物理学球对称时空度规的相互变换及其观测意义

卞保民　赖小明　杨玲　李振华　杨孝平　贺安之

(南京理工大学理学院，南京，210094)

摘要　物理学球对称时空的基本类型分为均匀平直四维时空、星球外真空近似条件下史瓦西度规对应的引力非线性时空、均匀宇宙模型 R-W 度规对应的弯曲时空。在上述四维时空形式下，物理学理论给出描述实物元运动状态的四维时空间隔。基于随时序变化的空间尺度因子函数 R（t），在四维平直时空内可建立均匀膨胀空间球坐标系。严格的数学计算证明，通过非线性空、时坐标变换，能够实现上述四种时空度规形式之间的相互变换，并给出与 R-W 度规对应的空间尺度因子函数形式。

关键词　时空度规

1.引言

牛顿物理学的逻辑基础是抽象的、绝对的、均匀的、数学的时空概念。1905 年，爱因斯坦提出了相对论时空概念。新时空概念的核心内容即观测光信号与时空度量之间的关系。在相对论时空概念基础上，爱因斯坦成功地将牛顿力学加以推广，以四维时空间隔元形式为逻辑基础，建立了相对论力学体系。1917 年，爱因斯坦提出了宇宙学原理和稳定理想气体宇宙的观点；1920 年前后，Slipher 发现河外星系光谱普遍存在红移现象；1929 年，Hublle 根据对河外星系光谱红移普遍性的研究及分析计算，提出了小红移条件下的哈勃定律。哈勃定律被认为是现代宇宙学最重要的观测基础之一。Friedmann 在广义相对论、宇宙学原理基础上建立了标准宇宙物理学模型，用 $R-W$ 度规描述四维时空间隔元，并从理论上给出与 $k=0$、±1 对应的三种可能时空类型。同时，在 $k\neq0$ 的非平直性时空模型中，留下了一个被称为空间尺度因子的待定函数。$R-W$ 度规实际上是“宇宙大爆炸模型”的理论基础。

本文基于均匀平直空间四维间隔定义，结合均匀膨胀空间球坐标系的空时坐标变换，通过严格的计算证明 $R-W$ 度规三种形式之间的存在相互转换关系，同时也给出均匀膨胀空间球坐标系和史瓦西度规之间对应关系。可见，“均匀膨胀宇宙”、“四维弯曲空间”其实是对均匀膨胀空间坐标系形式的一种理解。

2.均匀平直时空形式下的实物元四维间隔

均匀平直时空形式下，与空间球坐标系对应的四维间隔为

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\ &= -c^2 dt^2 + r^2\left[\left(d\ln r\right)^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right] \end{aligned} \tag{1}$$

式中 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 为物质普适常数 ε_0、μ_0 组成的具有速度量纲的参数。r 是原点到实物元 $\left(r,\theta,\varphi\right)$ 的空间距离。取距离单位 R_0 为常数，定义径向坐标为

$$\varsigma \equiv \frac{r}{R_0} \tag{2}$$

则用球坐标参数 $\left(\varsigma,\theta,\varphi\right)$ 描述的四维时空间隔元形式为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R_0^2\varsigma^2\left[\left(d\ln\varsigma\right)^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right] \tag{3}$$

由（3）式可以看出，一般情况下角度微元 $d\theta$、$\sin\theta d\varphi$ 与 $d\ln\varsigma$ 同量级。若引入随时序变化的空间尺度因子 $R\left(t\right)$，且定义实物元的径向坐标为

$$\xi \equiv \frac{r}{R} \tag{4}$$

（4）式定义的任意径向坐标点 ξ 到原点距离的时序变化率 $\frac{\partial r}{r\partial t} \equiv \frac{\xi\dot{R}}{\xi R} = H\left(t\right)$ 与空间坐标 $\left(\xi,\theta,\varphi\right)$ 无关，即 $\left(\xi,\theta,\varphi\right)$ 为具有空间均匀膨胀特性的球坐标系。在不同的应用环境中，（4）式的物理意义不同：对确定的空间距离 r，其径向坐标随时序变化；而确定的非零径向坐标 ξ，其与原点之间的空间距离随时序变化。

对任意具体实物元 m 而言，坐标参数 $\left(\xi,\theta,\varphi\right)$ 一般为变化量。确定坐标原点后，实物元 m 的四维时空间隔一般形式为

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + \left(\xi\dot{R}dt + Rd\xi\right)^2 + \xi^2R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\ &= -\left(c^2 - \xi^2\dot{R}^2\right)dt^2 + R^2 d\xi^2 + 2\xi R\dot{R}d\xi dt + \xi^2R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

