

天文观测中常用的坐标系有三种：赤道坐标系，银道坐标系和超星系坐标系。银道坐标系的北极在赤道坐标系中位于R.A. 12h51m26.282s, Dec. +27° 07' 42.01"， θ 和 ϕ 的零点位于R.A. 17h45m37.224s, Dec. +28° 56' 10.23"。超星系坐标系的北极在赤道坐标系中位于R.A. 18h55m01s, Dec. +15° 42'32"， θ 和 ϕ 的零点位于R.A. 2h49m14s, Dec. +59° 31'42"。

下面一般地讨论旋转坐标变换的转换矩阵，这对于以上三种坐标系之间的变换都适用。假定坐标系2的z轴(北极)在坐标系1中的方向为 $z_2 = (\theta_z, \phi_z)$ ，x轴（零点）的方向为 $x_2 = (\theta_x, \phi_x)$ 。先考虑如何将坐标系1变为坐标系2，相应的一个矢量在坐标系1中的坐标到坐标系2中的坐标的变换矩阵就是坐标系变换矩阵的逆矩阵（主动观点和被动观点）。可以通过三次比较方便的旋转将坐标系1转到与坐标系2重合。首先将坐标系1沿坐标系1的x轴将z轴正方向向y轴负方向旋转 $\theta_{1-m} = \pi/2 - \theta_z$ ，然后再沿坐标系1的z轴逆时针旋转 $\phi_{1-m} = \phi_z - 3\pi/2$ ，此时转动后的z轴已经与坐标系2的z轴重合，原则上再沿坐标系2的z轴转动一个合适的角度就可以于坐标系2完全重合了。现在来计算这个角度 ϕ_{m-2} （即上述前两次转动后的x轴与坐标系1的x轴的夹角）。

坐标系1的x轴为 $x_1 = (1, 0, 0)$ ，施加两次转动后可以表示为

$$x_m^T = M_2 M_1 x_1^T, \quad (1)$$

其中

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{1-m} & -\sin \theta_{1-m} \\ 0 & \sin \theta_{1-m} & \cos \theta_{1-m} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi_{1-m} & -\sin \phi_{1-m} & 0 \\ \sin \phi_{1-m} & \cos \phi_{1-m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

所以 $x_m = (\cos \phi_{1-m}, \sin \phi_{1-m}, 0)$ 。 x_m 和 x_2 的夹角为 $\phi_{m-2} = \arcsin |x_m \times x_2|$ 。所以总的变换可以写为 $R_{z_2}(\phi_{m-2})M_2M_1$ ，其中 $R_{z_2}(\phi_{m-2})$ 表示沿 z_2 轴逆时针转动 ϕ_{m-2} 。注意到 $z_2 = M_2M_1z_1$ ，有

$$R_{z_2}(\phi_{m-2}) = R_{M_2M_1z_1}(\phi_{m-2}) = M_2M_1R_{z_1}(\phi_{m-2})(M_2M_1)^{-1} \quad (4)$$

所以总的变换又可以作如下简化

$$R_{z_2}(\phi_{m-2})M_2M_1 = M_2M_1R_{z_1}(\phi_{m-2})(M_2M_1)^{-1}M_2M_1 = M_2M_1R_{z_1}(\phi_{m-2}), \quad (5)$$

其中

$$R_{z_1}(\phi_{m-2}) = \begin{pmatrix} \cos \phi_{m-2} & -\sin \phi_{m-2} & 0 \\ \sin \phi_{m-2} & \cos \phi_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

变换矩阵最终可以写为

$$\begin{pmatrix} \cos \phi_{1-m} \cos \phi_{m-2} - \sin \phi_{1-m} \cos \theta_{1-m} \sin \phi_{m-2} & -\cos \phi_{1-m} \sin \phi_{m-2} - \sin \phi_{1-m} \cos \theta_{1-m} \cos \phi_{m-2} & \sin \phi_{1-m} \sin \theta_{1-m} \\ \sin \phi_{1-m} \cos \phi_{m-2} + \cos \phi_{1-m} \cos \theta_{1-m} \sin \phi_{m-2} & -\sin \phi_{1-m} \sin \phi_{m-2} + \cos \phi_{1-m} \cos \theta_{1-m} \cos \phi_{m-2} & -\cos \phi_{1-m} \sin \theta_{1-m} \\ \sin \theta_{1-m} \sin \phi_{m-2} & \sin \theta_{1-m} \cos \phi_{m-2} & \cos \theta_{1-m} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

具体地，赤道坐标系到银道坐标系的转换矩阵是

$$\begin{pmatrix} -0.054875545667945 & 0.494110771211000 & -0.867665384961804 \\ -0.873437545087187 & -0.444828615859559 & -0.198076645126421 \\ -0.483834196104114 & 0.746981959812779 & 0.455985112031682 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

赤道坐标系到超星系坐标系的转换矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0.375022041659904 & -0.898320159816291 & 0.228865372515963 \\ 0.341354889828154 & -0.095717033759227 & -0.935048174501584 \\ 0.861878940141622 & 0.428787989472616 & 0.270749981762484 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

注意，坐标变换的矩阵是上述矩阵的逆矩阵（在这个情况下就是转置矩阵）。