

1 介绍

这次讲座的内容是介绍非相互作用的BEC理论。

地位：定性正确。原因是实验上用的是稀薄气体实现的BEC，经典相互作用很小，因此非相互作用理论大体上正确。

回顾：为什么要用稀薄气体实现BEC？

BEC是温度低到一定程度时，有大量粒子掉落到基态，此时它们的波函数开始相互叠加，量子效应开始凸显；与此同时，随着粒子能量降低，经典相互作用也开始其作用，于是这里就产生一个竞争机制——随着温度降低是经典相变先发还是量子相变先发生。显然在密度比较大的情况下，经典相互作用足够强，则经典相变先发生，如液化，固化，成键等。而像He原子这种弱经典相互作用的物质，在一般条件下两种相变同时发生，如超流现象。

问题是如何才能使得量子相变先发生呢，或者如何使得经典相互作用足够的小呢？显然的做法是把气体密度降到很低水平。这也是BEC必须在稀薄气体中才能形成的原因。

2 非相互作用Bose气

所谓非相互作用是指完全不考虑粒子间相互作用，虽然结果不会特别准确但是会给出BEC的绝大部分性质，并且定性甚至定量准确。

3 准备1——Bose分布

自然界只存在两种粒子——Bose子和Fermi子，他们分别满足Bose分布和Fermi分布

Bose子：一个状态上的最大占有数没有限制，全同性。

Bose分布——一个由Bose子（不论有无相互作用），在态 ε_k 上的平均占有数为（这个结果是一个推到出来的结果）

$$f_0(\varepsilon) = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}} - 1} \quad (1)$$

μ 的取值范围：物理要求（平均占有数是正实数）分母上的 e 指数应该大于1，这就要求 $\varepsilon_k - \mu > 0$ ——每个能级的能量都大于化学势，所以化学势小于基态能量。如果基态能量 $\varepsilon_0 = 0$ ，化学势应该满足 $\mu < 0$ 。

低温激发态：因子 $1/kT$ 会使分母快速发散，因此在低温下，激发态上的粒子很少。

低温基态：如果温度低到一定程度， $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ ，此时体系基态粒子数将变得很大，甚至发散，形成BEC。

Remark 1 巨正则系综的恰当性。系综理论本质是一种计算方法，所计算的体系并非真的与模型相符。巨正则系综也可以用于计算一个粒子数相当稳定的体系。这在化学势的讨论班中有所阐述。

高温极限下，

$$\langle n_k \rangle = e^{-\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}}} \right) \rightarrow e^{-\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}} \quad (2)$$

还原成Boltzman分布。由于 $\mu \ll \varepsilon_0$ ，所以每个单粒子态的占有数都远小于1。随着温度的降低， $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ 占有数分布就会有很大变化。

4 准备2——Density of States

DOS的重要性是由一个技术细节决定的。

DOS定义：又称为能态密度。设在能量区间 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon$ 内有 $d\nu$ 个状态，则DOS定义为 $g(\varepsilon) d\varepsilon = d\nu$ ，它反映了状态数随能级的分布。

之所以需要用到这个量是因为用统计方法得到多体系统的整体性质时经常会遇到如下计算

$$\sum_{\alpha} F = \sum_{\sigma, k} F = \frac{N_0}{V} \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} F(k) = \frac{N_0}{V} \sum_{\sigma} \int F(\varepsilon) g_{\sigma}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3)$$

注意到求和是对的状态求和，直接转化为积分后需要考虑动量空间的结构，这是很复杂的工作，而有了能谱以后就可以把对动量积分转化成对能量积分（标量积分，简单），因而DOS就是用来联系这两种积分的工具。

Remark 2 必须指出的是求和变积分是一个近似方案，上述公式中的等号除了第一个之外都是近似成立的。另外态密度的引入并没有在本质上降低计算的难度，只是在操作上的简化。