（3）式、（5）式是与（1）式对应的两种不同数学形式。三个公式中微分元前的系数组，构成四维时空度规。不同的空间尺度因子 R，四维时空度规的形式不同。取尺度因子函数 $R\left(t\right)$ 的一般形式为

$$R = R_0\left(\alpha H_0 t + 1\right)^{1/\alpha} \tag{6}$$

当 $\alpha \to \infty$，空间尺度因子 $R \to R_0$，时空间隔与（3）式对应。$\alpha = 1$ 时

$$R = R_0\left(H_0 t + 1\right) \tag{7}$$

空间尺度因子的导函数 $\dot{R} = R_0 H_0$ 为常数。$\alpha = 0$ 时

$$R = R_0 e^{H_H t} \tag{8}$$

坐标系空间膨胀率 $\dot{R}/R = H_H$ 为常数。若用原点时序差 dt 度量实物元的速度

$$u = r\sqrt{\left(\frac{d\ln r}{dt}\right)^2 + \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2} \tag{9}$$

代入四维间隔公式，则有

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} < dt \tag{10}$$

（10）式即相对论运动时钟变慢效应的表达式，且 $d\tau$ 与运动实物元本征时对应。

3.宇宙学R-W时空度规形式的相互转换

Friedmann 标准宇宙模型的四维时空间隔形式为

$$ds^2 = -c^2 d\tau_\zeta^2 + D^2\zeta^2\left[\frac{\left(d\ln\zeta\right)^2}{1 - k\zeta^2} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right] \tag{11}$$

D 是以时钟参数 τ_ζ 为自变量的空间尺度因子，常数 $k = 0, \pm 1$。$k = 0$，D 为常数的平直时空形式与（3）式对应。$k = \pm 1$ 时，（11）式可写成

$$ds^2 = -c^2 d\tau_\zeta^2 + D^2\zeta^2\left[\frac{\left(d\ln\zeta\right)^2}{1 \mp \zeta^2} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right] \tag{12}$$

将（5）式中时空微元交叉项进行下列整理

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(c^2 - \xi^2\dot{R}^2\right)dt^2 + 2\xi R\dot{R}d\xi dt + R^2 d\xi^2 + R^2\xi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\
&= -\left(c^2 - \xi^2\dot{R}^2\right)\left(dt^2 - 2\frac{\xi\dot{R}dtRd\xi}{c^2 - \xi^2\dot{R}^2} - \frac{R^2 d\xi^2}{c^2 - \xi^2\dot{R}^2}\right) + R^2\xi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\
&= -\left(c^2 - \xi^2\dot{R}^2\right)\left[\left(dt - \frac{\xi R\dot{R}d\xi}{c^2 - \xi^2\dot{R}^2}\right)^2 - \frac{c^2R^2d\xi^2}{\left(c^2 - \xi^2\dot{R}^2\right)^2}\right] + R^2\xi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\
&= -c^2\left(\sqrt{1 - \xi^2\dot{R}^2c^{-2}}dt - \frac{\xi R\dot{R}c^{-2}d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\right)^2 + R^2\xi^2\left[\frac{\left(d\ln\xi\right)^2}{1 - \xi^2\dot{R}^2c^{-2}} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]
\end{aligned}$$

（13）

（13）式在形式上具有完全平方结构。令

$$
\begin{aligned}
&-c^2\left(\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}dt-\frac{\xi R\dot{R}c^{-2}d\xi}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\right)^2+R^2\xi^2\left[\frac{\left(d\ln\xi\right)^2}{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right] \\
&=-c^2d\tau_\zeta^2+D^2\zeta^2\left[\frac{\left(d\ln\zeta\right)^2}{1\mp\zeta^2}+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

对应的三个独立等式为

$$
\begin{aligned}
&d\tau_\zeta{}^2=\left(\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\frac{dR}{\dot{R}}+\frac{R}{\dot{R}}d\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\right)^2 \\
&D^2\frac{d\zeta^2}{1\mp\zeta^2}=\frac{R^2d\xi^2}{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}} \\
&D^2\zeta^2=\xi^2R^2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

（15）式中 $\frac{dR}{\dot{R}}=dt$，与 $\alpha=1$ 对应的 $R=R_0H_0t+R_0=\dot{R}_0t+R_0$，即 $\dot{R}=\dot{R}_0$ 为定值时 $\frac{R}{\dot{R}}d\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}=-\frac{\xi R\dot{R}c^{-2}d\xi}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}$。此时，（15）式中的第一等式对应于全微分

$$
d\tau_\zeta=\frac{1}{\dot{R}_0}d\left(R\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\right)
\tag{16}
$$

新时序参数 τ_ζ 的变换公式为

$$
\tau_\zeta=\frac{R}{\dot{R}_0}\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}=\left(t+\frac{R_0}{\dot{R}_0}\right)\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}
\tag{17}
$$

