电磁猝变动力学的几个基本概念

黄沛天[1], 徐学翔[1], 马善钧[1], 贺梅英[2]

1. 江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330027
2. 宁波工程学院基础部, 浙江宁波 315016

[摘要] 对 RL 电路的一种暂态过程引入了急动度函数, 还引入了感应电动势的时间变率、位移电流的时间变率和 Appell 函数等概念, 讨论了 LC 振荡电路和简谐振动中的 Appell 函数守恒问题。
[关键词] 猝变动力学; 急动度函数; 感应电动势的时间变率; 位移电流的时间变率; Appell 函数
[中图分类号] O441, O313 [文献标识码] A [文章编号] 1000-7857(2007)03-0074-04

Some Basic Concepts in Electric-Magnetic Jerky Dynamics

HUANG Peitian[1], XU Xuexiang[1], MA Shanjun[1], HE Meiying[2]

1. College of Physics, Communication and Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China
2. Department of Basic Sciences, Ningbo University of Technology, Ningbo 315016, Zhejiang Province, China

Abstract: In this paper, jerk function for a transient process of RL circuit is introduced, together with the concepts of time rate of induced EMF, time rate of displacement current, and Appell function. The conservation of Appell function in LC oscillation circuits and simple harmonic vibrations is discussed。
Key Words: jerky dynamics; jerk function; time rate of induced EMF; time rate of displacement current; Appell function
CLC Numbers: O441, O313 Document Code: A Article ID: 1000-7857(2007)03-0074-04

1928 年, Melchior 定义急动度(jerk)为加速度对时间的微商 [1], 用以描写变加速运动。1997 年, Linz [2]和 Sprott[3]将急动度概念泛化为一般的急动度函数(任意自变量对时间的三阶微商),用以描写比变加速运动更为广泛的所谓"猝变运动"(jerky motion), 并且提出了"猝变动力学"新说。为此, 文献[4]-[6]先后从不同的角度做了相应的评述。文献[4]甚至还将急动度概念泛化到经济领域, 引入了描写财富变化的急动度函数。这也唤起人们对力学模型(或概念)泛化到电磁学事例的一些回忆。比如, 机械振动模型可以用来描写电磁振荡; 仿照"惯性质量"可以引入"电磁惯量"(自感系数)等。同样, 对于文献[7]讨论的淤泥微粒在静水中滞沉和文献[8]讨论的竞技短跑这类具有"收尾速度"特征的变加速运动, 人们自然也可以联想到具有同类数学表达式的 RL(电阻电感)电路的暂态过程。那么, 对于电磁学中的这种暂态过程, 是否也可以启用猝变动力学描述呢? 本文拟效法 Linz[2], Sprott[3]和 von Baeyer[4]等人, 先尝试从 RL 电路的某种暂态过程切入, 作些猝变动力学概念的引伸和讨论, 然后拓展为关于电磁猝变动力学的一般思考。

1 一种暂态过程的急动度函数

电磁学知识告诉我们, 在由电阻 R 和无内阻的理想线圈 L、理想电池 ε、开关 K 构成的简单回路中,当开关 K 接通, 由于线圈 L 的"电磁惯性", 电流 I 从零开始逐渐增大, 最后才达到稳定电流值 $I_m=\frac{\varepsilon}{R}$。这是 RL 电路的一种暂态过程。

对于这种暂态过程,由基尔霍夫第二定律可以给出

$$\varepsilon-L\dot{I}=IR \qquad (1)$$

式中的圆点"·"表示对时间求微商。然后将式(1)分离变量求积分, 可得电流滋长公式[9]

$$I=I_m(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (2)$$

对照"收尾速度"模型中的速度滋长公式[7,8]

收稿日期: 2006-10-19
作者简介: 黄沛天, 男, 江西南昌市北京西路 437 号江西师范大学物理与通信电子学院, 教授, 主要从事力学和基础物理的教学和研究; E-mail: xuxuexiang@jxnu.edu.cn

$$v=v_m(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \quad (3)$$

可见式(2)就像是式(3)的翻版。

由式(3)可以求得速度滋长过程的急动度

$$j=\ddot{v}=-\frac{v_m\gamma^2}{m^2}e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (4)$$

