

# “向大师学习”

——现代数学研究特点的观察

许志强

中科院数学与系统科学研究院计算数学所  
科学与工程计算国家重点实验室

# 阿贝尔 (1802-1829)



- ◎ 以证明五次以上代数方程组无求根公式而著称。
- ◎ 16岁那年，他遇到了一个能赏识其才能的老师霍姆伯 (Holmboe) 介绍他阅读牛顿、欧拉、拉格朗日、高斯的著作。
- ◎ 大师们不同凡响的创造性方法和成果，一下子开阔了阿贝尔的视野，把他的精神提升到一个崭新的境界。
- ◎ 后来他感慨地在笔记中写下这样的话：  
“要想在数学上取得进展，就应该阅读大师的而不是他们的门徒的著作”。

# 如何解读阿贝尔的建议？

- ◎ 阿贝尔建议是“向大师学习”。
- ◎ 在文献浩繁、信息爆炸、研究领域细化的今天，阿贝尔当年的建议又如何解读呢？



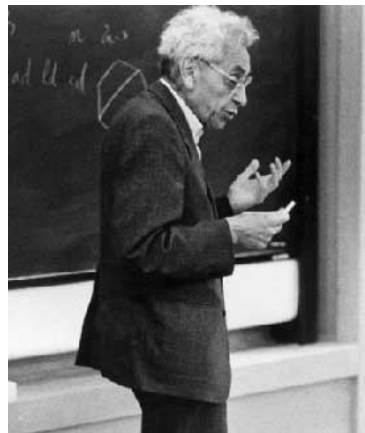
# 可以学习大师的学习、工作方式吗？



Euler



Riemann



Erdős



Hardy

# L. EULER (1707 - 1783)



“读读欧拉、读读欧拉，他是我们大家的老师！”

——拉普拉斯

## 欧拉的研究特点

- ◎ **异常勤奋**：过度的工作使他得了眼病，并且不幸右眼失明了，这时他才28岁。
- ◎ **超强抗干扰能力**：常常抱着孩子在膝上完成论文，也不顾孩子在旁边喧哗。
- ◎ **超人的记忆和心算能力**：完全失明以后，凭着记忆和心算进行研究17年，直到逝世。
- ◎ **最多产的数学家**：欧拉是历史上最多产的数学家。写下了886本书籍和论文，共计七十卷。



# RIEMANN (1826 - 1866)



- “黎曼先生交来的论文提供了令人信服的证据，说明作者对该文所论述的这一问题作了全面深入的研究，作者具有创造性的、活跃的、真正的数学头脑，具有灿烂丰富的创造力。”

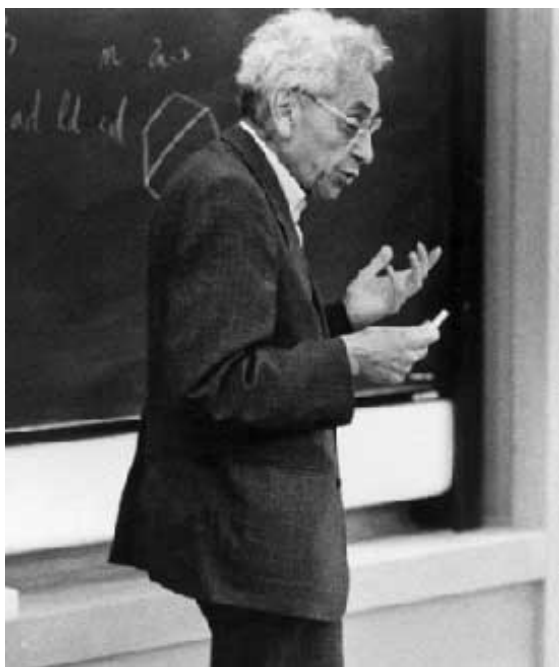
——高斯

# RIEMANN的研究风格

- ◎ 黎曼是世界数学史上最具独创精神的数学家之一。黎曼的著作不多（15篇），但却异常深刻，极富于对概念的创造与想象。
- ◎ 黎曼积分、黎曼几何、黎曼假设、黎曼面等。
- ◎ 完全不同于欧拉的研究风格！



# PAUL ERDŐS (1913-1996)



一个数学家就是一台把咖啡转化为数学定理的机器。

--P. Erdős

# ERDŐS研究特点

- ◎ **合作者众多**： Erdős有多达485名合作者 (Erdős数)
- ◎ **研究领域广泛**： 其研究领域涉及数学将近一半的分支。
- ◎ **长时间的工作**： 每天工作19个小时以上。  
“一个数学家必须是在每个星期都有一些新的研究工作才称为数学家。”  
“要休息的话，坟墓里有的是休息时间。”