由（15）式中的第二、三等式，消去参数 D

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta^2}\frac{d\zeta^2}{1\mp\zeta^2}&=\frac{1}{\xi^2}\frac{d\xi^2}{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}=\frac{1}{\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\left[d\left(\xi\dot{R}_0c^{-1}\right)\right]^2}{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}} \\
&=\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\xi\dot{R}_0c^{-1}}\right)^2\left(1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}\right)\left(d\frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}\right)^2
\end{aligned}
\tag{18}
$$

则两个新径向坐标满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\zeta_1^2}\frac{d\zeta_1^2}{1-\zeta_1^2}=\frac{1}{\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\left[d\left(\xi\dot{R}_0c^{-1}\right)\right]^2}{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}} \\
&\frac{1}{\zeta_2^2}\frac{d\zeta_2^2}{1+\zeta_2^2}=\frac{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}{\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\left(1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}\right)\left(d\frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}\right)^2
\end{aligned}
\tag{19}
$$

两种径向坐标变换关系分别为

$$\zeta_1 = \xi \dot{R}_0 c^{-1}$$
$$\zeta_2 = \frac{\xi \dot{R}_0 c^{-1}}{\sqrt{1-\xi^2 \dot{R}_0^2 c^{-2}}} \tag{20}$$

代入（15）式中的第三式，并考虑到（17）式，可得两个D参数

$$D_1 = c\frac{R}{\dot{R}_0} = c\left(t+\frac{R_0}{\dot{R}_0}\right) = \frac{c\tau_\zeta}{\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}$$
$$D_2 = c\frac{R}{\dot{R}_0}\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}} = c\left(t+\frac{R_0}{\dot{R}_0}\right)\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}} = c\tau_\zeta \tag{21}$$

满足（11）式$k=-1$的空间尺度因子为$D_2 = c\tau_\zeta$，且新空间坐标系径向坐标$\zeta_2(\xi)$值域对应自变量ξ的定义域为

$$\xi < c/\dot{R}_0 \tag{22}$$

至此，可解出 R-W 度规第二个显函数形式为

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 = -c^2d\tau_\zeta^2 + c^2\tau_\zeta^2\zeta_2^2\left[\frac{d\ln\zeta_2^2}{1+\zeta_2^2} + \left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{23}$$

为计算 R-W 度规的第三个显函数形式，将（1）式写成

$$c^2dt^2 = c^2d\tau^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{24}$$

以τ为自变量，取空间尺度因子形式为

$$R = R_0\left(\alpha H_0\tau+1\right)^{1/\alpha} \tag{25}$$

将$r=\xi R(\tau)$代入（24）式，可得

$$\begin{aligned}
c^2dt^2 &= \left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)d\tau^2 + 2\xi R\dot{R}d\xi d\tau + R^2d\xi^2 + R^2\xi^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\\
&= \left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)\left(d\tau^2 + 2\frac{\xi\dot{R}d\tau Rd\xi}{c^2+\xi^2\dot{R}^2} + \frac{R^2d\xi^2}{c^2+\xi^2\dot{R}^2}\right) + R^2\xi^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\\
&= \left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)\left[\left(d\tau + \frac{\xi R\dot{R}d\xi}{c^2+\xi^2\dot{R}^2}\right)^2 + \frac{c^2R^2d\xi^2}{\left(c^2+\xi^2\dot{R}^2\right)^2}\right] + R^2\xi^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\\
&= c^2\left(\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}d\tau + \frac{\xi R\dot{R}c^{-2}d\xi}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\right)^2 + R^2\xi^2\left[\frac{\left(d\ln\xi\right)^2}{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]
\end{aligned}$$

（26）

令

$$c^2\left(\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}d\tau+\frac{\xi R\dot{R}c^{-2}d\xi}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}\right)^2+R^2\xi^2\left[\frac{\left(d\ln\xi\right)^2}{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]$$
$$=c^2d\tau_\eta^2+D^2\eta^2\left[\frac{\left(d\ln\eta\right)^2}{1\mp\eta^2}+\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{27}$$

对应的三个独立等式为

$$\begin{aligned}
&d\tau_\eta{}^2=\left(\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\frac{dR}{\dot{R}}+\frac{R}{\dot{R}}d\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\right)^2\\
&D^2\frac{d\eta^2}{1\mp\eta^2}=\frac{R^2d\xi^2}{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}\\
&D^2\eta^2=\xi^2R^2
\end{aligned} \tag{28}$$

式中$\frac{dR}{\dot{R}}=d\tau$，取（25）式中$\alpha=1$，则有$\dot{R}=\dot{R}_0$，$\frac{R}{\dot{R}}d\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}=\frac{R\xi\dot{R}c^{-2}d\xi}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}^2c^{-2}}}$，则（25）式中第一式为

$$d\tau_\eta=\frac{1}{\dot{R}_0}d\left(R\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\right) \tag{29}$$

