



武汉理工大学

Wuhan University of Technology

量子信息网络中高斯信道的研究

报告人： 郭 柳

导 师： 毕桥教授



武汉理工大学

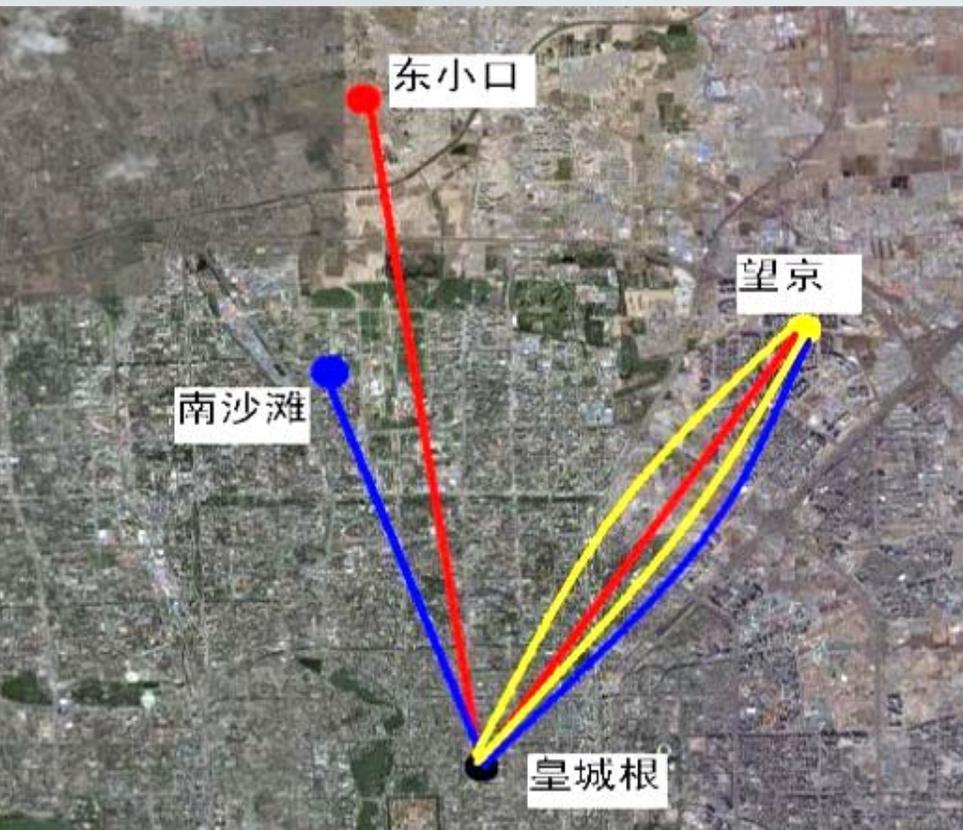
主要内容

- 一 研究背景
- 二 研究内容及创新点
- 三 总结与展望



一：研究背景

❖ 我们生活在一个信息时代，在这样的时代信息科学在改善人类生活质量和推进社会文明发展中发挥着令人惊叹的作用，呈现出无可比拟的优越性。网络充满整个世界，网络世界已经成为信息时代生活中不可或缺的重要部分，越来越为人们所关注。我们这里着重描述网络的一个重要组成部分：量子信息网络。它处理和计算的是量子信息，运行的是量子算法。量子信息网络中的网络节点可以由一群在空腔中或量子点中陷域原子或光子组成，节点间通过量子信道联接，光子在连接两个网络节点的信道中传输量子信息。不同节点间的相互作用是由在量子信道中传输的光子决定的，这些信道将网络中的各个节点联系在一起，因此它在网络中扮演重要角色。