# ERDŐS数——递归定义

- ◎ Erdős本人的Erdős数为0。
- ◎ 与Erdős本人直接合作过的，Erdős数为1。如果你与Erdős数为 $k$ 的人合作过，但没有与Erdős数为 $k-1$ 的人合作过，那你的Erdős数为 $k+1$ 。

搜索数学主题分类

合作者之间的距离

最新杂志

最新出版物

**MR Erdos Number = 2**

Zhi Qiang Xu	coauthored with	Bruce Reznick	MR2405772 (2009i:52008)
Bruce Reznick	coauthored with	Paul Erdős <sup>1</sup>	MR0869777 (89c:11024)

Change First Author

Change Second Author

New Search

# G. H. HARDY (1877-1947)



最好的数学既是美的，同时又是严肃的。

----- G. H. Hardy

# HARDY的工作特点

- ◎ 纯粹的数学家，但兴趣广泛。
- ◎ 每天用于数学工作的时间只有4小时（9点到11点），下午打板球和网球。
- ◎ 善于与别人合作，其合作者中有Ramanujan，Littlewood等。



## 风格迥异

- ◎ 论著多者如Euler，浩如烟海。Erdős著作之多亦属罕见(1,475篇)。
- ◎ 论著少者如Riemann (15篇)，为Erdős的百分之一。
- ◎ 工作时间长者如Erdős, 一天工作19个小时以上，直到去世。
- ◎ 工作时间少者如Hardy, 一天工作4个小时，60岁以后便停止数学创作。



1929-

Atiyah在文章“Advice to a Young Mathematician”开始就给出了如下警告：

“数学家的特点各种各样，类型广泛，你应该按照你自己内在的特性去发展。你可以从其他人那里学习，但是要用自己的方式去理解。”

## 结论:

- ◎ 从一个成功个体所学的具体行为方式，对大多数人来说，往往是无效的。

# 异中求同

- ◎ 对数学工作的热爱，以及从中所获得的成就感。
- ◎ 数学研究方式的演化：独立的研究 (Euler, Riemann) 到彼此之间的合作 (Erdős, Hardy)。

# 现代数学分类

- ◎ 按照美国数学会2010年数学分类表，共有数学分支约100个，具体研究方向约4000个！

41-XX **APPROXIMATIONS AND EXPANSIONS** {For all approximation theory in the complex domain, see 30E05 and 30E10; for all trigonometric approximation and interpolation, see 42A10 and 42A15; for numerical approximation, see 65Dxx}

41-00 General reference works (handbooks, dictionaries, bibliographies, etc.)

41-01 Instructional exposition (textbooks, tutorial papers, etc.)

41-02 Research exposition (monographs, survey articles)

41-03 Historical (must also be assigned at least one classification number from Section 01)

41-04 Explicit machine computation and programs (not the theory of computation or programming)

41-06 Proceedings, conferences, collections, etc.

41Axx **Approximations and expansions** {For all approximation theory in the complex domain, see 30E05 and 30E10; for all trigonometric approximation and interpolation, see 42A10 and 42A15; for numerical approximation, see 65Dxx}

41A05 Interpolation [See also 42A15 and 65D05]

41A10 Approximation by polynomials {For approximation by trigonometric polynomials, see 42A10}

41A15 Spline approximation

41A17 Inequalities in approximation (Bernstein, Jackson, Nikol'skiĭ-type inequalities)

41A20 Approximation by rational functions

41A21 Padé approximation

41A25 Rate of convergence, degree of approximation

41A27 Inverse theorems

41A28 Simultaneous approximation

41A29 Approximation with constraints

41A30 Approximation by other special function classes

41A35 Approximation by operators (in particular, by integral operators)

41A36 Approximation by positive operators

42A05 Completeness of sets of functions

42A70 Trigonometric moment problems

42A75 Classical almost periodic functions, mean periodic functions [See also 43A60]

42A82 Positive definite functions

42A85 Convolution, factorization

42A99 None of the above, but in this section

42Bxx **Harmonic analysis in several variables** {For automorphic theory, see mainly 11F30}

42B05 Fourier series and coefficients

42B08 Summability

42B10 Fourier and Fourier-Stieltjes transforms and other transforms of Fourier type

42B15 Multipliers

42B20 Singular and oscillatory integrals (Calderón-Zygmund, etc.)