新时序参数τ_η的变换公式为

$$\tau_\eta=\frac{R}{\dot{R}_0}\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}=\left(\tau+\frac{R_0}{\dot{R}_0}\right)\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}} \tag{30}$$

由（28）式中的第二、三等式，消去参数D

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta^2}\frac{d\eta^2}{1\mp\eta^2}&=\frac{1}{\xi^2}\frac{d\xi^2}{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}=\frac{1}{\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\left[d\left(\xi\dot{R}_0c^{-1}\right)\right]^2}{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\\
&=\left(\frac{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}{\xi\dot{R}_0c^{-1}}\right)^2\left(1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}\right)\left(d\frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}\right)^2
\end{aligned} \tag{31}$$

则可得两个径向坐标满足

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1^2}{1+\eta_1^2}=\frac{1}{\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\frac{\left[d\left(\xi\dot{R}_0c^{-1}\right)\right]^2}{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\\
&\frac{1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2^2}{1-\eta_2^2}=\frac{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}{\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}\left(1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}\right)\left(d\frac{\xi\dot{R}_0c^{-1}}{\sqrt{1+\xi^2\dot{R}_0^2c^{-2}}}\right)^2
\end{aligned} \tag{32}$$

两个径向坐标解函数分别为

$$\eta_1 = \xi \dot{R}_0 c^{-1}$$
$$\eta_2 = \frac{\xi \dot{R}_0 c^{-1}}{\sqrt{1+\xi^2 \dot{R}_0^2 c^{-2}}} \tag{33}$$

（28）式中的两个D参数分别为

$$D_3 = c\frac{R}{\dot{R}_0} = c\tau + c\frac{R_0}{\dot{R}_0} = \frac{c\tau_\eta}{\sqrt{1+\xi^2 \dot{R}_0^2 c^{-2}}}$$
$$D_4 = R\frac{c}{\dot{R}_0}\sqrt{1+\xi^2 \dot{R}_0^2 c^{-2}} = c\left(\tau + \frac{R_0}{\dot{R}_0}\right)\sqrt{1+\xi^2 \dot{R}_0^2 c^{-2}} = c\tau_\eta \tag{34}$$

满足 R-W 度规条件的可能解为$D_4 = c\tau_\eta$，变换函数$\eta_2(\xi)$自变量ξ的定义域不受限。代入（24）式

$$c^2 dt^2 = c^2 d\tau_\eta^2 + c^2 \tau_\eta^2 \eta_2^2 \left(\frac{d\ln \eta_2^2}{1-\eta_2^2} + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{35}$$

容易看出（35）式与 R－W 度规在形式上不同，还需要进行下列非线性时钟坐标变换$(t,\tau_\eta) \to (\tau_\alpha \tau_0, \tau_\beta \tau_0)$，$\tau_0$为时间单位符号

$$t/t_0 \equiv \left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)e^{\tau_\beta}$$
$$\tau_\eta/\tau_0 \equiv \left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)e^{\tau_\beta} \tag{36}$$

进行微分计算

$$dt/t_0 = e^{\tau_\beta}\left[\left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)d\tau_\alpha + \left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)d\tau_\beta\right]$$
$$d\tau_\eta/\tau_0 = e^{\tau_\beta}\left[\left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)d\tau_\alpha + \left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)d\tau_\beta\right] \tag{37}$$

微分平方分别为

$$dt^2/t_0^2 = e^{2\tau_\beta}\left[\left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)^2 d\tau_\alpha^2 + \left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)^2 d\tau_\beta^2 + 2\left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)\left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)d\tau_\alpha d\tau_\beta\right]$$
$$d\tau_\eta^2/\tau_0^2 = e^{2\tau_\beta}\left[\left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)^2 d\tau_\alpha^2 + \left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)^2 d\tau_\beta^2 + 2\left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)\left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)d\tau_\alpha d\tau_\beta\right] \tag{38}$$

考虑到t为原点本征时，将所有本征时单位统一$t_0 = \tau_0$，则微分平方差为

$$\left(dt^2 - d\tau_\eta^2\right)/\tau_0^2 = e^{2\tau_\beta}\left[\left(e^{\tau_\alpha} + e^{-\tau_\alpha}\right)^2 - \left(e^{\tau_\alpha} - e^{-\tau_\alpha}\right)^2\right]\left(d\tau_\alpha^2 - d\tau_\beta^2\right) \tag{39}$$

