层次分析方法

倪致祥主讲

层次分析法是一种多准则思维的方法，它将定性分析和定量分析相结合，把人们的思维过程层次化和数量化，在目标结构复杂且缺乏必要的数据情况下尤为实用。自 70 年代美国运筹学家 Saaty T.L.提出以来，此方法在实际应用中发展很快。

过去的物理是建立在纯化的实验和理想化的模型的基础上，去分析和探索物质世界最基本的规律。现代物理则开始呈现出一种研究复杂性现象的趋势，除了把物理知识应用到其它更复杂的科学领域，建立象量子化学、生物物理、量子生物学等交叉学科之外，在物理领域的本身也一反过去研究理想模型的惯例，开始向非理想、不规则的复杂现象进军。非晶态、无序、混沌、多体等问题正在吸引许多物理学家的注意。对这些复杂问题，传统的纯定量分析方法越来越变得软弱无力，需要借助于定性分析的方法来整体考虑。因此，层次分析方法也许会给我们提供帮助。

问题 1

某工厂在扩大企业自主权后，厂领导正在考虑如何合理地使用企业留成的利润。在决策时需要考虑的因素主要有

(1) 调动职工劳动生产积极性；

(2) 提高职工文化水平；

(3) 改善职工物质文化生活状况。

请你对这些因素的重要性进行排序，以供厂领导作参考。

分析和试探求解

这个问题涉及到多个因素的综合比较。由于不存在定量的指标，单凭个人的主观判断虽然可以比较两个因素的相对优劣，但往往很难给出一个比较客观的多因素优劣次序。为了解决这个问题，我们能不能把复杂的多因素综合比较问题转化为简单的两因素相对比较问题呢？运筹学家想出了一个好办法：首先找出所有两两比较的结果，并且把它们定量化；然后再运用适当的数学方法从所有两两相对比较的结果之中求出多因素综合比较的结果。具体操作过程如下：

1) 进行两两相对比较，并把比较的结果定量化。

首先我们把各个因素标记为 B_1：调动职工劳动生产积极性；B_2：提高职工文化水平；B_3：改善职工物质文化生活状况。根据心理学的研究，在进行定性的成对比较时，人们头脑中通常有 5 种明显的等级：相同、稍强、强、明显强、绝对强。因此我们可以按照下表用 1～

9 尺度来定量化。

定性结果	定量结果
B_i 与 B_j 的影响相同	$B_i : B_j = 1:1$
B_i 比 B_j 的影响稍强	$B_i : B_j = 3:1$
B_i 比 B_j 的影响强	$B_i : B_j = 5:1$
B_i 比 B_j 的影响明显强	$B_i : B_j = 7:1$
B_i 比 B_j 的影响绝对强	$B_i : B_j = 9:1$
B_i 与 B_j 的影响在上述两个等级之间	$B_i : B_j = 2,4,6,8:1$
B_i 与 B_j 的影响和上述情况相反	$B_i : B_j = 1:1,2,\cdots,9$

假定各因素重要性之间的相对关系为：B_2 比 B_1 的影响强，B_3 比 B_1 的影响稍强，B_2 比 B_3 的影响稍强，则两两相对比较的定量结果如下：

$$\begin{array}{lll} B_1:B_1=1:1; & B_1:B_2=1:5; & B_1:B_3=1:3 \\ B_2:B_1=5:1; & B_2:B_2=1:1; & B_2:B_3=3:1 \\ B_3:B_1=3:1; & B_3:B_2=1:3; & B_3:B_3=1:1 \end{array}$$

为了便于数学处理，我们通常把上面的结果写成如下矩阵形式，称为成对比较矩阵。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

2) 综合排序

为了进行合理的综合排序，我们把各因素的重要性与物体的重量进行类比。设有 n 件物体：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，它们的重量分别为：$w_1, w_2, \cdots, w_n$。若将它们两两相互比较重量，其比值(相对重量)可构成一个 $n \times n$ 成对比较矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

经过仔细观察，我们发现成对比较矩阵的各行之和恰好与重量向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 成正比，即

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \propto \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \tag{3}$$

根据类比性，我们猜想因素的重要性向量与成对比较矩阵(1)之间也有同样的关系存在。由此，我们可以得到因素的重要性向量为

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/15 \\ 9 \\ 13/3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

为了使用方便，我们可以适当地选择比例因子，使得各因素重要性的数值之和为 1 (这个过程称为归一化，归一化后因素重要性的数值称为权重，重要性向量称为权重向量) ，这样就得到一个权重向量

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.103 \\ 0.606 \\ 0.291 \end{pmatrix} \tag{5}$$

