专　论

从传统牛顿力学到当今猝变动力学

黄沛天，马善钧
(江西师范大学 物理与通信电子学院，江西 南昌　330027)

摘要：引入急动度和猝变动力学等新概念，用以充实大学物理教学内容，是一种正在形成的趋势. 本文提供了一个关于猝变动力学新概念教学的初步框架.

关键词：猝变动力学；急动度；史瓦兹定理；力变率，猝量；加速度能量；三阶拉格朗日方程
中图分类号：O 313　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0712(2006)01-0001-03

早在有关文献[1~3]相继向国人介绍急动度(或加加速度)概念之初，笔者就已开始在数学专业的普通物理教学中试讲了急动度概念[4]. 最近，《大学物理》杂志刊登了《关于加加速度的若干机械运动分析及 MATLAB 模拟》[5]一文，表明急动度概念已被国内更多的基础课教师所关注. 文献[6]也提供了一种关于急动度的教学实施方案. 不过，文献[5]、[6]都只是侧重于运动学方面的讨论，而本文主要侧重变加速运动的动力学描写等问题.

为了统一规范学术用语，我们先谈谈 jerk 的汉译名问题. 文献[1]曾经将 jerk 直译成"急动"，文献[2]考虑到"急动"容易误解为动词，于是添加了一个字，改为"急动度". 而文献[3]则率先使用了"加加速度"，随后文献[7]、[8]、[5]也跟着使用了"加加速度"的称谓. 但我们觉得，"急动度"比"加加速度"更简练. 当然，这里的 jerk 还只不过是位矢对时间的三阶微商，把它称做"加加速度"也许还说得过去，但如果出现位矢对时间的四阶微商(比如文献[5]提到"匀变加加速度直线运动"中的"j_1"实际上就是位矢对时间的四阶微商)，甚至还出现更高阶微商呢？若再使用"加加加速度"和"加加加加……速度"之类的称谓就显得十分累赘了. 正巧，文献[9]认为可以把位矢对时间的四阶微商称做 spasm(此外，它还列出了一些其他供选用的称谓)，这里是把 spasm 直译成"痉挛度"呢，还是译成"加加加速度"？无论是 jerk 还是 spasm，在未统一规范译名之前也只好任凭选择了，但统一规范译名仍是必要的.

1　急动度——从被人忽视到令人关注

如果说 1997 年以前的急动度概念还是一个不大被人过问的"灰姑娘"，那么，1997 年以后，由于它被视为用作研究混沌的一种新方法，从而摇身一变，犹如"白雪公主"一样引起了人们的关注[4,9~18].

长期以来，对于急动度的动力学思考，不仅一直较少有人过问，而且还存在一些误解. 比如文献[1]，虽然向人们介绍了急动度，但却认为"受一定力作用的物体，其基本动力学与 $\mathrm{d}^2 v/\mathrm{d}t^2$ 无关，也与任何更高阶的速度对时间的微商无关. 任何这种复杂性丝毫不出现，这本身就是一个值得注意的结果，就目前我们所知，即使在非常高速的'相对论'区域里，这结果也仍旧成立. "而实际情况并不像文献[1]所说的那样. 20 世纪初，人们发现带电粒子受其自身电磁辐射反作用的阻尼力就与 $\mathrm{d}^2 v/\mathrm{d}t^2$ 相关，把它补充到牛顿动力学基本方程中去，便得到著名的阿伯拉罕-洛伦兹运动方程[19]：

$$F_{外} = m(v - \tau v) \tag{1}$$

因此，怎么能说"受一定力作用的物体，其基本动力学与 $\mathrm{d}^2 v/\mathrm{d}t^2$ 无关"呢？又如，文献[9]也把一个特殊情况的杜芬方程

$$x + bx + kx^3 = A\sin \omega t \tag{2}$$

改写成一个四阶的自治常微分方程

$$x + bx + x + 3x^2 x + bx + 6xx^2 + x^3 = 0 \tag{3}$$

(注：文献[9]原文将式(3)中的 $6xx^2$ 项误写成 $6xx$) 显然，在式(3)中出现了四阶微商 x，也即速度对时间的"更高阶微商"，因此，又怎么能说基本动力学"也与任何更高阶的速度对时间的微商无关"呢？另外，诺贝尔物理学奖得主朗道也明确指出[20]，在相对论情况下，含 $\mathrm{d}^2 v/\mathrm{d}t^2$ 的辐射阻尼力 f_i 可能是作用于带电粒子上的主要力，并且给出了动力学方程

收稿日期：2005-03-27
作者简介：黄沛天(1940—)，男，江西吉安人，江西师范大学物理与通信电子学院教授，主要从事力学教学方面的研究.