结合（36）式，可得

$$\frac{dt^2-d\tau_\eta^2}{\tau_\eta^2}=\frac{e^{2\tau_\beta}\left[\left(e^{\tau_\alpha}+e^{-\tau_\alpha}\right)^2-\left(e^{\tau_\alpha}-e^{-\tau_\alpha}\right)^2\right]\left(d\tau_\alpha^2-d\tau_\beta^2\right)}{\left(e^{\tau_\alpha}-e^{-\tau_\alpha}\right)^2e^{2\tau_\beta}}$$
$$=\frac{4}{\left(e^{\tau_\alpha}-e^{-\tau_\alpha}\right)^2}\left(d\tau_\alpha^2-d\tau_\beta^2\right) \tag{40}$$

代入（35）式后，可得与 R-W 度规中$k=1$对应的四维间隔

$$-c^2\tau_0^2d\tau_\beta^2=-c^2\tau_0^2d\tau_\alpha^2+c^2\left(\frac{e^{\tau_\alpha}-e^{-\tau_\alpha}}{2}\tau_0\right)^2\eta_2^2\left[\frac{\left(d\ln\eta_2\right)^2}{1-\eta_2^2}+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right] \tag{41}$$

取无量纲的数学形式

$$-d\tau_\beta^2=-d\tau_\alpha^2+\left(\frac{e^{\tau_\alpha}-e^{-\tau_\alpha}}{2}\right)^2\eta_2^2\left[\frac{\left(d\ln\eta_2\right)^2}{1-\eta_2^2}+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right] \tag{42}$$

与 R-W 度规对应的空间尺度因子：$D\left(\tau_\alpha\right)=c\frac{e^{\tau_\alpha}-e^{-\tau_\alpha}}{2}\tau_0$。时钟变换公式为

$$\tau_\alpha=\ln\sqrt{\frac{t-\tau_\eta}{t+\tau_\eta}}$$
$$\tau_\beta=\ln\left(\frac{t}{4\tau_0}\sqrt{\frac{t^2}{\tau_\eta^2}-1}\right) \tag{43}$$

可见，从常数尺度因子形式下的平直四维时空间隔（3）式出发，能够通过尺度因子函数变换到（23）、（42）式。（23）、（42）两种间隔形式对应的度规失去逻辑空间的平直性形式，但仍保持了物理空间的均匀性本质。

4.广义相对论西瓦斯时空度规的近似性

对（5）式进行如下整理

$$\begin{aligned}ds^2&=-\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)dt^2+R^2d\xi^2+2\xi R\dot{R}d\xi dt+\xi^2R^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\\&=-\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)dt^2+R^2\xi^2\left(\left(d\ln\xi\right)^2+2d\ln\xi\frac{dR}{R}+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\\&=-\left(c^2-\xi^2\dot{R}^2\right)dt^2+R^2\xi^2\left[\left(d\ln\xi\right)^2+2d\ln\xi d\ln R+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]\\&=-\left(1-\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)c^2dt^2+R^2\xi^2\left[\left(d\ln\xi\right)^2\left(1+2\frac{d\ln R}{d\ln\xi}\right)+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]\\&=-\left(1-\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}\right)c^2dt^2+R^2\xi^2\left[\left(d\ln\xi\right)^2\left(1+\frac{2c}{R\dot{\xi}}\frac{\xi\dot{R}}{c}\right)+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]\end{aligned} \tag{44}$$

式中$\frac{d\ln R}{d\ln\xi}=\frac{dR}{Rdt}\frac{\xi dt}{d\xi}=\frac{c}{R\dot{\xi}}\sqrt{\left(\frac{\xi\dot{R}}{c}\right)^2}$。一般情况下，运动实物元的$\xi(t)$具有任意性，函数$\dot{\xi}=F(\xi,t)\frac{\xi\dot{R}}{R}$代表实物元径向运动微分方程，$F(\xi,t)$为待定函数。

但是，当整体物质系统具有统计平衡性时，实物元运动相对于整体而言是一种空间顺序互换效应。此时的$\xi(t)$并非某一个确定实物元的运动轨迹，而是平衡状态下实物元空间位置互换顺序对应的一种统计形式。实物元之间空间位置的这种互换保持了物质系统整体的平衡，即呈现一种统计意义上的稳定的可观测结构，此时(44)式中的$\xi(t)$与物质整体特性有关。考虑到球对称性，与r相关的基本物理基本参数为质量$M=\frac{4\pi}{3}r^3\bar{\rho}$、平均密度$\bar{\rho}$。结合引力常数$G$，$r$、$H$、$M$或$\bar{\rho}$可构成无量纲参数

$$\chi=\frac{GM}{H^2r^3}=\frac{4\pi G}{3}\frac{\bar{\rho}}{H^2} \tag{45}$$

对于$\alpha=0\to R=R_0e^{H_Ht}\to H=H_H$，可得$\chi$与时空坐标无关的条件为

$$\chi=\frac{4\pi}{3}\frac{G\bar{\rho}}{H_H^2}=const\to\bar{\rho}=const \tag{46}$$

