

南开大学2012年数学分析考研试题

张祖锦

School of Mathematics and Computer Science

Gannan Normal University

Ganzhou 341000, Jiangxi, People's Republic of China

zhangzujin361@163.com

2012 年 11 月 5 日

摘要 本文给出了南开大学 2012 年的数学分析考研试题.

主页 <http://bbs.scientificnet.cn/?287000>

关键词 南开大学 数学分析 考研试题

1. (15') 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^m \int_0^{\frac{1}{x}} \sin t^2 dt$, 其中 m 为任意整数.
2. (20') 计算积分 $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
3. (20') 计算积分 $\iint_S x^2 dy dz + z dx dy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ 中满足 $x^2 + y^2 \leq ay$ 与 $z \leq a$ 那部分的下侧.
4. (15') 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{n(n+1)}$ 的和.

5. (15') 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 的敛散性, 其中 p 为任意实数.
6. (15') 请回答: 函数 $f(x) = \sin(x^2)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否一致连续? 并说明理由.
7. (15') 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0$, 对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $f(x) \neq 0$. 证明:
存在 $\zeta \in (0, 1)$, 使得 $2 \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{f'(1-\zeta)}{f(1-\zeta)}$.
8. (15') 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$. 求极限
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b g(x) f^n(x) dx \right]^{\frac{1}{n}}$, 并证明之.
9. (15') 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$. 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.