的四度形式:

$$mc\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}s}=\frac{e}{c}F_{ik}u_k+f_i \tag{4}$$

因此,这也应该可以消除文献[1]关于“相对论”区域的误解.

实际上,早在19世纪末,当人们提出阿沛尔方程和加速度能量概念时[21,22],就已经开始了对变加速动力学概念的思考.到20世纪,除了阿伯拉罕-洛伦兹运动方程以及朗道等人的早期工作之外,在20世纪60、70年代,人们已开始用三阶微分方程来描写机械振动的动力学问题[23~26].1981年,文献[2]提出了力变率概念,1991年文献[27]提出了完整系统关于广义速度的拉格朗日方程(即三阶拉格朗日方程),到1997年,猝量方程[28]和猝变动力学[9,10]提出之后,文献[11]又用醒目的标题“十分震惊:急动度,一种物理学的旧式方法在混沌理论中找到新的应用”,吸引了更多人们的关注,并把变加速运动的动力学研究推向了高潮[4,12~18,29~35].

2 猝变动力学基本框架

下面介绍最近我们为物理教育硕士班学员提供的一个了解猝变动力学的框架,供读者参考.

2.1 从加速度到急动度

除了介绍急动度概念产生的工程技术发展和物质文明进步的历史背景[2,36]之外,主要用与加速度对照的方法阐述急动度描写加速度变化的物理意义,特别是急动度副法向分量的意义[3].

2.2 从急动度到变加速动力学

对于普通力学层面,可以从牛顿动力学方程直接得到力变率公式[2]

$$\boldsymbol{C}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{j} \tag{5}$$

由力变率对时间积分得到猝量方程[28]

$$\int_0^{\tau} m\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t=m\boldsymbol{a}_{\tau}-m\boldsymbol{a}_0 \tag{6}$$

由力变率对速度积分得到加速度能量定理[29,31]

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}_{\tau}} m\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}=\int_{\boldsymbol{a}_0}^{\boldsymbol{a}_{\tau}} m\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}ma_{\tau}^2-\frac{1}{2}ma_0^2 \tag{7}$$

并且以“自由落体”运动的初始猝变为例,初步说明(5)~(7)各式的应用.

对于分析力学层面,首先简单介绍阿沛尔方程[21,22]

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_S}=Q_S \tag{8}$$

这里的 S 为加速度能量,$\ddot{q}_S$为广义加速度,Q_S为广义力.接着介绍了三阶拉格朗日方程[27]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_S}-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_S}=Q_S^{*} \tag{9}$$

这里的 Q_S^{*} 为广义力变率.然后讨论了式(9)的第一积分,并用式(9)求解了收尾速度问题中的急动度[30].最后,简单介绍了相对运动中的三阶拉格朗日方程[34]和变质量力学系统的三阶拉格朗日方程[35],以及几种描写振动的三阶微分方程[23~26,37].

2.3 从急动度函数到猝变动力学

首先我们给学员说明哥特里卜[38]提出的广义急动度函数的重要意义,由此介绍建立猝变动力学[9,10]的基本思想——在三维相空间中,如果可以将含简单非线性项的三个一阶微分方程动力学系统变换成一个非奇异的一维三阶自治常微分方程动力学系统,那么,用这种具有非奇异特征的三阶常微分方程(也可简称为急动度方程)来研究该系统的动力学行为,即为猝变动力学.接着我们介绍史瓦兹定理,并以此区分出牛顿猝变动力学(即急动度函数直接源自牛顿力学)[10].随后,简单介绍了牛顿猝变动力学的某些性质[13].显然,按此思想,也可以把前面介绍过的猝量方程、加速度能定理、阿沛尔方程以及三阶拉格朗日方程等结果归入牛顿猝变动力学.

鉴于猝变动力学是由混沌问题引起的,因此,我们也简略介绍了著名的洛伦兹混沌模型和若斯勒混沌模型的猝变动力学形式[10].由于哥特里卜不仅提出“什么是给出混沌的最简单急动度函数?”[38],而且提出“什么是不给出混沌的最简单非线性急动度函数?”[12],因而最后我们还概述了猝变动力学呈现或不呈现混沌的判剧[13,14,17].