即以空间体积为度量基础的密度$\bar{\rho}$参数为常数。$H_H=\sqrt{\frac{4\pi G\bar{\rho}}{3\chi}}$即与平均密度值相关的哈勃常数。在$\bar{\rho}$为常数的模型下，可得

$$\chi\xi^2\dot{R}^2=\chi r^2H^2=\frac{GM}{r}=G\frac{4\pi\bar{\rho}r^2}{3} \tag{47}$$

容易看出$\frac{GM}{r}$对应于单位质量实物元在球半径r处的引力势能值。四维间隔公式中的无量纲参数$\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}=r^2H^2\varepsilon_0\mu_0$。由（6）式的一般$R(t)$函数可得

$$\dot{R}=\frac{H_0}{\alpha H_0t+1}R_0\left(\alpha H_0t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{H_0}{\alpha H_0t+1}R=\frac{H_0}{\left(R/R_0\right)^{\alpha}}R=\frac{H_0R_0^{\alpha}}{R^{\alpha-1}} \tag{48}$$

则

$$\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}=\frac{\xi^2R^{2-2\alpha}H_0^2R_0^{2\alpha}}{c^2}=\frac{\xi^3R^3H_0^2R_0^{2\alpha}}{\xi R^{2\alpha+1}c^2}=\frac{V}{\xi R^{2\alpha+1}}\frac{3H_0^2R_0^{2\alpha}}{4\pi c^2} \tag{49}$$

式中$V\equiv\frac{4\pi\xi^3R^3}{3}$为空间球体积。若取$\alpha=0$，则有

$$\frac{\xi^2\dot{R}^2}{c^2}=\frac{V}{\xi R}\frac{3H_H^2}{4\pi c^2}=\frac{M}{r}\frac{3H_H^2}{4\pi\bar{\rho}c^2} \tag{50}$$

将（47）式代入（44）式最后一个等式，可得

$$ds^2=-c^2d\tau^2$$
$$=-\left(1-\frac{GM}{\chi c^2r}\right)c^2dt^2+R^2\xi^2\left[\left(d\ln\xi\right)^2\left(1+\frac{2c}{\dot{\xi}R}\sqrt{\frac{GM}{\chi c^2r}}\right)+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right] \tag{51}$$

在物质系统整体统计稳定条件下，取待定函数$\xi(t)$满足

$$1+\frac{2c}{\dot{\xi}R}\sqrt{\frac{GM}{\chi c^2r}}=\frac{1}{1-\frac{GM}{\chi c^2r}}=\frac{1}{1-\frac{G4\pi\bar{\rho}}{3\chi c^2}r^2} \tag{52}$$

则（51）式变成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\left(1-\frac{G}{\chi c^2}\frac{M}{R\xi}\right)c^2\mathrm{d}t^2+R^2\xi^2\left[\frac{\left(\mathrm{d}\ln\xi\right)^2}{1-\frac{G}{\chi c^2}\frac{M}{R\xi}}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right]\\&=-\left(1-\frac{G4\pi\bar{\rho}}{3\chi c^2}r^2\right)c^2\mathrm{d}t^2+r^2\left[\frac{\left(\mathrm{d}\ln\xi\right)^2}{1-\frac{G4\pi\bar{\rho}}{3\chi c^2}r^2}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right]\end{aligned} \tag{53}$$

考虑到哈勃常数的量级，一般情况下$H_Ht\ll1$，（7）式中$R\approx R_0$。则有近似

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{G}{\chi c^2}\frac{M}{R_0\xi}\right)c^2\mathrm{d}t^2+R_0^2\xi^2\left\{\frac{\left[\mathrm{d}\ln\left(R_0\xi\right)\right]^2}{1-\frac{G}{\chi c^2}\frac{M}{R_0\xi}}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right\} \tag{54}$$

广义相对论中，星球外局域空间真空近似条件下的史瓦西时空四维间隔为

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\mathrm{d}t^2+r^2\left[\frac{\left(\mathrm{d}\ln r\right)^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right] \tag{55}$$

考虑到（54）、（55）两式中质量相等，可推得$\chi=\frac{1}{2}$。

若取尺度因子函数中$\alpha=\frac{3}{2}$，$R=R_0\left(\frac{3}{2}H_0t+1\right)^{\frac{2}{3}}$，则有

$$H^2r^3=\frac{H_0^2}{\left(\alpha H_0t+1\right)^2}\xi^3R_0^3\left(\alpha H_0t+1\right)^{\frac{3}{\alpha}}=H_0^2R_0^3\xi^3 \tag{56}$$