郭光灿小组解决了量子信息自动寻址的难题，在北京成功测试运行我国第一个量子密码网络系统。

由中科大潘建伟小组建成世界首个光量子电话网，绝对安全通信距离达200公里。



二：本文的研究内容及创新点

1

构建量子高斯信道

2

提出量子动力学互信息

与经典动力学方程进行比较

讨论量子动力学互信息新特征

3

提出量子态并行性方案



研究内容及创新点一

❖ 构建量子高斯信道：

由于外界环境对网络有干扰，量子或量子态在信道中传输时存在噪声

噪声，如果信道中的噪声是高斯噪声，则称这种信道是量子高斯信道。

特点：在此信道中高斯噪声是平稳的随机过程且其瞬时值的概率密度函数满足高斯分布（即正态分布）。

量子高斯信道可从量子**Fokker-Plank**方程引入，在相干态表象中，用量子信息密度（**QID**）描述的量子**Fokker-Plank**方程为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\alpha, \alpha^*, t) \ln f(\alpha, \alpha^*, t) &= \left[\left(\frac{r_0}{2} + i\omega_0 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \left(\frac{r_0}{2} - i\omega_0 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + r_0 N \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \\ &\quad \cdot f(\alpha, \alpha^*, t) \ln f(\alpha, \alpha^*, t) \\ &\equiv -i \Theta f(\alpha, \alpha^*, t) \ln f(\alpha, \alpha^*, t) \end{aligned} \quad (1)$$



研究内容及创新点一

方程的解为:

$$f(\alpha, \alpha^*, t) \Big|_{(\alpha_0, \alpha_0^*, 0)} = \frac{1}{\pi N (1 - e^{-r_0 t})} \exp \left[- \frac{\left(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{r_0}{2} t} e^{-i\omega_0 t} \right)^2}{\pi N (1 - e^{-r_0 t})} \right] \quad (2)$$

假设:

$$\zeta^2 \equiv \pi N (1 - e^{-r_0 t}) \left(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{r_0}{2} t} e^{-i\omega_0 t} \right)^2 \quad (3)$$

$$\sigma_z(t) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{2} N (1 - e^{-r_0 t}) \quad (4)$$

将 (3) (4) 两式代入方程的解 (2) 中, 得到 **Fokker-Plank** 方程相应的解为:



研究内容及创新点一

$$f(\alpha, \alpha^*, t)|_{(\alpha_0, \alpha_0^*, 0)} = f_z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_z(t)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_z^2(t)}\right) \quad (5)$$

由于

$$\sigma_z(t) = \sigma_{in}(t) + \sigma_{no}(t) \quad (6)$$

$\sigma_{in}^2(t)$ 和 $\sigma_{no}^2(t)$ 分别表示输入信号和噪声的平均功率，假设它们对应于高斯分布的随机变量。

$$f_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{in}(t)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma_{in}^2(t)}\right] = f_{in}(\xi) \quad (7)$$

和

$$f_y(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{no}(t)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\sigma_{no}^2(t)}\right] = f_{no}(\eta) \quad (8)$$

这里 $f_x(\xi)$, $f_y(\eta)$ 和 $f_z(\zeta)$ 分别为 x , y , z 三个方向上的概率密度函数。



研究内容及创新点一

由条件熵的定义，我们得到，

$$\begin{aligned} H(x|z) &= H(x, z) - H(z) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,z}(\xi, \zeta) \ln f_{x|z}(\xi|\zeta) d\xi d\zeta \\ &= \left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,z}(\xi, \zeta) \ln f_{x,z}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \right] - \left[-\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\zeta) \ln f_z(\zeta) d\zeta \right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中：

$$\begin{aligned} H(z) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\zeta) \ln f_z(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_z^2(t) + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

上式中方差 $\sigma_z^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta - m)^2 f_z(\zeta) d\zeta$ ， $\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\zeta) d\zeta = 1$ 。



研究内容及创新点二

利用式（9）和（10）得到在量子高斯信道中量子动力学互信息在相干态下的表示：

$$\begin{aligned} I(x; z) &= H(x) - H(x|z) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\xi) \ln f_x(\xi) d\xi - \left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,z}(\xi, \zeta) \ln f_{x|z}(\xi|\zeta) d\xi d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{\sigma_{in}^2(t)}{\sigma_{no}^2(t)} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

邢修三教授首先建立了经典动力学互信息论，之后我们发现量子动力学互信息量计算公式可以在经典现有的动力学互信息理论上推广为

$$I(A_0(0); B_t(t)) = I(A_0(0)) - I(A_0(0) | B_t(t)) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_{in}^2(t)}{\sigma_{no}^2(t)} \right) \quad (12)$$



研究内容及创新点二

式 (12) 和同邢修三得出的经典高斯动力学互信息公式相协调。

动力学互信息的意义是：信宿在 t 时于输出端 $x=l$ 处，从态 $B_l(t)$ 中获取此刻从输入端由信源传递的态 $A_0(0)$ 中的信息量。

这里

总的光子数

$$\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} N(1 - e^{-r_0 t}) - \sigma_{no}(t) \right)^2 = \sigma_{in}^2(t) \quad (13)$$