42B25 Maximal functions, Littlewood-Paley theory

42B30  $H^p$ -spaces

42B35 Function spaces arising in harmonic analysis

42B37 Harmonic analysis and PDE [See also 35-XX]

42B99 None of the above, but in this section

42Cxx **Nontrigonometric harmonic analysis**

42C05 Orthogonal functions and polynomials, general theory [See also 33C45, 33C50, 33D45]

42C10 Fourier series in special orthogonal functions (Legendre polynomials, Walsh functions, etc.)

42C15 General harmonic expansions, frames

42C20 Other transformations of harmonic type

42C25 Uniqueness and localization for orthogonal series

42C30 Completeness of sets of functions

42C40 Wavelets and other special systems

42C99 None of the above, but in this section

43-XX **ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS** {For other analysis on



## 不断细化的学科分支所导致的结果

- ◎ 庞加莱 (1854-1912)，被称为最后一个数学全才。
- ◎ 现在一个人已经无法通晓数学的每一个分支。
- ◎ 人们往往在不同的领域里面，做着同样的事情，却又浑然不觉。
- ◎ 起源不同的数学支流，往往意想不到的发生交叉与关联，从而让人感受到数学的另外一种魅力！如纯粹数学与应用数学，连续数学与离散数学。

# 样条与多面体

- ◎ 如在应用数学中，人们为了近似各种各样的复杂函数，创立了样条函数（分片多项式函数）理论。并对其进行了深入研究，发展出了多元截断幂、Box样条函数等。
- ◎ 而在纯粹数学中，人们也发展了多面体体积公式、单位立方体切面面积、多面体内整点数目等。
- ◎ 这些表面上毫不相关的东西，其实质居然一致。

- ◎ 数学分支庞大；单个数学家时间、精力有限；现代数学不同分支之间意想不到的交叉。
- ◎ 数学研究在保留个人创作空间的同时，亦有群体化的趋势！

## N. BOURBAKI (1935-1968)

- ◎ 布尔巴基是20世纪一群法国数学家的笔名。他们由1935年开始撰写一系列数学书籍。
- ◎ 布尔巴基学派是一个对现代数学有着极大影响的数学家的集体。其中大部分是法国数学家，主要的代表人物是魏伊、迪多涅、嘉当、薛华荔，等人。



# BOURBAKI的形成

- ◎ 20世纪20年代，在进入高师的年轻人中，迪多涅，魏伊，亨·嘉当等人，不满足于法兰西数学界的现状。
- ◎ 他们深刻认识到了法国数学同世界先进水平的差距。他们痛切感觉到，如果还继续搞一个方向，法国的数学就肯定要走进死胡同。

# BOURBAKI的形成

- ◎ 当时打开那些年轻人通往外在世界的通道只有阿达玛的讨论班。
- ◎ 阿达玛是法兰西学院的教授。在年初，他把他认为最重要的论著分配给打算在讨论班上做报告的人。对青年人的提高大有好处。



# BOURBAKI的形成

- ◎ 这批年轻人决心象范·德·瓦尔登整理代数学那样，从头来起，把整个数学重新整理一遍，以书的形式来概括现代数学的主要思想，而这也正是布尔巴基学派及其主要著作《数学原理》产生的起源。
- ◎ 当时，布尔巴基的大多数成员还不到30岁，年纪稍大些的也不过才30出头。假如他们年纪再大一些，知识再多一些，他们也就永远不会开始这项伟大的事业了。

# BOURBAKI的工作方式

- ◎ 他们一年举行两三次集会，一旦大家多多少少一致同意要写一本书或者一章论述某种专题，起草的任务就交给布尔巴基中想要担任的人。
- ◎ 一般来说，他可以自由的筛选材料，一两年之后，将所完成的初稿提交大会，然后一页不漏地大声宣读，接受大家对每个证明的仔细审查，并且受到无情的批评。

# BOURBAKI的工作方式

- ◎ 有时一个题目要几易作者，第一个人的原稿被否定，由第二个人重写。
- ◎ 下次大会上第二个人的原稿也许会被全部否定，再由第三个人重新开始。
- ◎ 从开始搞某一章到它成书在书店中发售，其间平均需要经历8到12年。