这表明速度滋长是一种变加速运动。同样,由式(2)可以求得电流滋长暂态过程的急动度函数

$$j=\dddot{q}=\ddot{I}=-\frac{I_mR^2}{L^2}e^{-\frac{R}{L}t} \quad (5)$$

式(5)表明,电流滋长是一种猝变运动(电量对时间的三阶微商不为零)。

2 感应电动势的时间变率和磁 Appell 函数

为了进一步了解急动度函数 $j=\ddot{I}$ 的物理内涵,将电磁感应定律 $\varepsilon_i=-L\dot{I}$ 对时间求微商,得

$$\dot{\varepsilon}_i=-L\ddot{I}=-Lj \quad (6)$$

式中的 $\dot{\varepsilon}_i$ 为感应电动势的时间变率。式(6)被称作感应电动势的时间变率公式。而此式也正是急动度函数 $j=\ddot{I}$ 要揭示的电磁猝变动力学的基本物理内涵——随时间变化的电磁感应。它类似于急动度 $j=\ddot{v}$ 揭示力变率公式[1] $\dot{F}=m\ddot{v}=mj$ 所表达的变加速动力学物理内涵——随时间变化的力作用。顺便指出,即使没有RL电路,也存在'随时间变化的电磁感应'问题。它体现为旋涡电场的时间变率,这在电子感应加速器中有着特殊的意义[9]。

如上所述,注意到式(6)类似于变加速动力学的力变率公式,因此,效法求力变率对速度的积分得到加速度能量定理[10],可以求感应电动势的时间变率对电流的积分

$$\int_{I_0}^{I}\dot{\varepsilon}_i\,dI=\int_{I_0}^{I}-L\ddot{I}\,dI=\int_{\dot{I}_0}^{\dot{I}}-L\dot{I}\,d\dot{I}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}L\dot{I}^2-\frac{1}{2}L\dot{I}_0^2\right)=-(A_m-A_{m0}) \quad (7)$$

式(7)可称作线圈L充(放)磁猝变过程的磁 Appell 函数定理。$A_{m0}=\frac{1}{2}L\dot{I}_0^2$ 和 $A_m=\frac{1}{2}L\dot{I}^2$ 分别为猝变系统的初态磁 Appell 函数和末态磁 Appell 函数(由文献[11]-[12]可以追溯 Appell 函数称谓的渊源)。显然,这里的磁 Appell 函数类似于变加速动力学中的加速度能量。另外,由自感系数的量纲 $L^2MT^{-2}I^{-2}$(这里量纲式中的L,M,T和I分别代表长度、质量、时间和电流强度)可以推得磁 Appell 函数的量纲为 L^2MT^{-4},这恰好也是加速度能量的量纲。由于磁 Appell 函数($\frac{1}{2}L\dot{I}^2$)与加速度能量($\frac{1}{2}m\dot{v}^2$)具有相同的量纲,可以把它们都归之为猝变运动的态函数。

3 位移电流的时间变率和电 Appell 函数

在电磁学中,充电(U)电容器(C)具有电能 $W_e=\frac{1}{2}CU^2$;载流(I)线圈(L)具有磁能 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$。由式(7)引入了磁 Appell 函数 $A_m=\frac{1}{2}L\dot{I}^2$,在此可以引入相应的电 Appell 函数。

试考察电容器的充(放)电过程。假定这一过程具有的电 Appell 函数形式为 $A_e=\frac{1}{2}C\dot{U}^2$,由电容C的量纲 $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$ 和电压时间变率 $\dot{U}$ 的量纲 $L^2MT^{-4}I^{-1}$,可得 A_e 的量纲为 L^2MT^{-4},这恰好与加速度能量 $S=\frac{1}{2}m\dot{v}^2$ 的量纲和磁 Appell 函数 $A_m=\frac{1}{2}L\dot{I}^2$ 的量纲相同。因此,仿照线圈充(放)磁猝变过程的磁 Appell 定理,可以求得电容器充(放)电过程中位移电流的时间变率($\dot{I}_d$)对电压(U)的积分为

