

2009 年中国科学院高等代数

1、计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & x & \dots & 0 \\ y & x+y & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & y & x+y \end{vmatrix}$$

2、已知

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{只记得对角线元素了})$$

B 满足 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 证 B 可逆, 并求 B^{-1}

3、已知

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 阶矩阵, 具体元素已忘记})$$

求 (1) A 的特征值, 特征向量;

(2) 求 A^k ,

(3) 求 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}A\right)^k$, 并给出一个应用。

4、设 A, B 为实正定矩阵, 求证: AB 正定的充要条件是 $AB = BA$ 。

5、设 f 为 N 次多项式, $f' \mid f \Leftrightarrow f$ 有 N 重根。

6、设 A 可逆, 证 $A + \alpha\beta'$ 可逆的充分必要条件是 $1 + \beta' A \alpha \neq 0$, 并求 $A + \alpha\beta'$ 的逆。

7、已知 φ 为线性空间 V 上的线性变换, φ 有特征值为 1, 且特征值 1 的特征子空间是 $n-1$ 维的, 证明存在单位向量 η 使

$$\varphi: \alpha \rightarrow \alpha - (\alpha, \eta)\eta$$

8、设为实矩阵, 若 A, B 在复 A, B 数域上相似则在实数域上也相似。