第 27 卷第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol.27 No.4
2003 年 8 月 JOURNAL OF JIANGXI NORMAL UNIVERSITY Aug.2003

文章编号:1000-5862(2003)04-0338-03

变加速动力学和三阶微分方程

黄沛天， 马善钧， 胡利云
(江西师范大学 物理与通信电子学院,江西 南昌 330027)

摘要:阐明了梅凤翔在《高等分析力学》一书中给出的完整系统关于广义速度的Lagrange方程就是沈惠川在"吴大猷先生点评《经典力学》"一文中设想要仿照Lagrange方程寻找的新的动力学方程(简称为赝Lagrange方程).分析并指出了匀加速运动方程是赝Lagrange方程的第一积分.应用赝Lagrange方程求解了收尾速度问题中的急动度.

关键词:急动度;力变率;猝量;加速度能量;第一积分
中图分类号:O 313 **文献标识码**:A

尽管牛顿在其《自然哲学之数学原理》中也论及过物体受到与速度相关的阻力作用时的变加速运动问题,但却没有引入恰当的物理量来描写加速度的变化.随着汽车、火车、公路、铁路等人类物质文明的发展和对乘车时的舒适性的追求,人们首先在应用力学领域定义急动度为加速度随时间的变化率[1~3],把它作为舒适性的一种量度[4],作为公路、铁路以及间歇运动机械设计时不可忽视的参数[5~7].20世纪上半叶,物理学家关注带电粒子在变加速运动中受到自身辐射反作用的问题,发现这种辐射反作用阻尼力与加速度随时间的变化率(或急动度)$\dddot{v}$相关[8],即 $\vec{F}_{辐射}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}}=m\tau\ddot{\vec{v}}$,从而得到修正的动力学方程 $m(\dot{\vec{v}}-\tau\ddot{\vec{v}})=\vec{F}_{辐射}$.人们就此开始了变加速动力学方面的思考.1981年,黄沛天提出了力变率公式[3].1991年,梅凤翔提出完整系统关于广义速度的Lagrange方程[9];1997年,吴大猷提出猝量方程[10];近期,黄沛天等人导出了加速度能定理[11],并由此综合提出了"变加速动力学"一说.而变加速动力学则与三阶微分方程密切相关.

1 赝 Lagrange 方程

众所周知,力学和物理学中的大多数基本方程都是不超过二阶的微分方程.但是在讨论变加速运动问题时,人们套用牛顿第二定律和动量定理,合理地给出了描写力(或加速度)变化的力变率公式[3]

$$C_x=\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}t}=m\dddot{x} \tag{1}$$

和猝量方程[10]

$$\int_0^\tau C_x\mathrm{d}t=\int_0^\tau m\dddot{x}_x\mathrm{d}t=m\ddot{x}_\tau-m\ddot{x}_0 \tag{2}$$

其中的(1)式是一个简单的三阶微分方程,(2)式则是(1)式对时间的积分.

同样,文献[10]提出仿照(或套用)Lagrange方程再导出一个描写力(或加速度)变化的相应的新的方程的设想也是合理的.尽管文献[10]并未具体导出这一方程,但是我们可以仿照Lagrange方程的结构形式设想出这个描写变加速运动的新方程应当具有的结构特征.

众所周知,Lagrange方程是以表征速度状态的态函数动能(T)为基础,以广义力(Q_s)为结构形式的二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s\quad(s=1,2,3,\cdots,n) \tag{3}$$

收稿日期:2003-03-20
作者简介:黄沛天(1940-),男,江西吉安人,教授,主要从事力学方面的研究.

因此，描写变加速运动的新方程应当是以表征加速度状态的某个态函数为基础，以与(1)式相似的广义力变率为结构形式的三阶微分方程.

从加速度能定理[11]可以知道，这个与 Lagrange 方程中的动能 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 相当的在新方程中表征加速度状态的态函数就是加速度能量 $S=\frac{1}{2}m\ddot{x}^2$. 而文献[9]早已给出了一个称做"完整系统关于广义速度的 Lagrange 方程"

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_s}=Q_s^* \quad (s=1,2,3,\cdots,n) \tag{4}$$

式中的 S 为加速度能量，$Q_s^*=\sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{F}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}$ 为广义主动力变率.

将(4)式的结构形式与(3)式的结构形式加以对照就会发现：(4)式正是具有以表征加速度状态的态函数加速度能量(S)为基础，以广义力变率(Q_s^*)为结构形式特征的三阶微分方程，也即文献[10]设想要寻找的新的动力学方程. 为方便起见，我们将(4)式简称为赝 Lagrange 方程. 如果说 Lagrange 方程是经典力学的基本方程之一的话，那么，赝 Lagrange 方程则是为描写变加速运动而补充的又一类基本动力学方程.

2　赝 Lagrange 方程的第一积分

我们知道，在某些特殊情况下，Lagrange 方程存在循环积分和能量积分这两个第一积分. 与此类似，如果有变加速运动的态函数为 $S=\frac{1}{2}m\ddot{x}^2$(不显含速度 $\dot{x}$，因而$\partial S/\partial \dot{x}=0$)，并且广义力变率 $Q_x^*=0$ 的特殊情况，

那么赝 Lagrange 方程给出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}}=0 \tag{5}$$

于是可求得该方程的第一积分

$$\partial S/\partial \ddot{x}=m\ddot{x}=\text{恒量} \tag{6}$$

显然，(6)式的物理意义是力函数守恒，或匀加速运动.