对量子动力学互信息方程 (12) 式进行讨论：

(1) 当 $t \rightarrow 0$ 时, $I(A_0(0); B_l(t)) = \frac{1}{2} \ln 2$ 。即信号从输入端传递到输出端不需要任何时间，即两端处在同一个点，噪声源亦集中在这一点上，这就回归到现有的静态通信模型。



研究内容及创新点二

(2) 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$I(A_0(0); B_l(t)) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} N - \sigma_{no}(t) \right)^2}{\sigma_{no}^2(t)} \right)$$

可看作信道长度很长（或信号传递速度很慢），而且信道中噪声强度大时，从输入端输入的信息在时空传递途中随着距离的增加会出现信息减损，输出端接收到的信息 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(A_0(0); B_l(t)) \neq 0$ ，趋近于一个小值，这和经典的信道情况不同。



研究内容及创新点二

但必须有 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} N (1 - e^{-r_0 t}) > \sigma_{no}(t)$ ，否则无物理意义。所以这时如果 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} N < \sigma_{no}(t \rightarrow \infty)$ ，则其物理意义相当于输入信息将完全被噪声所覆盖。当 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} N > \sigma_{no}(t \rightarrow \infty)$ 时，输出端接收到的信息量趋近于一个小值，这和经典的信道情况不同。究其原因，可以认为是由量子高斯信道的量子效应所导致的。这就说明在量子高斯信道中总有 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} N$ 输入信息是没有损耗的，同信道长度 l 无关。非常有意思的是这里 N 为组成一个谐振子的光子总数。这种没有损耗的传播是不是同这个谐振子高度量子相干有关呢？



研究内容及创新点三

❖ 量子高斯信道的并行性

假设一个谐振子是由 N 个光子组成的复合量子系统，如果赋予谐振子的波函数为 $|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} N(1 - e^{-r_0 t})$ 是 N 个光子波函数的张量积，则有

$$|\Psi\rangle = \prod_{n=1}^N |\phi_n\rangle \quad (14)$$

式中个 N 光子的波函数分别为 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$ 。

考虑在谐振子相干态上加密的量子信息为量子比特，希望这些加密信息同构成谐振子的 N 个光子的波函数有关。谐振子的本征函数为 $|\phi_j\rangle$ ，谐振子的波函数为 $|\phi_n\rangle = \sum C_j |\phi_j\rangle$ ；光子的任意一个本征函数为 $|\psi_j\rangle$ ，谐振子本征的波函数是由光子的本征函数的张量积 $|\phi_j\rangle = \prod_{l=1}^N |\psi_l\rangle$ 。

研究内容及创新点三

在量子高斯信道中，假设承载在各个光子加密态上的信息分别存储在系数 C_1, \dots, C_N 中，把这些系数看作信号，则在输出端我们只需要解码上述系数就能得到信息。

关键问题是这些系数该如何确定？

$$\left. \begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_j C_j |\phi_j\rangle \\ |\Psi\rangle &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} N(1 - e^{-r\sigma^2}) \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} C_j &= \langle \Psi^* | \phi_j \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2\pi}}{2} N(1 - e^{-r\sigma^2}) | \phi_j \right\rangle \\ |\phi_j\rangle &= \prod_{l=1}^N |\psi_l\rangle \end{aligned} \quad (15)$$

N 个 $|\psi_l\rangle$ 确定 N 个 $|\phi_j\rangle$

研究内容及创新点三

❖ 量子态并行性方案

信源	量子高斯信道	信宿
$C_1\phi_1$		C_1
\vdots		\vdots
$C_N\phi_N$		C_N



总结与展望

- ❖ 本文从量子**Fokker-Plank**方程出发，在量子信息网络中构造出一种可行的量子高斯信道。在该信道下，证明了该方程的解满足高斯分布。变换**Fokker-Plank**方程的解并代入互信息公式经过一系列的复杂运算，得到相干态表象中的量子动力学互信息方程，在此基础上，提出了具有可行性的量子态并行传播方案。
- ❖ 这意味着我们在量子高斯信道中可以不用再考虑量子纠缠以及用相关的量子逻辑运算来实现量子并行传播。并且在信道中并行传播的波函数数目越多，确定编码在系数的计算量越大，该方法的保密性越好。从实际应用角度考虑，这种方案具有更好的可控制性，可能较容易操作和实现。

谢谢各位，请遵守！



武汉理工大学