上式中元素的权重大小给出了各因素重要性的综合排序。

对(2)式的进一步分析还可以发现

$$AW = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix} = nW \tag{6}$$

这说明 W 还是成对比较矩阵 A 的特征向量，对应的特征值为 n，理论上已严格地证明了 n 是 A 的唯一最大特征值。按类比法，我们也可以用求解特征方程的办法来得到重要性向量。与(1)式对应的特征方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

由此可以解出其最大特征值为 n'=3.038，对应的特征向量为：

$$W' = (0.105, 0.537, 0.258)^T \tag{8}$$

矛盾和原因

同一个问题，相似的方法，为什么(5)与(8)两个结果不一致（尽管不影响排序）？现在

我们来分析一下其中的原因。对于由重量比值构成的成对比较矩阵(2)，不难证明它具有性质 1) 唯一性 $a_{i,i} = 1$；2) 互反性 $a_{i,j} = 1/ a_{j,i}$；3) 一致性 $a_{i,j}\, a_{j,k} = a_{i,k}$。然而，重要性是由人来判断的，由于人对复杂事物采用两两比较的方法获得的重要性比值不可能做到完全一致，往往存在估计误差，因此所得的成对比较矩阵只具有性质 1)和 2)，一般不具有性质 3)。比如说对于成对比较矩阵(1)，就有

$$a_{2,1} = 5, a_{2,3} = 3, a_{3,1} = 3; \quad a_{2,1} \neq a_{2,3} \cdot a_{3,1}$$

一致性的缺少是造成两种类比方法结果不同的原因。利用最小二乘法可以证明：用求解特征方程得到的权重向量平均误差较小。因此我们最好采用这个方法来求解权重向量。

一致性检验

既然存在误差，我们就需要知道误差的程度到底有多大？会不会影响综合排序的结果？理论上已经证明：对于具有一致性的成对比较矩阵，最大特征值为 n；反之如果一个成对比较矩阵的最大特征值为 n，则一定具有一致性。估计误差的存在破坏了一致性，必然导致特征向量及特征值也有偏差。我们用 n'表示带有偏差的最大特征值，则 n'与 n 之差的大小反映了不一致的程度。考虑到因素个数的影响，Saaty 将

$$CI = \frac{n' - n}{n - 1} \tag{9}$$

定义为一致性指标。当 $CI = 0$ 时，成对比较矩阵 A 矩阵完全一致，否则就存在不一致；CI 越大，不一致程度越大。为了确定不一致程度的允许范围，Saaty 又定义了一个一致性比率 CR，当

$$CR = CI / RI < 0.1 \tag{10}$$

时，认为其不一致性可以被接受，不会影响排序的定性结果。(10)式中 RI 值如下表所示

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.96	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

应用上面的结果，我们可以算出成对比较矩阵(1)有

$$CI = 0.019,\quad CR = 0.033 \tag{11}$$

因此其不一致性可以被接受。

问题 2

某工厂在扩大企业自主权后，厂领导正在考虑如何合理地使用企业留成的利润。可供选择的方案有：I、发奖金；II、扩建食堂、托儿所；III、开办职工技校；IV、建图书馆；V、引进新技术。在决策时需要考虑到调动职工劳动生产积极性，提高职工文化水平和改善职工物质文化生活状况等三个方面。请你对这些方案的优劣性进排序，以便厂领导作决策。

解答

划分层次

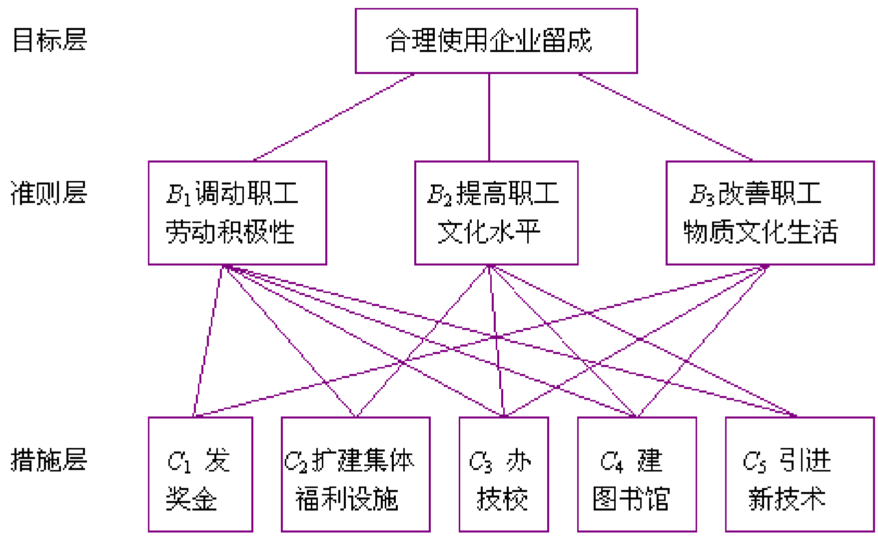
显然这是一个多目标的决策，问题涉及到许多因素，各种因素的作用相互交叉，情况比较复杂。要处理这类复杂的决策问题，首先需要对问题所涉及的因素进行分析：哪些是要相互比较的；哪些是相互影响的。把那些要相互比较的因素归成同一类，构造出一个各因素类之间相互联结的层次结构模型。各因素类的层次级别由其与目标的关系而定。在上述问题中，因素可以分为三类：