# BOURBAKI的工作

◎ 布尔巴基学派的主要著作是《数学原理》。它对整个数学作完全公理化处理的第一个目标是研究所谓“分析的基本结构”。这在《数学原理》中属于第i部分，

第i部分又分为：

第I卷 集合论

第IV卷 一元实变函数

第II卷 代数

第V卷 拓扑向量空间

第III卷 一般拓扑学

第VI卷 积分论

# POLYMATH

- ◎ 传统的合作模式显然受到时空的限制。
- ◎ 在网络时代。使得人们摆脱传统合作模式的束缚成为可能。
- ◎ 2009年1月，T. Gower在其博客上写了一篇博文 “Is massively collaborative mathematics possible? ”
- ◎ 文章讨论了数学家通过网络平台，进行交流、合作，从而解决一个具体问题的可能性。

## IS MASSIVELY COLLABORATIVE MATHEMATICS POSSIBLE?

- ◎ “假定有一个论坛，人们可以在此讨论一个特定的问题。任何人无论有什么想法都可以发言。这个论坛的特点是言论尽可能少而精。换句话说，你需要做的是花费一个月去考虑这个问题，然后回来写上十页你的观点。而不能说你的想法是错误的。”

# IS MASSIVELY COLLABORATIVE MATHEMATICS POSSIBLE?

- ◎ “此外，我们不必将自己只局限于如下的观点：人们所熟悉的知识并不相同，因此，对于解决一个问题而言，一群人的知识肯定要远多于一个或两个个体的。”
- ◎ “这并不仅仅是不同领域的数学知识问题，而且也可以使不同领域的数学技巧组合在一起，例如，人们可能会说：“你的那个想法与解某种问题的技术相类似，因此，可能会有效”或者是“你建议证明的那个引理是错误的”等等。然而，如果一个人去工作，就有可能花费数周甚至数月去发现这些东西。”

# POLYMATH

- ◎ 这个想法是“POLYMATH”产生的开始！
- ◎ 而“POLYMATH”也很快从想法变为现实。
- ◎ 人们可以在网站

[HTTP://MICHAELNIELSEN.ORG/POLYMATH1/INDEX.PHP](http://MICHAELNIELSEN.ORG/POLYMATH1/INDEX.PHP)

上提供问题，然后开展讨论。最终以POLYMATH的笔名发表论文。





- Navigation
- [Main Page](#)
  - [Community portal](#)
  - [Current events](#)
  - [Recent changes](#)
  - [Random page](#)
  - [Help](#)

Search

- Toolbox
- [What links here](#)
  - [Related changes](#)
  - [Special pages](#)
  - [Printable version](#)
  - [Permanent link](#)

## Main Page

This is the wiki for *polymath* projects - massively collaborative online mathematical projects. The idea of such projects originated in Tim Gowers' blog post [Is massively coll](#). Many polymath projects will be proposed, planned, and run at [this blog](#).

### Existing polymath projects

- [Polymath1](#): New proofs and bounds for the density Hales-Jewett theorem. Initiated Feb 1, 2009; research results have now been submitted for publication.
- [Polymath2](#): Must an "explicitly defined" Banach space contain  $c_0$  or  $l_p$ ? Initiated Feb 17, 2009; attempts to relaunch via wiki, June 9 2010.
- [Mini-polymath1](#): Solving Problem 6 of the 2009 International Mathematical Olympiad. Initiated July 20, 2009; five proofs obtained so far.
- [Polymath3](#). The polynomial Hirsch conjecture. Proposed July 17, 2009; launched, September 30, 2010.
- [Polymath4](#): A deterministic way to find primes. Proposed July 27, 2009; launched Aug 9, 2009. Research results have been submitted for publication.
- [Polymath5](#). The Erdős discrepancy problem. Proposed Jan 10, 2010; launched Jan 19, 2010.
- [Mini-polymath2](#): Solving a problem from the 2010 International Mathematical Olympiad. Proposed Jun 12, 2010; launched Jul 8, 2010; solved, Jul 8 2010.

### Polymath-like projects

- Scott Aaronson's "philomath project": "[Sensitivity vs. Block sensitivity](#)" (see also [this Math Overflow question](#)). Launched Jul 13, 2010.
- A [wiki](#) page clearinghouse for [Deolalikar P vs NP paper](#). Launched Aug 10, 2010.

### Proposed polymath projects

- [The cap set problem](#). Proposed March 25, 2009 (see also these [two followup](#) posts).
- [Boshernitzan's problem](#). Proposed July 27, 2009.
- [Possible future polymath projects](#). Discussion opened September 16, 2009.

A (partial) list of proposed projects can be found [here](#).