4.1 给能谱求DOS

原则上给了能量关系（能谱，色散关系）就能求出一个态密度，固体物理中的一个较为标准的办法是

$$g = \sigma \int \frac{dS}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\partial E(\mathbf{k})/\partial \mathbf{k}|} = \sigma \int \frac{dS}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar |\mathbf{v}(\mathbf{k})|} \quad (4)$$

一般来说给出一个能谱，能求出态密度，并求出其热力学，在此不赘述。下面的两个例子是关注的重点。

4.2 例1：三维自由粒子的DOS

(1) 计算 p 以下的总的状态。具有动量 p 的粒子在相空间的运动在球面上，所以 p 以下总的状态数为

$$G = \frac{\int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p}}{h^3} = V \frac{4\pi}{3} p^3 \frac{1}{h^3} \quad (5)$$

其中 V 是箱归一化的体积。代入能动关系 $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ 得到

$$G(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{3h^3} (2m\varepsilon)^{3/2} \quad (6)$$

(2) 态密度。在 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon$ 内的状态数除以 $d\varepsilon$ 称为态密度，于是

$$g(\varepsilon) = \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (7)$$

这个结论可以推广到 d 维—— d 维自由粒子的态密度

$$g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{d}{2}-1} \quad (8)$$

4.3 例2：三维各向异性振子的DOS

实验上观测到的BEC都是在囚禁的场中观测到的。束缚在腔中的BEC技术远未达到（由于气体原子会被腔壁表面俘获）

模型：各向异性振子，势能

$$U = \frac{1}{2} (K_x x^2 + K_y y^2 + K_z z^2) \quad (9)$$

$$= \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (10)$$

其中 $\omega_i^2 \equiv K_i/m$ 。根据量子力学，振子的能谱为

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \quad (11)$$

下面计算DOS

(1) 计算 ε 以下总的状态数 $G(\varepsilon)$ 。

简化1：略去零点能。

简化2：把 n_i 视作连续变量。积分对第一象限被平面 $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 围成的体积所进行

$$G(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon_x}{\hbar\omega_x} \int_0^{\varepsilon-\varepsilon_x} \frac{d\varepsilon_y}{\hbar\omega_y} \int_0^{\varepsilon-\varepsilon_x-\varepsilon_y} \frac{d\varepsilon_z}{\hbar\omega_z} = \frac{\varepsilon^3}{6\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \quad (12)$$

(2) DOS为

$$g(\varepsilon) = \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \quad (13)$$

对于 d 维各向异性振子，可以普遍的给出DOS表达式

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_i \hbar\omega_i} \quad (14)$$

鉴于自由粒子和振子DOS在形式上的类似性，很多文献都将DOS统一记为

$$g(\varepsilon) = C_\alpha \varepsilon^{\alpha-1} \quad (15)$$

Remark 3 振子的能级性质良好，呈等差数列，其指数是等比数列。因此似乎不必求和变积分就可以直接计算热力学（简并度不是很好处理）。

5 BEC的一些特征量和性质

5.1 凝聚温度

这一节取近似 $\varepsilon_{\min} = 0$ （不考虑零点能），并不考虑内部自由度（自旋）。激发态的总粒子数可以用如下方式计算

$$N_{\text{ex}} = \int_0^{\infty} f_0(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (16)$$

当 $N = N_{\text{ex}}$ 时，在 $\mu = \varepsilon_{\min} = 0$ ，此时 $T = T_C$ 即

$$N = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta_C \varepsilon} - 1} d\varepsilon \quad (17)$$

其中 $\beta_C = 1/kT_C$ 。引入新变量 $x \equiv \varepsilon/kT_C$

$$N = (kT_C)^\alpha C_\alpha \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx \quad (18)$$

$$= (kT_C)^\alpha C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \quad (19)$$

证明：可以利用 Γ 函数和 ζ 函数的定义

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx; \quad \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-2x} dx + \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-3x} dx + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

对 $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-mx} dx$ 做变量代换

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-mx} dx = \left(\frac{1}{m}\right)^\alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \left(\frac{1}{m}\right)^\alpha \Gamma(\alpha) \quad (22)$$