$$\int_{U_0}^{U}\dot{I}_d\,dU=\int_{U_0}^{U}C\frac{d\dot{U}}{dt}dU=\int_{\dot{U}_0}^{\dot{U}}C\dot{U}\,d\dot{U}$$

$$=\frac{1}{2}C\dot{U}^2-\frac{1}{2}C\dot{U}_0^2=A_e-A_{e0} \quad (8)$$

此式可称作电容器充(放)电过程的电 Appell 函数定理。式中 $A_{e0}=\frac{1}{2}C\dot{U}_0^2$ 和 $A_e=\frac{1}{2}C\dot{U}^2$ 分别为初、末状态的电 Appell 函数。基于式(8)与加速度能量定理和磁 Appell 函数定理都具有同样的量纲,因此,把式(8)描写的电容器的充(放)电过程也归入猝变运动,并且可以统一把 Appell 函数(含加速度能量)作为猝变运动的普遍量度。

4 电场和磁场的 Appell 函数

在电磁学中,由充电平行板电容器的电能公式可以导出电场能量公式,由载流螺线管的磁能公式可以导出磁场能量公式,还可以得到相应的能量密度表述。现在也可由平行板电容器充(放)电猝变的电 Appell 函数公式导出电场的 Appell 函数表式

$$A_e=\frac{1}{2}C\dot{U}^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}\dot{E}^2d^2=\frac{1}{2}\dot{D}\dot{E}V \quad (9)$$

式中,V=sd 为两平行板之间的体积,ε 为介电常数。由螺线管充(放)磁猝变的磁 Appell 函数公式导出磁场的 Appell 函数表式

$$A_m=\frac{1}{2}L\dot{I}^2=\frac{1}{2}\mu n^2V\dot{I}^2=\frac{1}{2}\dot{B}\dot{H}V \qquad (10)$$

式中 V 为螺线管内的体积，μ 为磁导率，n 为单位长度上的线圈匝数。

于是，可分别引入电场的 Appell 函数密度

$$a_e=\frac{A_e}{V}=\frac{1}{2}\dot{D}\dot{E} \qquad (11)$$

和磁场的 Appell 函数密度

$$a_m=\frac{A_m}{V}=\frac{1}{2}\dot{B}\dot{H} \qquad (12)$$

并且将某区域的电场 Appell 函数和磁场 Appell 函数分别表述为

$$A_e=\int_V a_e dV \qquad (13)$$

和

$$A_m=\int_V a_m dV \qquad (14)$$

5 LC 振荡电路中的总电磁 Appell 函数守恒

在电磁学中，对于 LC 电路中的无阻尼自由振荡[13]，由 $q=Q_0\cos(\omega t+\phi)$和 $I=-\omega Q_0\sin(\omega t+\phi)$可以给出电能和磁能，分别为

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{q^2}{2C}=\frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}L\omega^2Q_0^2\sin^2(\omega t+\phi)=\frac{Q_0^2}{2C}\sin^2(\omega t+\phi)$$

而总电磁能量则守恒：

$$W=W_e+W_m=\frac{Q_0^2}{2C}$$

现在从电磁狞变动力学角度，可以给出电 Appell 函数

$$A_e=\frac{1}{2}C\dot{U}^2=\frac{1}{2}C(\frac{\dot{q}}{C})^2=\frac{Q_0^2\omega^2}{2C}\sin^2(\omega t+\phi) \qquad (15)$$

和磁 Appell 函数

$$A_m=\frac{1}{2}L\dot{I}^2=\frac{1}{2}L\omega^4Q_0^2\cos^2(\omega t+\phi)=\frac{Q_0^2\omega^2}{2C}\cos^2(\omega t+\phi) \qquad (16)$$