If you have a tentative proposal for a polymath project, you can either make a post on it on your own blog, or place it [here](#).

### Discussions about polymath

- [Is massively collaborative mathematics possible?](#) Tim Gowers, January 27, 2009.
- [A people's history of mathematics](#) Luca Trevisan, February 1, 2009.
- [The polymath project](#) Michael Nielsen, February 3, 2009.
- [Yet another math 2.0 proposal](#) Lieven le Bruyn, February 11, 2009.
- [Polymath1 and open collaborative mathematics](#) Tim Gowers, March 10, 2009.
- [Polymath](#) Edmund Harriss, March 14, 2009.
- [Massive open collaboration in mathematics declared a success](#) Slashdot, March 18, 2009.
- [How changing the technology of collaboration can change the nature of collaboration](#) Michael Nielsen, March 18, 2009.
- [The polymath project: scope of participation](#) Michael Nielsen, March 20, 2009.
- [Can polymath be scaled up?](#) Tim Gowers, March 24, 2009.
- [Concluding notes on the polymath project - and a challenge](#) Vilpuliak, March 24, 2009.
- [On scaling up the polymath project](#) Michael Nielsen, March 25, 2009.

# Polymath完成的论文

1. [arXiv:1009.3956](#) [[pdf](#), [other](#)]

## Deterministic methods to find primes

[D.H.J. Polymath](#)

Comments: 14 pages, no figures, submitted, Math. Comp.. This paper was the outcome of the online collaborative mathematics project Polymath4. An incorrect reference repaired

Subjects: **Number Theory** ([math.NT](#))

2. [arXiv:1002.0374](#) [[pdf](#), [other](#)]

## Density Hales-Jewett and Moser numbers

[D.H.J. Polymath](#)

Comments: 49 pages. To appear, Szemerédi birthday conference proceedings

Subjects: **Combinatorics** ([math.CO](#))

3. [arXiv:0910.3926](#) [[pdf](#), [ps](#), [other](#)]

## A new proof of the density Hales-Jewett theorem

[D. H. J. Polymath](#)

Comments: See also [this http URL](#)

Subjects: **Combinatorics** ([math.CO](#))

# POLYMATH的文章

- ◉ Deterministic method to find primes
- ◉ 问题：给一个数 $N$ ，设计确定的快速算法找出一个比 $N$ 大的素数。
- ◉ 2009年7月开始，2010年9月论文投稿。

# POLYMATH

- ◎ Polymath是个刚刚出生的婴儿,其前景尚未可知,但无论如何,这为数学家之间的合作提供了一种崭新的途径。
- ◎ 如果Polymath变得流行,进而其工作方式渗透于其它科学领域,传统的科研工作方式也许会面临一个巨大的挑战。

# “三人行，必有我师”

- ◎ “三人行，必有我师焉。择其善者而从之，其不善者而改之。”

——论语·述而

- ◎ 这句话也许对我们今天的研究工作仍有借鉴意义。
- ◎ 与我们的同行、朋友交流，从交流中向他们学习，获取信息，远比自己读书学习更有效！

# 我们的现状

- ◎ 学生阶段的激烈竞争，使得我们更强调独立思考的精神，这对培养个人能力来说当然是值得推崇的。
- ◎ 然而，如何快速过渡到工作阶段的交流与合作状态，对我们来说，也是个挑战。

# 我们的现状

- ◎ 即使在研究生阶段，我们也被过多的灌输了交流所带来的负面影响。人们也更关注，也更津津乐道这些负面影响，而忽略因交流而带来的意想不到的收获。这些都使我们变得有些过于防范。
- ◎ “合作不能计较太多，计较太多不能合作。”这是我学生阶段所听到的唯一一句对合作正面的忠告。令我印象深刻。

## 我们的现状

- ◎ 我从不认为中国的学生在所谓的创新能力、探索能力方面有所欠缺。
- ◎ 在有些理念方面，特别是与人交流、合作的理念，是我们需要调整的。



## 交流的方式

- ◎ 当面的交流、群体聚会的交流、网络的交流(Email, 或者论坛)等。
- ◎ 纯粹的学术交流应该仅仅是基于共同兴趣的。应该摒弃一切非学术因素所带来的心理羁绊：如专业背景、出身、年龄及身份差距、甚至于语言障碍。

# 向大师学习

- ◎ 向大师学习，就是向我们周围有共同兴趣的所有人学习。
- ◎ 我们今天的大师，就是我们能够接触到的环境与朋友。

谢谢大家!

2010年11月12日