3 结束语

一个多世纪以来,人们走出了一条从传统牛顿力学到非线性动力学,再到当代猝变动力学的发展变化之路,而且“急动度”与“混沌”之间的关系又显得那么微妙,无怪乎文献[11]会发出“十分震惊”之赞叹.正如文献[4]所说,“随着科学技术的发展,随着物质文明的进步,把急动度和变加速动力学基本概念写入基础物理学和力学教科书也是指日可待.”实际上,国外已有不少基础教科书相继把急动度写进了教材[1,39~44],而国内除了在电动力学的教科书中出现过符号$\dddot{\boldsymbol{v}}$[45~47]之外,急动度概念基本上还未引入.这里也许还需要广大的基础课教师和《大学物理》、《力学与实践》等刊物继续做点“推波助澜”的工作.

参考文献:

[1] 弗伦奇 A P. 牛顿力学(1) [M]. 郭敦仁,何成钧译. 北京:人民教育出版社,1978. 172.

[2] 黄沛天. 一个描写机械运动的新概念 ——急动度[J]. 物理,1981,10(7):394～397.

[3] 朱明. 加速度,挠率与点的空间曲线运动[J]. 力学与实践,1983,5(5):48～50.

[4] 黄沛天,马善钧,徐学翔,等. 变加速动力学纵横[J]. 力学与实践,2004,26(6):85～87.

[5] 董水金,余守宪. 关于加加速度的若干机械运动分析及MATLAB 模拟[J]. 大学物理,2005,24(2):57～62.

[6] Sandin T R. The jerk [J]. Phys Teach, 1990,28:36～40.

[7] 谈开孚,赵永凯,郭小弟. 谈加加速度[J]. 力学与实践,1988,10(5):46～51.

[8] 叶柏年. 点的加加速度[J]. 力学与实践,1988,10(5):51～53.

[9] Sprott J C. Some simple chaotic jerk function [J]. Am J Phys,1997,65(6):537～543.

[10] Linz S J. Nonlinear dynamical models and jerky motion [J]. Am J Phys,1997,65(6):523～526.

[11] Von Baeyer H C. All shook up:the jerk,an old-fashioned tool of physics,finds new applications in the theory of chaos [J]. The Sciences,1998,38:12～14.

[12] Gottlieb H P W. Simple nonlinear jerk functions with periodic solution [J]. Am J Phys,1998,66(10):903～906.

[13] Linz S J. Newtonian jerky dynamic:some general properties [J]. Am J Phys,1998,66(12):1 109～1 114.

[14] Eichhorn, Linz S J,Hanggi P. Transformations of non-linear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows [J]. Phys Rev,1998,E58 (6):7 151～7 164.

[15] Linz S J, Sprott J C. Elementary chaotic flow [J]. Phys Lett,1999,A259:240～245.

[16] Sprott J C. Simple chaotic systems and circuits [J]. Am J Phys,2000,68(8):758～763.

[17] Linz S J. No-chaos criteria for certain jerky dynamica [J]. Phys Lett, 2000,A275:204～210.

[18] Gottlieb H P W. Harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations [J]. J Sound Vib, 2004,271:671～683.

[19] 杰克逊 J D. 经典电动力学 下册[M]. 朱培豫译. 北京:高等教育出版社,1980. 378.

[20] 朗道 L D,栗弗席兹 E M. 场论[M]. 任朗,袁炳南译. 北京:人民教育出版社,1959. 249～251.

[21] 吴大猷. 古典动力学 理论物理 第一册[M]. 北京:科学出版社,1983. 162.

[22] 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991. 194,249.

[23] Dasarathy B V, Srinivasan P. On the study of a third-order mechanical oscillator [J]. J Sound Vib,1969,9 (1):49～52.

[24] Mulholland R J. Non-linear oscillations of a third-order differential equation [J]. Int J Nonlinear Mech,1971,6: 279～294.

[25] Srirangarajan H R, Srinivasan P, Dasarathy B V. Ultra-spherical polynomials approach to the study of third-order non-linear systems [J]. J Sound Vib,1975,40 (2):167～172.

[26] Srirangarajan H R, Dasarathy B V. Study of third-order Non-linear systems-variation of parameters approach [J]. J Sound Vib,1975,40(2):173～178.

[27] 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1991. 251.

[28] 沈惠川. 吴大猷先生点评《经典力学》[J]. 物理,2000, 29(12):743～746.