于是

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \quad (23)$$

证毕。

于是给出的凝聚温度为

$$kT_C = \left(\frac{N}{C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)} \right)^{1/\alpha} \quad (24)$$

虽然转变温度可以写成统一的形式，但事实上不同系统的转变温度是不可比的。

例一：三维振子， $\alpha = 3, C_3 = 1/(2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z)$

$$(kT_C)_{3DH} = \frac{N^{1/3}}{(\Gamma(3) \zeta(3))^{1/3}} (2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \quad (25)$$

例二：三维盒子， $\alpha = 3/2, C_{3/2} = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2}$

$$(kT_C)_{3DB} = \frac{N^{2/3}}{(\Gamma(3/2) \zeta(3/2))^{2/3}} 2m \left(\frac{h^3}{2\pi V} \right)^{2/3} \quad (26)$$

Remark 4 二维自由粒子的凝聚温度为绝对零度（因为 $\zeta(1) = \infty$ ），换句话说在有限温度不凝聚，但是二维谐振子却可以凝聚。

5.2 凝聚分数（凝聚粒子所占的比例）

这一节计算凝聚粒子占总粒子数的比例。在 $T < T_C$ 时， $\mu = \varepsilon_{\min} = 0$ ，于是激发态原子个数为

$$N_{\text{ex}} = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta_C \varepsilon} - 1} d\varepsilon = (kT)^\alpha C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) = N \left(\frac{T}{T_C} \right)^\alpha \quad (27)$$

基态粒子数

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^\alpha \right) \quad (28)$$

$$N_0^{3DB} = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \right) \quad (29)$$

$$N_0^{3DH} = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3 \right) \quad (30)$$

通过画图比较可知，这两种情况对比发现振子的凝聚效率更高。

6 凝聚体的性质和特点

6.1 BEC的测量

实验上唯一能够精确测量的就是密度分布（Density Profile 密度剖面图）。测量密度分布有两种方法

(1) 吸收成像法。利用原子本身对电磁波的共振吸收，通过吸收强度就可测定密度分布

空间分辨率可以通过关闭囚禁磁场让其自由扩散达到。

缺点：破坏性测量，对研究体系随时间的演化不方便。

(2) Phase-Contrast Imaging, 相差成像法。

密度决定折射率，密度不同，折射率就不同，所以用一束光的分光照射样品再与未照射光束进行干涉再反算出密度分布。这种方法优点是非破坏性，可以测量系统随时间的演化。

空间分辨率可以由撤去囚禁外场后的演化得以增强。

6.2 BEC密度的性质

这一节计算BEC，经典气体，激发态的空间分布的对比。

6.2.1 凝聚体的空间分布

体系的所有粒子处在单粒子基态，于是体系的粒子数密度为

$$n(\mathbf{r}) = N |\psi_0(\mathbf{r})|^2$$

取振子基态

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4} (a_x a_y a_z)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2a_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2a_y^2}} e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}}$$

其中宽度 $a_i^2 = \hbar/m\omega_i$ 与温度无关。所以密度分布由于外场的存在是各向异性的。外场频率越低，分布的宽度越大。这个分布与近经典密度分布有很大不同，经典统计下，密度分布正比于 $\exp[-V(\mathbf{r})/kT]$

$$n_{cl}(\mathbf{r}) = N \frac{\exp\left\{\frac{K+V}{kT}\right\}}{Z}$$

这个密度是空间坐标的函数，其对全空间积分应该等于总粒子数，而空间分布有势能 V 决定。所以不必计算可知

$$n_{cl}(\mathbf{r}) = \frac{N}{\pi^{3/2} R_x R_y R_z} e^{-\frac{x^2}{R_x^2}} e^{-\frac{y^2}{R_y^2}} e^{-\frac{z^2}{R_z^2}}$$