（45）式中无量纲参数χ与时空坐标无关的条件为

$$\chi=\frac{GM}{H^2r^3}=\frac{GM}{H_0^2\xi^3R_0^3}=\frac{G}{H_0^2R_0^3}\frac{M}{\xi^3}=const\rightarrow\frac{M}{\xi^3}\sim\bar{\rho}_\xi=const \tag{57}$$

即以空间坐标球体积为度量基础的密度 $\bar{\rho}_\xi$ 为常数。对应的四维时空间隔可写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\left(1-\frac{G}{\chi c^2}\frac{M}{R\xi}\right)c^2\mathrm{d}t^2+R^2\xi^2\left[\frac{(\mathrm{d}\ln\xi)^2}{1-\frac{G}{\chi c^2}\frac{M}{R\xi}}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right]\\&=-\left(1-\frac{4\pi G\bar{\rho}_\xi}{3\chi c^2}\frac{\xi^2}{R}\right)c^2\mathrm{d}t^2+R^2\xi^2\left[\frac{(\mathrm{d}\ln\xi)^2}{1-\frac{4\pi G\bar{\rho}_\xi}{3\chi c^2}\frac{\xi^2}{R}}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right]\end{aligned} \tag{58}$$

考虑在局域性空间范围内，取 $\frac{3}{2}H_0t\ll1$ 近似

$$R=R_0\left(\frac{3}{2}H_0t+1\right)^{2/3}\approx R_0 \tag{59}$$

（58）式转变成

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{GM}{\chi c^2R_0\xi}\right)c^2\mathrm{d}t^2+R_0^2\xi^2\left\{\frac{\left[\mathrm{d}\ln(R_0\xi)\right]^2}{1-\frac{GM}{\chi c^2R_0\xi}}+\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right\} \tag{60}$$

与（55）式相比，同样可推得 $\chi=1/2$。可见，史瓦西度规不仅仅是真空近似，还是局域不均匀条件下对应于 $R\approx R_0$ 的近似形式。

5.四维时空间隔微元量的观测意义

为了进一步明晰四维时空度规的物理本质，需要从物理观测的基本角度讨论时空坐标微元量的观测意义。

（1）式中，有与空间概念对应的两个角度微元 $d\theta$ 、$d\varphi$ 和一个距离微元 dr，还有两个时钟微元 dt 、$d\tau$ 。在物理学模型中，必须首先搞清楚（1）式四维间隔与何种可观测物理过程对应。dt 代表原点两次相邻闪光信号之间的时间间隔，$d\tau$ 代表非原点实物元 (r,θ,φ) 接收到该对闪光信号之间的时间间隔，信号源和实物元都只能以自身本征时钟记录时间间隔。与相邻闪光信号时间间隔对应的实物元运动量为 $(dr,d\theta,d\varphi)$ 。五个微元量是原点一对相邻闪光信号的不同表现形式。

空间坐标参数(r,θ,φ)也与上述闪光信号有关，其中r代表闪光信号从原点到信号接收元之间的光子自由程，r也代表基于确定光子的光源、接收实物元之间空间距离。脱离了信号及信号传播过程，时空坐标(t,r,θ,φ)形式将失去明确的测量意义，而是对应于抽象的、绝对的、均匀的、数学的时空概念。所以，相对论基于自然界最普遍的光信号建立的相对时空概念能够更好地与高精度观测结果吻合。

（6）式引入空间尺度因子$R(t)$作为光子自由程的度量单位，即用新的径向坐标数$\xi = r/R(t)$作为度量光子自由程r的一种形式，$R(t)$中的时序数t代表确定光子从原点到(r,θ,φ)的自由传播过程。而尺度因子函数自身的观测意义是自由传播光子的周期参数$T = R/c$。根据（6）式，径向坐标点的本征时微元

$$d\tau_{\xi} = dt\sqrt{1-u_{\xi}^{2}c^{-2}} = dt\sqrt{1-\xi^{2}\dot{R}^{2}c^{-2}} \tag{61}$$

显然，即使$\dot{R}(t) = \dot{R}_0$为常数，不同径向坐标点的时钟也不等价。从物理测量角度考察，与$k=-1$对应的 R-W 度规为由观测者时钟$d\tau$、坐标点时钟$d\tau_{\zeta}$、空间坐标(ζ_2,θ,φ)描述的原点两次相邻闪光信号传播过程的一种形式。

与（17）式将光源时序t变换成坐标点时序形式τ_{ζ}类似，（30）式将观测者时序τ变换成坐标点时序形式τ_{η}，进一步再变换成τ_{α}、τ_{β}。这两次时序变换从形式上掩盖了原点光源时钟观测记录、实验室接收信号时钟观测记录的基础地位，导致四维时空间隔形式上脱离直接观测数据。从而造成了对四维时空间隔物理意义理解出现歧义的可能性。