第一是目标类，即合理地使用今年企业留利××万元；

第二是准则类，这是衡量目标能否实现的标准，如调动职工劳动积极性、提高企业的生产技术水平等等；

第三是措施类，指实现目标的方案、方法、手段等等。

按目标到措施自上而下地将各类因素之间的直接影响关系分不同层次排列出来，可以构成一个直观的层次结构图。如下图所示：



每一层中的各因素对上一层因素的相对重要性可以用问题 1 中的方法确定，由层次关系可以计算出措施层各方案最高层的相对权重，从而给出各方案的优劣次序。

层次单排序

不同准则对目标的影响已经在问题 1 中得到了解决，现假定不同措施对各准则的影响如下：

1．不同措施对调动职工劳动生产积极性影响的成对比较矩阵

$$\begin{array}{c|c} B_1 & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 2 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{12}$$

其权重向量为：$W_1 = (0.491, 0.232, 0.092, 0.138, 0.046)^T$

2．不同措施对提高职工文化水平影响的成对比较矩阵

$$\begin{array}{c|c} B_2 & \begin{array}{cccc} C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 & 1/5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 5 & 1/3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{13}$$

其中措施 I（发奖金）对提高职工文化水平没有什么影响，在成对比较矩阵中不出现，重要性按零计算。其权重向量为：$W_2 = (\quad 0 \quad, 0.055, 0.564, 0.118, 0.263)^T$

3．不同措施对改善职工物质文化生活状况影响的成对比较矩阵

$$\begin{array}{c|c} B_3 & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{14}$$

其权重向量为：$W_3 = (0.406, 0.406, 0.094, 0.094, \quad 0 \quad)^T$

总排序

上述过程中求出的是同一层次中相应元素对于上一层次中的某个因素相对重要性的排序权值，这称为层次单排序。若模型由多层次构成，计算同一层次所有因素对于总目标相对重要性的排序称为总排序。这一过程是由最高层到最低层逐层进行的。设上一层次 A 包含 m 个因素 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，其总排序的权重值分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$；下一层次 B 包含 k 个因素 $B_1, B_2, \cdots, B_k$, , 它们对于 A_j 的层次单排序的权重值分别为 $b_{1,j}, b_{2,j}, \cdots, b_{k,j}$ (当 B_i 与 A_j 无联系时，$b_{i,j} = 0$)；此时 B 层 i 元素在总排序中的权重值可以由上一层次总排序的权重值与本层次的层次单排序的权重值复合而成，结果为：

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} b_{i,j}\, a_j \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{15}$$

由此，各个方案相对于目标层的总排序可以用下表计算

C 层对 B 层的相对权值	B_1 0.105	B_2 0.637	B_3 0.258	C 层总排序
C_1	0.491	0	0.406	0.157
C_2	0.232	0.055	0.406	0.164
C_3	0.092	0.564	0.094	0.393
C_4	0.138	0.118	0.094	0.113
C_5	0.046	0.263	0	0.172

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 0.491 & 0.000 & 0.406 \\ 0.232 & 0.055 & 0.406 \\ 0.092 & 0.564 & 0.094 \\ 0.138 & 0.118 & 0.094 \\ 0.046 & 0.263 & 0.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.105 \\ 0.637 \\ 0.258 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.157 \\ 0.146 \\ 0.393 \\ 0.113 \\ 0.172 \end{pmatrix} \tag{16}$$

上式给出了 5 种措施对实现目标的权重向量，根据这个权重向量，我们可以看出措施（方案）III 对实现目标的作用最大，因此是最佳方案。

结束语

上面给出的是一个典型的例子，由此不难看出层次分析方法在解决复杂问题中的作用。听课是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。希望同学们能够仿照上面的典型例子，应用层次分析方法来解决一两个身边的实际问题。