并且得到总电磁 Appell 函数守恒

$$A=A_e+A_m=\frac{Q_0^2\omega^2}{2C}=W\omega^2 \qquad (17)$$

式(17)也包含了式(15)，(16)表示的电、磁 Appell 函数此消彼涨的相互转化。

6 一种联想：简谐振动中的机械 Appell 函数守恒

对 LC 振荡的讨论自然使人们联想到简谐振动(因为二者具有相同形式的二阶微分方程描述)。众所周知，对于无阻尼弹簧简谐振子，由 $x=x_0\cos(\omega t+\phi)$和 $\dot{x}=-x_0\omega\sin(\omega t+\phi)$可得机械能守恒

$$E=E_k+E_p$$
$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega t+\phi)$$
$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

仿照上述电 Appell 函数的引入方式，假定简谐振子具有形式为 $A_p=\frac{1}{2}k\dot{x}^2$ 的势 Appell 函数。由弹性系数 k 的量纲 MT^{-2} 和速度 $\dot{x}$ 的量纲 LT^{-1}，可得 A_p 的量纲为 L^2MT^{-4}，此即加速度能量 $S=\frac{1}{2}m\ddot{x}^2$ 的量纲。于是可令 $A=S+A_p$，并称之为系统的机械 Appell 函数。因此，由 $\dot{x}=-x_0\omega\sin(\omega t+\phi)$和 $\ddot{x}=-x_0\omega^2\cos(\omega t+\phi)$可得机械 Appell 函数守恒

$$A=S+A_p$$
$$=\frac{1}{2}m\ddot{x}^2+\frac{1}{2}k\dot{x}^2$$
$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^4\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}kx_0^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi)$$
$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^4\frac{1}{2}kx_0^2\omega^2 \qquad (18)$$

式(18)也包含了加速度能量 S 与势 Appell 函数 A_p 此消彼涨的相互转化。

7 结论

从以上讨论可得出如下结论。

1) 由急动度概念泛化引起的狞变动力学思维方式，启发我们拓展出电磁狞变动力学的一些新概念，而由力变率和新概念感应电动势变率、位移电流变率引起的运动皆属狞变运动(力变率引起的运动又称为变加速运动)。

2) Appell 函数（含加速度能量）是描写狞变运动(含变加速运动)的重要态函数，它是狞变运动的普遍量度。虽然，有时候人们[12-14]也把加速度能量称做 Appell 函数，但是，狞变动力学的诞生促使本文对二者作出某种区别：加速度能量只是变加速动力学中的物理量，而 Appell 函数则属更为广泛的狞变动力学中的物理量。或者说，Appell 函数是量纲为 L^2MT^{-4} 的物理量的普遍称呼，而加速度能量只是 Appell 函数在变加速动力学中的某种特殊称谓。笔者认为，随着科学的发展，及时做出这种适当区别是必要的，也是有益的。

3) 本文寻找到 LC 振荡电路中电、磁 Appell 函数此消彼涨相互转化和总电磁 Appell 函数守恒，又寻找到简谐振动中加速度能量与势 Appell 函数此消彼涨相

互转化和机械 Appell 函数守恒。另外, Linz[15]也对一个特殊的牛顿猝变动力学系统给出了具有单位质量加速度能量量纲的守恒量 $K=\frac{1}{2}(\dddot{x}+A\ddot{x})^2+\frac{1}{2}B(\ddot{x}+A\dot{x})^2$。那么, 是否存在更为广泛的各种 Appell 函数之间的转化和守恒, 这也许是一个值得思考、需要仔细研究的问题。

参考文献(References)

