数时，国王才发现：就是把

全印度甚至全世界的麦粒全拿来，也满足不了那位宰相的要求。　　那么，宰相要求得到的麦粒到底有多少呢?总数为：

1 + 2 + 4+ 8 + ……… + 2 的 63 次方 = 2 的 64 次方-1

第 第 第 第　　第

一 二 三 四 ……64

格 格 格 格　　格

= 18446744073709551615(粒)

人们估计，全世界两千年也难以生产这么多麦子!

与这十分相似的，还有另一个印度的古老传说：在世界中心贝拿勒斯(在印度北部)的圣庙里，一块黄铜板上插着三根宝石针。印度教的主神梵天在创造世界的时候，在其中一根针上从下到上地穿好了由大到小的 64 片金片，这就是所谓梵塔。不论白天黑夜，总有一个僧侣在按照下面的法则移动这些金片：一次只移动一片，不管在哪根针上，小片必须在大片上面。当所有的金片都从梵天穿好的那根针上移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，梵塔、庙宇和众生都将同归于尽。

不管这个传说是否可信，如果考虑一下把 64 片金片，由一根针上移到另一根针上，并且始终保持上小下大的顺序，一共需要移动多少次，那么，不难发现，不管把哪一片移到另一根针上，移动的次数都要比移动上面一片增加一倍。这样，移动第 1 片只需 1 次，第 2 片则需 2 次，第 3 片需 4 次，第 64 片需 2 的 63 次方次。全部次数为：18446744073709551615 次这和“麦粒问题”的计算结果是完全相同的!假如每秒钟移动一次，共需要多长时间呢?一年大约有 31556926 秒，计算表明，移完这些金片需要 5800 多亿年!

现在回过头来再讨论我们的“点头”“摇头”游戏。甲给了一个事物的集合，例如指定了 N=18 446 744 073 709 551 616 个事物中的某一件事物，这表示告诉你的信息很大，意思是，你要问 64 次才能够得到的信息。这个量用 $\ln_2 N$ =64，就表示他告诉你的信息量。对

于一定的消息，衡量他的信息量的大小，就是这样来定义的。如果在 32 个姓中，告诉你某一个姓，如上，它的信息量是 $\ln_2 32 = 5$，它的信息量比前一个要小多了。

有了以上的讨论，我们来举一个实际的例子：设象棋运动员参加某次比赛得冠军的可能性是 0.1，比赛后她确实得了冠军，在这个消息中，你得到的信息量是多少。

仙侬像

我们知道，她得冠军的可能性等于 0.1，可以解释为在 10 件事物中给定一件的信息，所以这个消息的信息量为 $\ln_2 10 = 3.32$。

一旦引进了信息量，信息之间便可以比较，从而可以选择最优的通讯方式。这就是信息论的主要内容。

历史上首先对信息来度量的是美国数学家仙侬（Claude Elwood Shannon ， 1916 － 2001)，他在 1948 年发表的论文《通讯的数学理论》（The Mathematical Theory of Communication），这篇论文奠定了一门新学科的理论基础，即信息论。它为后来度量通讯和提高通讯效率从理论上给出了论证。后来的发展，信息论不仅与通讯工程有关，而且对理论物理、控制理论、生命现象、计算机科学等许多领域都有重要的推动。