3　如何求解变加速运动的急动度

一个经典力学问题，只要不涉及急动度，在二阶微分方程(比如牛顿第二定律或 Lagrange 方程等)的框架内一般都可求解. 一旦涉及急动度，那就须启用三阶导数或三阶微分方程(比如力变率公式或赝 Lagrange 方程)等方法. 我们不妨考察一个简单的例子：淤泥微粒 m 在静水中滞沉并趋于收尾速度 $\dot{x}_T$ 的运动. 尽管这是一个典型的变加速直线运动，但只要不涉及急动度，我们用牛顿第二定律就可以求解这一问题：取 x 轴竖直向下，由牛顿第二定律可写出动力学方程 $W-B-k\dot{x}=m\ddot{x}$，式中的 W、B 和 $k\dot{x}$ 分别为微粒所受的重力、浮力和阻尼力，k 为阻尼系数. 由初始条件 $x_0=0$ 和 $\dot{x}_0=0$，容易求得初始加速度 $\ddot{x}_0=(W-B)/m$. 然后依次可求得

$$\dot{x}=\frac{W-B}{k}\{1-\exp[-(k/m)t]\} \quad (\text{显然，收尾速度为 } \dot{x}_T=\frac{W-B}{k}) \tag{7}$$

和

$$\ddot{x}=\frac{W-B}{m}\exp[-(k/m)t] \tag{8}$$

如果还要求急动度 $\dddot{x}$ 呢？由于 $\dddot{x}$ 本身就是三阶导数，因此，只须将(8)式对时间求导便可求得 $\dddot{x}$. 尽管这是一种极为简单的数学运算(俗称运动学方法)，但却未被通常的二阶微分方程所包容.

若从动力学的角度来求急动度，则须启用力变率公式或赝 Lagrange 方程.

这里用赝 Lagrange 方程[即(4)式]来求淤泥微粒的急动度. 此时赝 Lagrange 方程的左边为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \ddot{x}}\left(\frac{1}{2}m\ddot{x}^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\ddot{x}^2\right)=\frac{d}{dt}(m\ddot{x})=m\dddot{x} \tag{9}$$

其右边由于阻力 $k\dot{x}$ 在虚位移中的功不为零，这种非理想约束反力可看作主动力，因此有

$$Q_x^*=\dot{F}_x\vec{i}\cdot\frac{\partial(x\vec{i})}{\partial x}=-k\ddot{x} \tag{10}$$

然后将(9)式、(10)式和(8)式联立,可得到急动度

$$\dddot{x} = -\frac{k}{m}\ddot{x} = -\frac{k(W-B)}{m^2}\exp\left[-\left(\frac{k}{m}\right)t\right] \tag{11}$$

4 结束语

综上所述,描写力(或加速度)变化的三阶微分方程是对传统牛顿力学二阶微分方程框架体系的继承和补充;同时也显露了经典力学发展的某种需求.因此,赝 Lagrange 方程的建立,一方面可以排除文献[12]"那么,整个物理学的基础岂非都变得岌岌可危了?!"的疑虑;另一方面表明,文献[13]对文献[10]关于寻找变加速动力学新方程"设想"的批评也是欠妥的.人们应当积极地去面对和迎接这类新方程和新思维方式的到来.

参考文献

[1]Faires V M.Kinematics [M]. New York: Mc Graw - Hill, 1959.9.

[2]Schot S H.Jerk: The time rate of change of acceleration [J]. Am J Phys, 1978, 46(11): 1090.

[3] 黄沛天.一个描写机械运动的新概念——急动度[J].物理,1981,10(7):394.

[4] 弗伦奇 A P. 牛顿力学(1) [M]. 郭敦仁,何成钧译. 北京:人民教育出版社, 1978.172.

[5] Royal - Dawson F G. Elements of curve design for road, railway, and racing track on natural transition principles [M]. London: Spon, 1932.

[6] Faires V M. Design of machine elements (4th ed.) [M]. New York: Macmillan, 1965.528.

[7] Freudenstein F, Sandor G N.Mechanical design and systems handbook [M].New York: McGraw - Hill, 1964.Sec.4, 13.

[8] 杰克逊 J D.经典电动力学(下册)[M].朱培豫译.北京:高等教育出版社,1980.378.

[9] 梅凤翔,刘端,罗勇.高等分析力学[M].北京:北京理工大学出版社,1991.251.

[10] 沈惠川.吴大猷先生点评《经典力学》[J].物理,2000,29(12):743.

[11] 黄沛天,黄文,胡利云.变加速运动理论与实践意义初探[J].江西师范大学学报(自然科学版),2003, 27(1):8.

[12] 关洪.力学里需要一个新的基本概念——"急动度"吗? [J].物理,1983,12(1):63.

[13] 关洪.关于"猝量"[J].物理,2001,30(9):579.

The Dynamics of Varying Accelerated Motion and the Three Order Differential Equation

HUANG Pei - tian, MA Shan - jun, HU Li - yun

(College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract: In this paper, the problem concerning Lagrange equation of complete system on generalized velocity in reference《Advanced Analytical Mechanics》(i.e. pseudo - Lagrange equation) has been discussed. The result shows that the dynamic equation is the new dynamic equation which had been tried to derive by the method of obtaining Lagrange equation and the dynamic equation of motion with constant acceleration is the first integration of pseudo - Lagrange equation. In addition, solving the jerk in process of particle's tending to terminal velocity by using pseudo - Lagrange equation is investigated.

Key words: jerk; time rate of change of force; jumpulse; energy of acceleration; first integration

(责任编辑:聂咏国)