[29] 黄沛天,黄文,胡利云. 变加速运动理论与实践意义初探[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2003,27 (1):8～11.

[30] 黄沛天,马善钧,胡利云. 变加速动力学和三阶微分方程[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2003,27 (4):338～340.

[31] 黄沛天,黄文,胡利云. 关于变加速动力学及其应用[J]. 力学与实践,2004,26(1):67～68.

[32] 黄沛天,马善钧,胡利云. 辐射阻尼力和电磁质量的动力学本质[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2004,28(2):99～101.

[33] 马善钧,徐学翔,黄沛天,等. 完整系统三阶 Lagrange 方程的一种推导和讨论[J]. 物理学报,2004,53(11): 3 648～3 651.

[34] Ma S(马善钧),Liu M(刘明萍),Huang P(黄沛天). The forms of three-order Lagrangian equation in relative motion [J]. Chin Phys,2005,14(2):244～246.

[35] Ma S(马善钧),Ge W(葛卫国),Huang P(黄沛天). The three-order Lagrange's equation for mechanical system of variable mass [J]. Chin Phys, 2005,14(5):879～881.

[36] Schot S H. Jerk: the time rate of change of acceleration [J]. Am J Phys, 1978,46(11):1 090～1 094.

[37] Auvergne M, Baglin A. A dynamical instability as a driving mechanism for stellar oscillations [J]. Astron Astrophys,1985,142:388～392.

(下转 10 页)

在式(16)中令 $m' \to 0$,则有

$$\omega_{0\infty}=\infty,\ \omega_{2\infty}=\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)\, m_2}} \qquad (17)$$

这相当于两个弹簧串联在一起,质点 m_2 作简谐振动,如图 3 所示. 并且,频率公式(17) 与熟知的结论一致.

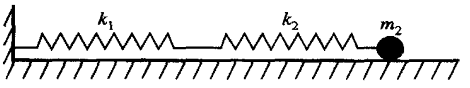

图 3

同理,还可以完全类似地讨论 $m_2 \to \infty$ 的情况,此处从略.

参考文献:

[1] 黄昆,韩汝琦. 固体物理学[M]. 北京:高等教育出版社,1998. 92～97.

[2] 李正中. 固体理论[M]. 北京:高等教育出版社,1985. 327～331.

[3] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京:高等教育出版社,1979. 284～294,328～330.

[4] 蔡瑞清,陈文灯,殷先军. 线性代数复习资料[M]. 北京:北京工业学院出版社,1987. 162～163.

The oscillation of one dimensional molecule with three atoms

ZHANG Li

(Office of Physics, Fundamental Department, Air Force Aviation University, Changchun 130022, China)

Abstract: An oscillation system of a molecule with three atoms is considered. The formula of eigenfrequency of the system is obtained by using the method of reducing matrices to normal form. Some particular cases are also considered.

Key words: molecule with three atoms; oscillation; eigenfrequency

(上接 3 页)

[38] Gottlieb H P W. Question 38: What is the simplest jerk function that gives chaos? [J]. Am J Phys, 1996, 64 (5): 525.

[39] Faires V M. Kinematics [M]. New York: McGraw-Hill, 1959. 9.

[40] DenHartog J P. Mechanics [M]. New York: Dover, 1961. 161.

[41] Sears F W, Zemansky M W, Young H D. University Physics [M]. 7th ed. MA: Addison-Wesley, Reading, 1987. 31～35.

[42] Sandin T R. Essentials of Modern Physics [M]. MA: Addison-Wesley, Reading, 1989. 12.

[43] Ohanian H C. Physics [M]. 2nd ed. New York: W W Norton & co, 1989. Ⅲ-13.

[44] Wellier M. Elements of Physics [M]. New York: Plenum, 1991. 18.

[45] 曹昌祺. 电动力学[M]. 第 2 版. 北京:人民教育出版社,1962. 233.

[46] 胡宁. 电动力学[M]. 北京:人民教育出版社,1963. 120～126.

[47] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1997. 321.

From traditional Newtonian mechanics to the jerky dynamics of today

HUANG Pei-tian, MA Shan-jun

(College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract: It is a tendency that the new concepts of jerk and jerky dynamics become a part of course of the university physics. A elementary teaching frame of the new concepts on jerky dynamics is constructed.

Key words: jerky dynamics; jerk; Schwarz's theorem; time rate of change of force; jumpulse; energy of acceleration; three-order Lagrangian equation