经典宽度：

$$R_i^2 = \frac{2kT}{m\omega_i^2}$$

可见该分布下，经典分布宽度是随着温度变化的，而BEC不变。

宽度对比：在一般的实验条件下，两种宽度的比值 $R_i/a_i = (2kT/\hbar\omega_i)^{1/2}$ 远大于1，因此凝聚体更为集中。

6.2.2 凝聚体动量空间分布

动量表象基态波函数可以由坐标表象做一个表象变换得到

$$\begin{aligned}\psi_0(\mathbf{p}) &= \sum_{\mathbf{r}} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\rangle \langle \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) | E_0 \rangle \\ &= \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{\pi^{3/4} (c_x c_y c_z)^{1/2}} e^{-\frac{p_x^2}{2c_x^2}} e^{-\frac{p_y^2}{2c_y^2}} e^{-\frac{p_z^2}{2c_z^2}}\end{aligned}$$

其中

$$c_i = \frac{\hbar}{a_i} = \sqrt{m\hbar\omega_i}$$

动量空间密度

$$n(\mathbf{p}) = N |\psi_0(\mathbf{p})|^2 = \frac{1}{\pi^{3/2} c_x c_y c_z} e^{-\frac{p_x^2}{c_x^2}} e^{-\frac{p_y^2}{c_y^2}} e^{-\frac{p_z^2}{c_z^2}}$$

可见空间分布的各向异性会导致动量（速度）的各向异性，且二者刚好呈反比——空间密度越宽，速度就越小。不出意外的发现两个分布宽度的乘积刚好满足不确定关系，即 $c_i a_i = \hbar$ 。对比Maxwell速率分布

$$f_M = C e^{-\frac{p_x^2}{2mkT}} e^{-\frac{p_y^2}{2mkT}} e^{-\frac{p_z^2}{2mkT}}$$

凝聚体的动量分类似各向异性的Maxwell分布（每个方向对应的温度不同）。M分布的宽度 $\sim (mkT)^{1/2}$ ，这个值与凝聚体宽度 $(m\hbar\omega_i)^{1/2}$ 之比等于 $(kT/\hbar\omega_i)^{1/2} \sim N^{1/6} \gg 1$ ，因此速度分布和密度分布比经典极限更宽，类型却类似。

6.2.3 激发态粒子数密度的空间分布——半经典近似

一团气体的空间密度分布可以这样计算

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} f_{\nu} |\psi_0(\mathbf{r})|^2$$

但是这个很难计算，所以想办法取近似。前面已经给出凝聚体的密度分布，这一节计算激发态密度分布的特点。

Remark 5 处在平衡态的很多粒子，那每个粒子一定处于能量本征态吗？

取如下近似进行计算

(1) 仍沿用量子统计

(2) 能量用经典能量代替。这是因为我们统计的范围波长总体来讲与外势的尺度相比是很小的，因此用经典力学可能是很好的近似。

于是空间密度为

$$\begin{aligned}n_{ex}(r) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{[\varepsilon_{\mathbf{p}}(r) - \mu]/kT} - 1} \\ &= \frac{g_{3/2}(z(\mathbf{r}))}{\lambda^3}\end{aligned}$$

其中 $g_n(z)$ 是玻色积分， $z(r) = \exp[(\mu - V(r))/kT]$ 是广义的逸度， $\varepsilon_{\mathbf{p}}(r) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ 。

Remark 6 关于这个近似的理解是，Bose统计是需要严格遵守的，但在激发态上能谱视作连续，因此用经典能-动量关系替代。

激发态粒子在准经典近似下分布与基态分布形式的区别很大，可以从书上的图中看出。

6.2.4 自由扩散

上面我们讨论了囚禁气体的密度特征，这节回答这些密度在撤去束缚后如何随时间演化

(1) 经典极限演化。初始分布

$$f_P(r,0) = e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon_P(r)/kT} \quad (31)$$