基于（36）式的进一步非线性时钟形式变换，最终获得（41）式，即计算出 R-W 度规的第三个显函数形式。将后两种度规对应的空间径向坐标变换式写成

$$\left(1+\zeta_2^2\right)\left(1-\xi^2\dot{R}_0^2/c^2\right) = \left(1+\zeta_2^2\right)\left(1-\xi'^2\right) = 1 \qquad \zeta_2 \in (0,\infty), \xi' \in (0,1] \tag{62}$$

$$\left(1-\eta_2^2\right)\left(1+\xi^2\dot{R}_0^2/c^2\right) = \left(1-\eta_2^2\right)\left(1+\xi'^2\right) = 1 \qquad \eta_2 \in (0,1], \xi' \in (0,\infty) \tag{63}$$

从纯逻辑形式角度考察，这两种空间坐标变换表现为位置互换关系，并没有新的几何性质。

我们认为，借助于空间尺度因子函数实现了 R—W 度规的三个类型之间的互换，表明三个度规只是均匀、各向同性物理空间本质的不同描述形式，符合爱因

斯坦广义协变性原理。但是，由于$R(t)$函数形式的缺失，三个度规之间的内在联系被阻断了近一个世纪！

在四维间隔形式中，(ξ,θ,φ)代表空间几何点，几何“点”是一个数学抽象概念而不是物理学概念。物理学的基础是“质点”概念的，质点代表具有辐射、接收信号性质的实物元。实物元因其内部物质结构能够发出光子信号，也能够接收辐射光信号，所以“质点”具有计时功能。光信号成为不同质点之间建立信息联系、实现能量转移的观测基础。

在闵可夫斯基平直四维时空形式中，四维间隔为

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{64}$$

（64）式中时钟参数dt、$d\tau$严格意义上对应于相邻光源、观测者时钟。当用空间球坐标形式时，（64）式变换成（1）式，出现了r、dr两个径向距离参数。当孤立地考察这两个距离参数时，可认为它们对应于三个坐标点。其实不然，dr代表一个“质点”与dt对应的“物理过程”。所以，（64）式的抽象形式必须与具体的“信号过程”对应才能准确反映其物理意义。

取$\alpha=0$，即$\bar{\rho}$为常数的物理模型中，参考系坐标点的“径向”速度、加速度分别为

$$\begin{aligned} u_\xi &\equiv \frac{\partial r}{\partial t} = \xi\frac{dR}{dt} = H_H \xi R = H_H r \\ a_\xi &\equiv \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = H_H^2 \xi R = H_H^2 r = \frac{u_\xi^2}{r} \end{aligned} \tag{65}$$

其中第一式与哈勃定律对应，反映均匀宇宙中自由传播光子红移$\dfrac{T-T_0}{T_0}$与光程r成正比的特性。取$\alpha=3/2$，即$\bar{\rho}_\xi$为常数的物理模型中，参考坐标点的“径向”速度、加速度分别为

$$\begin{aligned} u_\xi &\equiv \xi R_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}H_0 t + 1\right)^{\frac{2}{3}} = H_0 \frac{(\xi R_0)^{3/2}}{\sqrt{\xi R}} = H_0 \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{r}} \\ a_\xi &\equiv \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{H_0^2 r_0^3}{2} r^{-2} \end{aligned} \tag{66}$$

（66）式中第二式对应于“真空环境”中两个质点之间的万有引力公式

$$a_\xi = -\frac{GM}{r^2 m} \tag{67}$$

由于真空模型中仅仅存在两个实物元，故坐标$\xi\equiv 1$。由此可见，在物质分布不均匀的“真空环境”中，两个质点之间的牛顿引力公式严格意义上是与$\alpha=\dfrac{3}{2}$对

应的均匀膨胀空间坐标系形式，r 即实物元质点模型 M 和 m “质心”之间的空间距离。

6.小结

均匀平直空间可以用基于传播信号特征的不同尺度因子进行度量。若取随时序变化的空间尺度因子，则可建立均匀膨胀空间球坐标系。基于宇宙学原理的物理均匀、各向同性的相对论时空具有内在逻辑统一性的形式，即 R-W 度规的三种形式能够实现相互之间的转换。并且，由均匀膨胀空间坐标系也能够转换成史瓦西度规。据此，我们认为，在中心对称性基础上，非线性的随时序变化空间尺度因子形式导致空间坐标系具有非欧几何特性。我们所观测到的宇宙结构，是整体上稳定性和局域不均匀性的合成，“膨胀宇宙”实质上是对膨胀空间坐标系形式特征的一种理解。