[1] 黄沛天. 一个描写机械运动的新概念——急动度 [J]. 物理, 1981, 10: 394- 397.
HUANG Peitian. Jerk: a new concept to describe mechanical motion[J] .Physics, 1981, 10: 394.
[2] LINZ S J. Nonlinear dynamical models and jerky motion [J]. Am J Phys, 1997, 65: 523- 526.
[3] SPROTT J C. Some simple chaotic jerk function[J]. Am J Phys, 1997, 65: 537- 543.
[4] VONBAEYER H C. All shook up: the jerk, an old - fashioned tools of physics, find new applications in the theory chaos[J]. The Sciences, 1998, 38: 12- 14.
[5] 黄沛天, 马善钧, 徐学翔, 等. 变加速动力学纵横[J]. 力学与实践, 2004, 26(6): 85- 87.
HUANG Peitian, MA Shanjun, XU Xuexiang, et al. The dynamics of varying acceletrated motion [J]. Mechanics in Engineering, 2004, 26(6): 85- 87.
[6] 黄沛天, 马善钧. 从传统牛顿力学到当今猝变动力学[J]. 大学物理, 2006, 25(1): 1- 3.
HUANG Peitian, MA Shanjun. From traditional Newtonian mechanics to the jerky dynamics of today [J]. College Physics, 2006, 25(1): 1- 3.
[7] 黄沛天, 马善钧, 胡利云. 变加速动力学和三阶微分方程[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2003, 27: 338- 340.
HUANG Peitian, MA Shanjun, HU Liyun. The dynamics of varying accelerated motion and the three order differential equation[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natual Sciences Edition), 2003, 27: 338- 340.
[8] 黄沛天, 黄小棣, 马善钧, 等. 竞技体育中的变加速运动及其概念规范[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2006, 30: 339- 341.
HUANG Peitian, HUANG Xiaodi, MA Shanjun, et al. The varying accelerated motion in competitive sports and its normalized concepts[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natual Sciences Edition), 2006, 30: 339- 341.
[9] 梁灿彬, 秦光戎, 梁竹健.电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 404- 408; 386- 388.
LIANG Canbin, QIN Guangrong, LIANG Zhujian. Electromagnetics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1980. 404- 408; 386- 388.
[10] 黄沛天, 黄文, 胡利云. 变加速运动理论与实践意义初探[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2003, 27: 8 - 11.
HUANG Peitian, HUANG Wen, HU Liyun. A preliminary probe into the meaning on theory and practice of varying accelerated motion[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natual Sciences Edition), 2003, 27: 8- 11.
[11] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991: 194; 249.
MEI Fengxiang, LIU Duan, LUO Yong. Advanced analytic mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991. 194; 249.
[12] 张相武. 对加速度能量物理意义的探讨 [J]. 力学与实践, 2006, 28(3): 81- 82.
ZHANG Xiangwu. Disscusion on the physical meaning of energy of acceleration [J]. Mechanics in Engineering, 2006, 28(3): 81- 82.
[13] 程守洙, 江之永. 普通物理学. 第二册(第 4 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982: 250- 253.
CHENG Shouzhu, JIANG Zhiyong. General physics. Second volume (Fourth edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 1982. 250- 253.
[14] 沙永海. 一般运动刚体 Appell 函数的推证[J]. 力学与实践, 1988, 10(5): 53- 54.
SHA Yonghai. Deduction of Appell function for a rigid body under general motion[J]. Mechanics and Practice, 1988, 10(5): 53- 54.
[15] LINZ S J. Newtonian jerky dynamics: some general properties[J]. Am J Phys, 1998, 66: 1109- 1114.

(责任编辑 齐志红)

·科技动态·

中国科协建立科技期刊与新闻媒体见面会制度

2007 年 1 月 29 日, 中国科协学会学术部在北京国宏宾馆主持召开了首次科技期刊与新闻媒体见面会, 并将中国科协所属科技期刊最新发表的 8 篇具有新闻价值的研究论文成果向大众媒体进行了发布。参与这次发布的期刊包括《科技导报》、《中华医学杂志》、《遗传》、《植物学报》(英文版)、《计算机科学技术学报》和《地质学报》, 其中《科技导报》发布的两条新闻是"《科技导报》评出 2006 年 24 项中国重大技术与工程进展"和"《科技导报》评出 2006 年世界天文学和天体物理学重要进展"。包括新华社、中国新闻社、科技日报、科学时报、北京晚报在内的 14 家媒体记者参加了见面会。中国科协科技期刊与新闻媒体见面会由中国科协学会学术部主办, 中国科技新闻学会和科技导报社承办, 旨在促进学术论文成果的社会传播和公众了解, 以及科技期刊与大众媒体的互动, 今后将每月举行 1 次。中国科协书记处书记冯长根出席了见面会并做了重要讲话。

(本刊记者 黄永明)