在撤去磁场后，粒子运动满足牛顿方程

$$\dot{r} = \frac{p}{m}; \dot{p} = 0 \quad (32)$$

于是时间 t 后达到分布

$$f_P(r,t) = e^{\mu/kT} \exp \left\{ \frac{-\left(\frac{p^2}{2m} + V(r-pt/m)\right)}{kT} \right\} \quad (33)$$

空间密度分布就可以对 p 积分得到

$$n(r) = \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^3} f_P(r,t) \quad (34)$$

这个积分可以算出来，结果是

$$n(r,t) = e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{1}{\lambda^3} \prod_i (1 + \omega_i^2 t^2)^{-1/2} \exp \left[\frac{-m\omega_i^2 r_i^2}{2kT(1 + \omega_i^2 t^2)} \right] \quad (35)$$

其中 $r_i = x, y, z$ 。在极限情况 $t \gg 1/\omega_i$

$$n(r,t) = e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{1}{\lambda^3} \prod_i \frac{1}{\omega_i t} \exp \left[\frac{-mr_i^2}{2kTt^2} \right] \quad (36)$$

这个分布宽度为 $(2kT/m)^{1/2} t$ ，是一个各向同性的Gauss分布。即随时间演化，经典气体初始的各向异性会变为各向同性。

(2) 基态（凝聚体）演化。根据Seq，在撤去外场后，振子基态随时间的演化（动表象）为

$$\psi(p,t) = \psi_0(p,0) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t}$$

表象变换

$$\psi(r,t) = \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{ip \cdot r}{\hbar}} \psi_0(p,0) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t}$$

这也是个Gauss型积分，积出来结果是

$$\psi(r,t) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \prod_j a_j^{-1/2} (1 + i\omega_j t)^{-1/2} \exp \left[\frac{-r_j^2}{2a_j^2 (1 + i\omega_j t)} \right]$$

基态的密度正比于 $|\psi(r,t)|^2$

$$|\psi(r,t)|^2 = \frac{1}{\pi^{3/4}} \prod_j \frac{a_j^{-1/2}}{\sqrt{1 + \omega_j^2 t^2}} \exp \left[\frac{-r_j^2}{a_j^2 (1 + \omega_j^2 t^2)} \right]$$

所以 $t=0$ 时候，各向异性分布， j 方向宽度 $a_j = (\hbar/m\omega_j)^{1/2}$ ，对于大 t ， j 方向宽度会演化为 $a_j \omega_j t = (\hbar\omega_j/m)^{1/2} t$ ，注意这两者的差别——初始时刻是一个雪茄形分布的BEC体的自由演化会变成一个饼。换句话说随着时间演化，凝聚体密度仍保持各向异性，而且会以一个奇妙的方式演化

7 热力学性质

7.1 凝聚相 ($T < T_C$)

内能

$$E = C_\alpha \int_0^\infty \varepsilon^{\alpha-1} d\varepsilon \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1) (kT)^{\alpha+1} \quad (37)$$

比热

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = (\alpha+1) \frac{E}{T} \quad (38)$$

因为

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} \Rightarrow S = \frac{C}{\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{E}{T} \quad (39)$$

Remark 7 这一结果非常有趣，因为熵，内能和比热与粒子数无关，（如果存在零点能这个结果是否还是正确呢？）

Remark 8 上面的热力学有赖于TL吗？如果是，请给出不依赖TL的版本。

利用上面的 T_C 表达式

$$kT_C = \left(\frac{N}{C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)} \right)^{1/\alpha} \Rightarrow C_\alpha = \frac{N}{(kT_C)^\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)} \quad (40)$$

于是能量写成

$$E = \alpha N k \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \frac{T^{\alpha+1}}{T_C^\alpha} \quad (41)$$

比热和熵

$$C = \alpha(\alpha + 1) N k \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \left(\frac{T}{T_C} \right)^\alpha \quad (42)$$

$$S = \frac{C}{\alpha} = (\alpha + 1) N k \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \left(\frac{T}{T_C} \right)^\alpha \quad (43)$$

Remark 9 至此的计算并没有取什么近似，因此计算出的结果是全范围适用的。注意表达式中的 N 是总粒子数而非基态粒子数。

下面对比经典极限结果，Boltzman统计

$$N_{cl} = C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} e^{(\mu-\varepsilon)}; E_{cl} = C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^\alpha e^{(\mu-\varepsilon)} \quad (44)$$

分部积分得到

$$E = \alpha N k T, \quad C = \alpha N k \quad (45)$$

可见近经典极限下比热不随 T 变化，而凝聚相的比热是随温度趋零的，并且在转变温度附近

$$\frac{C}{\alpha N k} \sim \begin{cases} 1 & \text{经典统计} \\ 1.28 & \text{盒子} \\ 3.60 & \text{振子} \end{cases}$$

性质有很大不同。

7.2 正常相 ($T > T_C$)

计算经典统计的修正，在低温下利用 $(e^x - 1)^{-1} \approx e^{-x} + e^{-2x}$ —— ($x \gg 1$)

$$N = C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \approx C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} \left(e^{\beta(\mu-\varepsilon)} + e^{2\beta(\mu-\varepsilon)} \right) \quad (46)$$

$$E = C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \approx C_\alpha \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^\alpha \left(e^{\beta(\mu-\varepsilon)} + e^{2\beta(\mu-\varepsilon)} \right) \quad (47)$$

这个表达式在低温更准确。下面通过 N 的表达式解出逸度 $z = e^{\beta\mu}$ 。利用分部积分

$$d(x^\alpha e^{-x}) = e^{-x} dx^\alpha + x^\alpha de^{-x}$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} e^{-\varepsilon\beta} = \frac{1}{\alpha\beta^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} e^{-2\varepsilon\beta} = \frac{1}{\alpha(2\beta)^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$$

$$N = C_\alpha e^{\beta\mu} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} e^{-\varepsilon\beta} + C_\alpha e^{2\beta\mu} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\alpha-1} e^{-2\varepsilon\beta} \quad (48)$$

$$= \frac{C_\alpha}{\alpha} \left(\frac{e^{\beta\mu}}{\beta^\alpha} + \frac{e^{2\beta\mu}}{(2\beta)^\alpha} \right) \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \quad (49)$$

$$z = e^{\mu\beta} = \frac{-2^\alpha + \sqrt{2^{2\alpha} + 4 \frac{\alpha(2\beta)^\alpha N}{C_\alpha \Gamma(\alpha+1)}}}{2}$$

再次利用 T_C 替代 N

$$N = (kT_C)^\alpha C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)$$

$$z = -2^{\alpha-1} + \sqrt{2^{2\alpha-2} + \zeta(\alpha) 2^\alpha \left(\frac{T_C}{T}\right)^\alpha}$$

代入 E 的表达式并展开，这个展开要求 T_C/T 是小量

$$E = C_\alpha \left(\frac{e^{\beta\mu}}{\beta^{\alpha+1}} + \frac{e^{2\beta\mu}}{(2\beta)^{\alpha+1}} \right) \int_0^\infty dx x^\alpha e^{-x} \quad (50)$$

$$= \alpha N k T \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{e^{\beta\mu}}{2^\alpha}}{1 + \frac{e^{\beta\mu}}{2^\alpha}} \right) \quad (51)$$

$$= \alpha N k T \left(1 - \frac{\zeta(\alpha)}{2^{\alpha+1}} \left(\frac{T_C}{T}\right)^\alpha \right) \quad (52)$$

比热

$$C = \alpha N k \left(1 - (\alpha-1) \frac{\zeta(\alpha)}{2^{\alpha+1}} \left(\frac{T_C}{T}\right)^\alpha \right) \quad (53)$$

Remark 10 这套计算用了两个展开，第一个要求 kT 与激发态能级相比是小量，第二个展开要求 $T > T_C$ 。因此这套计算的适用范围 T 略高于 T_C 。